Invent. math. 124, 51–101 (1996)

Inventiones mathematicae

L'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques

Nicole Berline[1], **Michèle Vergne**[2]

[1] Ecole Polytechnique et UA 169 du CNRS, Centre de Mathématiques,
F-91128 Palaiseau Cedex, France; e-mail: berline@orphee.polytechnique.fr
[2] E.N.S. et UA 762 du CNRS, DMI, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm,
F-75005 Paris, France; e-mail: vergne@dmi.ens.fr

Oblatum 24-VII-1995

to Reinhold Remmert

Résumé. Dans cet article, nous montrons que l'indice cohomologique (construit dans [11]) d'un symbole transversalement elliptique satisfait certaines propriétés fonctorielles. Nous calculons d'autre part l'indice cohomologique pour certains symboles transversalement elliptiques particuliers. En reprenant les arguments donnés par Atiyah dans [1], on en déduit que l'indice cohomologique du symbole d'un opérateur transversalement elliptique P est égal à l'indice analytique de P.

1 Introduction

Soit G un groupe de Lie compact opérant sur une variété différentiable compacte M. Soient $\mathscr{E}^{\pm}$ des fibrés G-équivariants sur M et soient $\Gamma(M,\mathscr{E}^{\pm})$ les espaces de sections C^{∞} de $\mathscr{E}^{\pm}$. Soit

$$P : \Gamma(M,\mathscr{E}^{+}) \to \Gamma(M,\mathscr{E}^{-})$$

un opérateur pseudo-différentiel commutant à l'action de G. Supposons M et $\mathscr{E}^{\pm}$ munis de métriques G-invariantes et soit P^* l'adjoint de P. Si P est un opérateur elliptique, le noyau $\mathrm{Ker}(P)$ de P et le noyau $\mathrm{Ker}(P^*)$ de P^* sont des espaces de dimension finie stables sous l'action de G. L'indice équivariant de P est la représentation virtuelle $\mathrm{Ker}(P)-\mathrm{Ker}(P^*)$ de G. On note index $(P)(s)$ la valeur de son caractère au point $s \in G$, c'est-à-dire

$$\mathrm{index}(P)(s) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ker}\,P}(s) - \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ker}\,P^*}(s)\ .$$

La fonction analytique sur G ainsi définie s'exprime en fonction du symbole principal σ de l'opérateur P. Soit $M(s)$ la variété des point fixes de s sur M. La valeur de la fonction index(P) au point $s \in G$ est obtenue en intégrant une classe de cohomologie α_s à support compact (dépendant de σ) sur la variété $T^*M(s)$. C'est la formule des points fixes d'Atiyah–Segal–Singer [2]. Rappelons la brièvement. Le symbole σ, étant inversible en dehors de la section nulle de T^*M, détermine par recollement un fibré virtuel $\mathscr{F}(\sigma)$ trivial à l'infini sur une compactification de T^*M. Le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mathscr{F}(\sigma))$ est une forme à support compact sur T^*M. Soit e l'élément neutre de G. On a

$$\mathrm{index}(P)(e) = \dim(\mathrm{Ker}(P)) - \dim(\mathrm{Ker}(P^*)) = \int_{T^*M} \mathrm{ch}(\mathscr{F}(\sigma))\hat{A}(T^*M)\,,$$

et d'autres formules analogues donnant la valeur de $\mathrm{index}(P)(s)$ en $s \in G$ par une intégrale sur $T^*M(s)$. Ici $\hat{A}(T^*M)$ est le $\hat{A}$-genre de la variété T^*M et provient d'une forme sur M.

Considérons le cas d'un opérateur G-transversalement elliptique. Son symbole principal est inversible sur l'espace T^*_GM des vecteurs cotangents transverses aux orbites de G. Alors chaque représentation irréductible λ de G intervient avec multiplicité finie dans Ker P et la représentation de G dans Ker P est une représentation traçable de G. Dans ce cas, l'indice de P est la fonction généralisée sur G définie par

$$\mathrm{index}(P) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ker}\,P} - \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ker}\,P^*}\ .$$

D'après les résultats d'Atiyah [1], l'indice de P ne dépend que de la classe du symbole σ de P dans $K_G(T^*_GM)$. Remarquons que T^*_GM est un fermé de T^*M, mais n'est pas en général une sous-variété si les orbites de G dans M n'ont pas toutes la même dimension.

L'indice de P étant une fonction généralisée, sa valeur en un point particulier s de G n'a pas de sens en général. On peut construire facilement des exemples d'opérateurs transversalement elliptiques d'indices non nuls sur une G-variété M telle que G agisse librement sur M. En effet, on en obtient en remontant horizontalement un opérateur elliptique sur la variété quotient $G\backslash M$. Dans ce cas l'indice de P est une fonction généralisée sur G de support l'identité e du groupe G. C'est une dérivée (dont l'ordre peut être arbitrairement grand) de la masse de Dirac en e.

Nous montrons dans cet article qu' on peut calculer l'indice de P en fonction du symbole σ de P en intégrant au sens généralisé une classe de cohomologie équivariante (dépendant de σ) de la variété T^*M. Rappelons le type de formule proposée dans [15]. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Une forme équivariante sur T^*M est une application $\alpha(X)$ ($X \in \mathfrak{g}$) de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des formes différentielles sur T^*M. Dans [11], nous avons associé à σ une forme équivariante $\alpha(X)$ (fermée pour la différentielle équivariante $d_{\mathfrak{g}}$) définie si $X \in \mathfrak{g}$ est assez petit et rapidement décroissante en $\mathfrak{g}$-moyenne: si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{g}$ de support assez voisin de 0, alors la forme différentielle $\int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\phi(X)dX$ sur T^*M est à décroissance rapide. On montre ici l'égalité

$$\int_{\mathfrak{g}} \mathrm{index}(P)(\exp X)\phi(X)dX = \int_{T^*M} \left(\int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\phi(X)dX\right)\ .$$

Nous écrirons cette égalité comme une égalité de fonctions généralisées sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$:

$$\operatorname{index}(P)(\exp X) = \int_{T^*M} \alpha(X)\,.$$

De même, si s est un élément quelconque de G, on note $G(s)$ le centralisateur de s dans G et on associe à σ une forme $G(s)$-équivariante fermée $\alpha_s(Y)$ sur $T^*M(s)$ telle que l'on ait l'égalité suivante de fonctions généralisées. Pour Y variant au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, on a

$$\operatorname{index}(P)(s\exp Y) = \int_{T^*M(s)} \alpha_s(Y)\,.$$

Nos deux sources d'inspiration pour la construction de la forme α_s sont d'une part bien évidemment le théorème d'Atiyah–Segal–Singer pour les opérateurs elliptiques et d'autre part le paradigme pour la théorie de la quantification géométrique: il est convenu d'associer à la variété symplectique T^*M l'espace de Hilbert $L^2(M)$. Soit ω^M la 1-forme canonique de T^*M et soit $f : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ l'application moment. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $f(X)(x,\xi) = (\xi, (X_M)_x)$ où X_M est le champ de vecteurs sur M associé à l'action de G. Soit $\Omega = -d\omega^M$ la forme symplectique de T^*M et soit $\Omega(X) = f(X) + \Omega$ la forme symplectique équivariante de T^*M. Dans ce cas, il est naturel d'essayer la formule suivante pour le caractère de la représentation de G dans $L^2(M)$,

$$\operatorname{Tr}_{L^2(M)}(\exp X) = (2i\pi)^{-\dim M} \int_{T^*M} e^{i\Omega(X)}(J(M)(X))^{-1}\,. \tag{1}$$

Ici $J(M)(X)$ est une forme équivariante fermée sur M, inversible lorsque $X \in \mathfrak{g}$ est suffisamment petit. La valeur $(J(M)(0))^{-1}$ est égale à $\hat{A}(T^*M)$ à des facteurs de normalisation par $(2i\pi)$ près.

Lorsque M est homogène sous l'action de G, la représentation régulière de G dans $L^2(M)$ est traçable et sa trace satisfait à l'égalité (1), qui a un sens comme une égalité de fonctions généralisées sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$. Ce cas très simple est explicité dans [9]. Considérons le cas où $M = G$, muni de l'action de G par translations à gauche. Dans ce cas $J(M) = 1$. Au premier membre de la formule (1), on a la masse de Dirac en $0 \in \mathfrak{g}$. Le deuxième membre de la formule s'écrit comme une intégrale sur $G \times \mathfrak{g}^*$:

$$(2i\pi)^{-\dim G} \int_{T^*G} e^{i\Omega(X)} = (2\pi)^{-\dim G} \int_G \left(\int_{f\in\mathfrak{g}^*} e^{i(f,X)} df \right) dg$$

et cette intégrale est bien la masse de Dirac au point 0 de $\mathfrak{g}$.

Pour cette raison et sans doute d'autres, il est important dans les formules d'indice d'opérateurs transversalement elliptiques de tenir compte de la forme $e^{i\Omega(X)} = e^{-i(d_{\mathfrak{g}}\omega^M)(X)}$ sur T^*M. L'exemple précédent montre que, même si la classe de cette forme est égale à 1 dans le complexe de cohomologie équivariante sans conditions de croissance, son intégrale au sens généralisé n'est pas nulle.

Ces considérations simples dictent le choix suivant de α. Pour simplifier l'exposition, supposons que P soit un opérateur différentiel de sorte que son symbole principal $\sigma(x,\xi) : \mathscr{E}_x^+ \to \mathscr{E}_x^-$ est homogène d'ordre $m \geqq 1$ sur T_x^*M. Notons $p : T^*M \to M$ la projection. Soient $\nabla^{\mathscr{E}^\pm}$ des connexions G-invariantes sur les fibrés $\mathscr{E}^\pm$. Considérons le superfibré $p^*\mathscr{E} = p^*\mathscr{E}^+ \oplus p^*\mathscr{E}^-$ sur T^*M. On associe à σ la superconnexion

$$\mathbb{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} p^*\nabla^{\mathscr{E}^+} & i\sigma^* \\ i\sigma & p^*\nabla^{\mathscr{E}^-} \end{pmatrix}$$

sur $p^*\mathscr{E}$.

Le théorème principal de cet article est le théorème 20 qui donne une formule intégrale pour l'indice équivariant de P en fonction du caractère de Chern de la superconnexion $\mathbb{A}(\sigma)$. En particulier, le théorème 20 montre que, au voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$, on a l'égalité de fonctions généralisées:

$$\mathrm{index}(P)(\exp X) = (2i\pi)^{-\dim M} \int_{T^*M} e^{i\Omega(X)} \mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(X)(J(M)(X))^{-1} . \quad (2)$$

Comme nous venons de le montrer, cette formule est vérifiée dans deux cas extrêmes:

(1) Le groupe G est réduit à l'identité et l'opérateur P est elliptique. En effet (à part des normalisations différentes pour les facteurs $2i\pi$), le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))$ coincide avec $\mathrm{ch}(\mathscr{F}(\sigma))$ (voir par exemple [10]). De plus, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la forme différentielle $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(X)$ est rapidement décroissante sur T^*M et on peut remplacer la forme $e^{i\Omega(X)}$ par 1.

(2) La variété M est homogène et l'opérateur P est nul.

Notons que, s'il est rassurant de montrer que la formule (2) est vérifiée pour ces deux cas extrêmes, il n'est pas nécessaire de démontrer ces cas particuliers préalablement à l'étude générale. D'ailleurs (comme il est montré dans [1]) même dans l'étude d'opérateurs elliptiques, les opérateurs transversalement elliptiques obtenus par relèvement horizontal d'opérateurs elliptiques s'introduisent naturellement. Ainsi l'axiome de produit fibré (B3) de [3] est une conséquence naturelle des axiomes de produit externe et d'action libre énoncés dans la section 2.

Indiquons pourquoi la formule (2) a un sens. Soit $F(X)$ la courbure équivariante de $\mathbb{A}(\sigma)$. Alors $F(X)$ est une forme sur T^*M à valeurs endomorphismes de $\mathscr{E}^+ \oplus \mathscr{E}^-$. Le terme de degré extérieur 0 de $F(X)$ au point $(x,\xi) \in T^*M$ est l'endomorphisme

$$-\begin{pmatrix} \sigma(x,\xi)^*\sigma(x,\xi) + \mu^+(X)(x) & 0 \\ 0 & \sigma(x,\xi)\sigma(x,\xi)^* + \mu^-(X)(x) \end{pmatrix},$$

où $\mu^\pm(X)$ sont les moments équivariant des connexions $\nabla^\pm$ sur les fibrés $\mathscr{E}^\pm \to M$. On voit donc que la forme

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(X)(x,\xi) = \mathrm{Str}(e^{F(X)})$$

est rapidement décroissante sur l'espace $(T^*_G M)_x = \{\xi, (\xi, X_M) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}\}$. En effet, dans ces directions, $\sigma(x,\xi)^*\sigma(x,\xi)$, étant un opérateur strictement positif et homogène en ξ, devient très grand lorsque ξ tend vers l'infini. Dans le deuxième membre de la formule (2), le facteur $e^{i\Omega(X)} = e^{i(\xi, X_M)}e^{i\Omega}$, intégré contre une fonction test $\phi(X)$, permet d'obtenir une décroissance rapide dans les autres directions. Le deuxième membre de la formule (2) détermine ainsi un germe de fonction généralisée sur G près de $g = 1$. De même, on construit par une intégrale sur $T^*M(s)$ un germe de fonction généralisée sur G en s. On démontre dans [11] qu'effectivement ces germes, donnés en différents points $s \in G$ par des formules sur les différentes variétés $T^*M(s)$, s'unissent pour définir une fonction généralisée $\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma)$ sur G, qu'on appelle indice cohomologique de σ. Dans le présent article, nous montrons l'égalité $\mathrm{index}(P) = \mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma)$. Pour cela, nous suivons Atiyah [1] pas à pas. En effet, Atiyah donne dans [1] un algorithme pour calculer $\mathrm{index}(P)$, analogue à celui (considéré par Grothendieck pour le théorème de Riemann–Roch et par Atiyah–Singer pour les opérateurs elliptiques) qui consiste à plonger M dans un espace vectoriel V. Le cas transversalement elliptique est plus compliqué que le cas elliptique du fait que, si G est un groupe de Lie compact agissant linéairement sur V, il ne semble pas facile de donner un système de générateurs pour $K_G(T^*_G V)$. Par contre, grâce à une méthode de relèvement horizontal d'opérateurs elliptiques sur divers fibrés principaux, on peut se ramener à l'action de $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Il existe alors un opérateur A sur la sphère S_2 dont l'indice analytique est la série $-\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}$ (nous en donnons une construction explicite dans l'appendice 2). Il y a donc deux points à prouver pour l'indice cohomologique: la réciprocité de Frobenius pour le relèvement horizontal d'opérateurs (c'est ce que nous vérifions dans le paragraphe 3.4 consacré aux actions libres) et l'égalité avec l'indice analytique pour l'opérateur A.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [15] et [10].

2 Rappel des propriétés fonctorielles de l'indice analytique

Dans cette section, nous rappelons la définition et quelques propriétés de l'indice analytique des opérateurs transversalement elliptiques démontrées par Atiyah dans [1].

2.1 K-théorie et symboles

Soit $\mathcal{V}$ un espace topologique localement compact muni d'une action d'un groupe de Lie compact G. Soient $\mathcal{E}^\pm$ deux fibrés vectoriels complexes G-équivariants sur $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\sigma} \mathcal{E}^-$ un morphisme de fibrés G-équivariants. Par définition, l'ensemble caractéristique $\mathrm{Car}(\sigma)$ de $\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\sigma} \mathcal{E}^-$ est l'ensemble des points $y \in \mathcal{V}$ pour lesquels $\sigma_y : \mathcal{E}^+_y \to \mathcal{E}^-_y$ n'est pas inversible. Si $\mathrm{Car}(\sigma)$ est compact, on dira que σ est un morphisme elliptique. Si σ est un morphisme de fibrés G-équivariants et si σ est elliptique, alors σ définit un élément $[\sigma]$

de $K_G(\mathscr{V})$. Plus généralement soit σ un morphisme défini seulement en dehors d'un compact K de $\mathscr{V}$. On suppose qu'il est inversible sur son ensemble de définition $\mathscr{V} - K$. Alors σ définit une classe $[\sigma]$ dans $K_G(\mathscr{V})$. Par définition, si ϕ est une fonction G-invariante sur $\mathscr{V}$ à valeurs réelles identiquement égale à 0 sur un voisinage de K et égale à 1 en dehors d'un compact K' de $\mathscr{V}$, alors $\phi\sigma$ est un morphisme défini sur $\mathscr{V}$ et $[\sigma] = [\phi\sigma]$.

Choisissons une structure hermitienne G-invariante sur $\mathscr{E}^{\pm}$. Il sera utile d'associer à $\sigma : \mathscr{E}^+ \to \mathscr{E}^-$ l'endomorphisme impair du super fibré $\mathscr{E} = \mathscr{E}^+ \oplus \mathscr{E}^-$ défini, pour $y \in \mathscr{V}$, par

$$v(\sigma)(y) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y^* \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Alors

$$v(\sigma)(y)^2 = \begin{pmatrix} \sigma_y^*\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y\sigma_y^* \end{pmatrix}$$

est un opérateur hermitien positif sur la fibre $\mathscr{E}_y$ et l'ensemble $\mathrm{Car}(\sigma)$ est le complémentaire de l'ensemble des points $y \in \mathscr{V}$ tels que $v(\sigma)(y)^2$ soit strictement positif.

Soit $\mathscr{L}$ un fibré équivariant hermitien sur $\mathscr{V}$. Soit $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}^+ = \mathscr{L}$. Soit $\sigma : \mathscr{E}^+ \to \mathscr{E}^-$ un morphisme elliptique de fibrés équivariants tel que $\sigma = \sigma^*$. Alors la classe définie par σ dans $K_G(\mathscr{V})$ est nulle.

Si $\mathscr{V}$ est un point, alors $K_G(\mathit{point})$ est l'anneau $R(G)$ des représentations virtuelles de G.

Rappelons la définition du produit externe (voir [1], page 21): soient $\mathscr{V}_i$, $i = 1, 2$, deux espaces localement compacts munis d'une action de G. Soient $\mathscr{E}_i^{\pm}$ des fibrés G-équivariants sur $\mathscr{V}_i$ munis de structures hermitiennes G-invariantes et soient $\mathscr{E}_i^+ \xrightarrow{\sigma_i} \mathscr{E}_i^-$ des morphismes G-équivariants.

On considère le morphisme G-équivariant

$$\sigma_1 \odot \sigma_2 : \mathscr{E}_1^+ \otimes \mathscr{E}_2^+ \oplus \mathscr{E}_1^- \otimes \mathscr{E}_2^- \to \mathscr{E}_1^- \otimes \mathscr{E}_2^+ \oplus \mathscr{E}_1^+ \otimes \mathscr{E}_2^-$$

défini par

$$\sigma_1 \odot \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \otimes I & -I \otimes \sigma_2^* \\ I \otimes \sigma_2 & \sigma_1^* \otimes I \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Soient $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_i^+ \oplus \mathscr{E}_i^-$. Le super-fibré sur lequel $v(\sigma_1 \odot \sigma_2)$ agit est le produit tensoriel de superfibrés $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$:

$$(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)^+ = \mathscr{E}_1^+ \otimes \mathscr{E}_2^+ \oplus \mathscr{E}_1^- \otimes \mathscr{E}_2^-, \quad (\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)^- = \mathscr{E}_1^- \otimes \mathscr{E}_2^+ \oplus \mathscr{E}_1^+ \otimes \mathscr{E}_2^- .$$

De plus

$$v(\sigma_1 \odot \sigma_2)^2 = v(\sigma_1)^2 \otimes I + I \otimes v(\sigma_2)^2 . \tag{5}$$

On voit que l'ensemble $\mathrm{Car}(\sigma_1 \odot \sigma_2) \subset \mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2$ est égal à $\mathrm{Car}(\sigma_1) \times \mathrm{Car}(\sigma_2)$. On obtient ainsi une application

$$K_G(\mathscr{V}_1) \otimes K_G(\mathscr{V}_2) \to K_G(\mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2) .$$

En particulier, lorsque $\mathscr{V}_1$ est un point et $\mathscr{V}_2 = \mathscr{V}$, on obtient une structure de $R(G)$-module sur $K_G(\mathscr{V})$.

Soit M une variété différentiable munie d'une action de G. On note T^*M le fibré cotangent à M. Un point de T^*M sera noté (x, ξ), avec $x \in M$ et $\xi \in T_x^*M$. On note p la projection $T^*M \to M$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour X dans $\mathfrak{g}$, on note X_M le champ de vecteurs sur M défini par

$$X_M(x) = \frac{d}{dt} \exp(-tX) \cdot x|_{t=0} \tag{6}$$

pour $x \in M$.

On note $f^{M,G} : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ l'application moment:

$$\langle f^{M,G}(x, \xi), X \rangle = \langle \xi, X_M(x) \rangle \ . \tag{7}$$

Si G et M sont fixés, on notera $f^{M,G}$ simplement parfois par f. On pose

$$T_G^*M = (f^{M,G})^{-1}(0) \ .$$

Le sous-ensemble $(T_G^*M)_x$ de T_x^*M est donc l'orthogonal à l'espace tangent en x à l'orbite $G \cdot x$. La dimension de $(T_G^*M)_x$ est égale à la codimension de $G \cdot x$ et dépend de x.

Soient $\mathscr{E}^\pm$ deux fibrés sur M. Pour abréger, on appellera un morphisme de fibrés $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ un *symbole*. Si $(x, \xi) \in T^*M$, alors $\sigma(x, \xi)$ est une application linéaire de $\mathscr{E}_x^+$ dans $\mathscr{E}_x^-$.

Définition 1 *Soit M une G-variété. Un symbole $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ est dit G-transversalement elliptique si*
(1) *$\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}^-$ sont des fibrés vectoriels G-équivariants et σ un morphisme de fibrés G-équivariants.*
(2) *La restriction de σ à T_G^*M est inversible en dehors d'un compact.*

La restriction de σ à T_G^*M définit donc un élément $[\sigma]$ de $K_G(T_G^*M)$. Remarquons que nous n'imposons aucune condition d'homogénéité sur le symbole σ. Nous supposons par contre que σ est défini sur tout T^*M et est C^∞. Une des raisons de prendre une classe aussi large de représentants des éléments de $K_G(T_G^*M)$ est qu'elle est évidemment stable par produit externe. Il est cependant utile de faire la remarque suivante.

Remarque 2 Supposons M compacte. Munissons M d'une métrique G-invariante. Soit m un nombre réel. On dira qu'un symbole σ est presque homogène d'ordre m si $\sigma(x, t\xi) = t^m \sigma(x, \xi)$ pour tout $x \in M$, $t \geqq 1$ et $\xi \in T_x^*M$ de norme $\|\xi\| \geqq 1$. Soit $S(M) = \{(x, \xi), \|\xi\| = 1\}$ le sous-fibré en sphères de T^*M. Considérons alors le sous-ensemble compact $S(T_G^*M) = T_G^*M \cap S(M)$ de T_G^*M. On peut représenter tout élément de $K_G(T_G^*M)$ de la manière suivante. On considère deux fibrés vectoriels G-équivariants $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}^-$ sur M. Soit $a : p^*\mathscr{E}^+|_{S(M)} \to p^*\mathscr{E}^-|_{S(M)}$ un morphisme de fibrés G-équivariants défini seulement au-dessus de $S(M)$ et tel que sa restriction à $S(T_G^*M)$ soit inversible.

Soit $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $\vartheta(t) = 0$ pour $t \leqq \frac{1}{2}$ et $\vartheta(t) = 1$ pour $t \geqq 1$. Soit m un nombre réel. Posons $\sigma_m(x,\xi) = \vartheta(\|\xi\|)\|\xi\|^m a(x, \xi/\|\xi\|)$. Alors σ_m est un symbole G-transversalement elliptique presque homogène d'ordre m. La classe de σ_m est indépendante de l'ordre m choisi. Elle ne dépend que de la restriction de a à $S(T^*_G M)$ et plus précisément que de la classe d'homotopie stable de $a|_{S(T^*_G M)}$ parmi les morphismes G-équivariants inversibles.

Définition 3 *Soit U une G-variété localement compacte. Un symbole $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ est dit trivial à l'infini s'il existe un espace vectoriel complexe V muni d'une représentation de G tel que, en dehors d'un sous-ensemble compact G-invariant K de U, les fibrés $\mathscr{E}^\pm$ soient tous deux égaux au fibré G-équivariant $(U-K) \times V$ muni de l'action diagonale de G et $\sigma(x,\xi) = Id_V$ pour $x \in U - K$ et $\xi \in T^*_x U$.*

Lemme 4 (*Lemma* 3.6 [1]). *Soit U une G-variété localement compacte. Tout élément de $K_G(T^*_G U)$ peut être représenté par un symbole G-transversalement elliptique qui est trivial à l'infini.*

Soit $j^M : U \to M$ un G-difféomorphisme de U sur un ouvert d'une G-variété compacte M. D'après le lemme 4 ci-dessus, on peut construire une application $j^M_* : K_G(T^*_G U) \to K_G(T^*_G M)$.

Nous aurons besoin de quelques symboles particuliers.

2.1.1 Le symbole de Bott

Soit $V = \mathbb{R}$. On note (x,ξ) $(x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R})$ un point de T^*V. On considère $\mathscr{E}^\pm = V \times \mathbb{C}$. Un morphisme elliptique $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ est donc simplement une application $\sigma : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ inversible en dehors d'un compact de $T^*\mathbb{R}$. Soit

$$b : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$$

le morphisme défini par l'application

$$b(x,\xi) = x + i\xi \, .$$

Comme x et ξ sont réels, $b(x,\xi)$ est inversible sauf si $(x,\xi) = (0,0)$. L'élément b définit donc un élément de $K(T^*V)$. On explicitera dans la section 4.1 l'élément $j_*[b]$ de $K(T^*S^1)$ obtenu par le plongement j de $\mathbb{R}$ dans $S^1 = \mathbb{R} \cup \{point\}$. Ici le groupe $G = \{e\}$ est trivial.

2.1.2 Le symbole d'Atiyah

Soit $V = \mathbb{C}$ muni de l'action de $G = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$ définie par $e^{i\theta} \cdot z = e^{i\theta} z$. On identifie V à V^* en définissant $\langle \xi, v \rangle = \mathrm{Re}(\xi \bar{v})$. On identifie donc T^*V à $V \oplus V$. L'espace $T^*_G V$ est alors défini par

$$T^*_G V = \{(z,\xi);\ z \in \mathbb{C};\ \xi \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z\bar{\xi}) = 0\} \, .$$

On a donc

$$(T^*_G V)_0 = V \ ,$$

tandis que si $z \neq 0$, on a

$$(T^*_G V)_z = \mathbb{R} z \ .$$

Soient $\mathscr{E}^\pm = V \times \mathbb{C}$ les fibrés G-équivariants sur V munis des actions de G définies par

$$e^{i\theta} \cdot (z, v_+) = (e^{i\theta} z, v_+) \quad \text{pour } (z, v_+) \in \mathscr{E}^+ \ ,$$

$$e^{i\theta} \cdot (z, v_-) = (e^{i\theta} z, e^{i\theta} v_-) \quad \text{pour } (z, v_-) \in \mathscr{E}^- \ .$$

Un morphisme G-équivariant $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ est une application $\sigma : T^*V \to \mathbb{C}$ telle que $\sigma(e^{i\theta} z, e^{i\theta}\xi) = e^{i\theta}\sigma(z, \xi)$.

Considérons le morphisme G-équivariant $m : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ défini par l'application

$$m(z, \xi) = z - i\xi \ .$$

Le symbole $m(z, \xi)$ est inversible, sauf si $z = i\xi$. D'après la description de $T^*_G V$, la restriction de m à $T^*_G V$ est inversible sauf au point $(0, 0)$. L'élément m représente donc un élément de $K_G(T^*_G V)$ que nous appellerons le symbole d'Atiyah. Nous expliciterons dans la section 6 un élément de $K_G(T^*_G(P_1(\mathbb{C})))$ représentant $j_*[m]$ pour l'application naturelle G-équivariante $j : \mathbb{C} \to P_1(\mathbb{C})$.

2.2 Définition de l'indice analytique

Si $\mathscr{E}$ est un fibré (différentiable) sur M, on note $\Gamma(M, \mathscr{E})$ l'espace des sections C^∞ du fibré $\mathscr{E}$.

Soit M une G-variété compacte. Soient $\mathscr{E}^\pm$ deux fibrés G-équivariants sur M. Soit $P : \Gamma(M, \mathscr{E}^+) \to \Gamma(M, \mathscr{E}^-)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m. Le symbole principal $\sigma(P)$ de P est un morphisme $p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ défini sur $T^*M \backslash 0$ et homogène de degré m. L'opérateur P est dit G-transversalement elliptique si P commute à l'action de G et si $\sigma(P)(x, \xi)$ est inversible pour tout $(x, \xi) \in T^*_G M$ tel que $\xi \neq 0$.

Le symbole principal $\sigma(P)$ d'un opérateur G-transversalement elliptique définit un élément $[\sigma(P)]$ de $K_G(T^*_G M)$. L'élément $[\sigma(P)]$ ne dépend que de la restriction de $\sigma(P)$ à $S(T^*_G M)$. Par le procédé décrit dans la remarque 2, on peut représenter $[\sigma(P)]$ par un symbole G-transversalement elliptique presque homogène d'ordre arbitraire. (Ceci correspond à multiplier P par une puissance arbitraire du Laplacien, opération que ne change pas l'indice de P.)

Rappelons la définition de l'indice analytique de P. Notons $C^{-\infty}(G)$ l'espace des fonctions généralisées sur G et $C^{-\infty}(G)^G$ l'espace des fonctions généralisées G-invariantes. L'espace $C^\infty(G)$ s'injecte naturellement dans $C^{-\infty}(G)$. On utilisera souvent la notation $\Theta(g)$ pour désigner une fonction généralisée Θ sur G, bien que la valeur de la fonction Θ en un point fixé g de G n'ait pas (en général) de sens. Par définition un élément Θ de $C^{-\infty}(G)$ définit une forme linéaire sur l'espace des densités C^∞ sur G. Si dg est une mesure de Haar sur G et $\phi \in C^\infty(G)$, on note $\int_G \Theta(g)\phi(g)dg$ la valeur de Θ sur la densité $\phi(g)dg$. On voit que, si $\Theta(g)$ est une fonction généralisée sur G, alors $\Theta(g)dg$ est une distribution. Nous préférons utiliser ici la notion de fonction généralisée car de même que la trace d'une représentation de dimension finie de G est une fonction G-invariante sur G, la trace d'une représentation traçable de G est une fonction généralisée G-invariante.

Notons $\mathrm{Ker}\, P$ le noyau de P. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(\mathrm{Ker}\, P)_\lambda$ le sous-espace de $\mathrm{Ker}\, P$ sur lequel le Casimir de G opère scalairement par multiplication par λ. Ce sous-espace est de dimension finie et est nul sauf si λ appartient à un sous ensemble discret I de $\mathbb{R}$. La série $g \mapsto \sum_{\lambda \in I} \mathrm{Tr}_{(\mathrm{Ker}\, P)_\lambda} g$ définit une fonction généralisée G-invariante sur G (Theorem 2.6 [1]). Nous la notons $\mathrm{Tr}(g, \mathrm{Ker}\, P)$.

Munissons M d'une métrique G-invariante et munissons les fibrés $\mathscr{E}^\pm$ de structure hermitiennes G-invariantes. L'adjoint P^* de P est un opérateur pseudo-différentiel G-transversalement elliptique.

Définition 5 *L'indice G-équivariant de P est la fonction généralisée sur G définie par*
$$\mathrm{index}^G(P)(g) := \mathrm{Tr}(g, \mathrm{Ker}\, P) - \mathrm{Tr}(g, \mathrm{Ker}\, P^*)\,.$$

Proposition 6 (*Theorem* 2.6 [1]). *L'indice G-équivariant de P ne dépend que de $[\sigma(P)] \in K_G(T^*_G M)$.*

Comme tout élément de $K_G(T^*_G M)$ peut être représenté comme le symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre m, on peut définir l'application
$$\mathrm{index}_a^{G,M} : K_G(T^*_G M) \to C^{-\infty}(G)^G$$
en posant $\mathrm{index}_a^{G,M}([\sigma(P)]) = \mathrm{index}^G(P)$. On dit que $\mathrm{index}_a^{G,M}([\sigma])$ est l'indice analytique de $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$.

L'application $\mathrm{index}_a^{G,M} : K_G(T^*_G M) \to C^{-\infty}(G)^G$ est un homomorphisme de $R(G)$-modules.

Soit H un groupe opérant sur M et commutant à l'action de G, alors l'espace $T^*_G M$ est un $G \times H$-espace topologique. Si $[\sigma] \in K_{G\times H}(T^*_G M)$ on peut associer à $[\sigma]$ une représentation virtuelle à trace de $G \times H$. En effet on peut choisir comme représentant de $[\sigma]$ le symbole d'un opérateur P qui est G-transversalement elliptique et qui commute à l'action de H. Alors $\mathrm{Ker}(P) - \mathrm{Ker}(P^*)$ est une représentation virtuelle à trace de $G \times H$. On note $\mathrm{index}^{G\times H}(P) \in C^{-\infty}(G \times H)^{G\times H}$ la trace de cette représentation. On définit $\mathrm{index}_a^{G,H,M}([\sigma]) = \mathrm{index}^{G\times H}(P)$. On définit ainsi un homomorphisme de $R(G \times H)$-module
$$\mathrm{index}_a^{G,H,M} : K_{G\times H}(T^*_G M) \to C^{-\infty}(G \times H)^{G\times H}\,.$$

Il est facile de voir ([1], remarque p. 17) qu'en fait $\mathrm{index}_a^{G,H,M} \in C^\infty(H, C^{-\infty}(G))$. Donc le front d'onde de la fonction généralisée $\mathrm{index}_a^{G,H,M}([\sigma])$ sur $G\times H$ est contenu dans $T^*_H(G\times H) = (G\times H)\times(\mathfrak{g}^* \times \{0\})$. Ainsi, elle se restreint à G et
$$\mathrm{index}_a^{G,H,M}([\sigma])|_G = \mathrm{index}_a^{G,M}([\sigma])\,. \tag{8}$$

D'autre part, considérons l'injection $r : T^*_{G\times H}M \to T^*_G M$. Par restriction à $T^*_{G\times H}M$ d'un symbole G-transversalement elliptique et H-équivariant, on obtient un symbole $G\times H$-transversalement elliptique.

Pour $[\sigma]\in K_{G\times H}(T^*_G M)$, on a donc

$$\mathrm{index}_a^{G,H,M}([\sigma]) = \mathrm{index}_a^{G\times H,M}(r^*[\sigma])\,. \tag{9}$$

2.3 *Axiomes de l'indice*

Nous suivrons dans notre démonstration un plan analogue à celui d'Atiyah–Singer I [3]. Nous introduisons donc un système d'axiomes pour les fonctions indices.

Nous supposons donné pour tous groupes de Lie compacts G et H et toute $G\times H$-variété compacte M un $R(G\times H)$-homomorphisme

$$i^{G,H,M} : K_{G\times H}(T^*_G M) \to C^{-\infty}(G\times H)^{G\times H}\,.$$

On suppose que, pour tout $[\sigma]\in K_{G\times H}(T^*_G M)$, le front d'onde de la fonction généralisée $i^{G,H,M}([\sigma])$ est contenu dans $T^*_H(G\times H)$.

On suppose d'autre part que l'application $i^{G,H,M}$ est invariante par difféomorphisme: Si $f : M_1\to M_2$ est un $G\times H$-difféomorphisme, alors l'application composée

$$K_{G\times H}(T^*_G M_2) \xrightarrow{f^*} K_{G\times H}(T^*_G M_1) \xrightarrow{i^{G,H,M_1}} C^{-\infty}(G\times H)^{G\times H}$$

est égale à i^{G,H,M_2}.

On suppose enfin que la famille d'homomorphismes $i^{G,H,M}$ est fonctorielle par rapport aux homomorphismes de groupes $H'\to H$ au sens suivant: d'après la condition de front d'onde, si $[\sigma]\in K_{G\times H}(T^*_G M)$, la fonction généralisée $i^{G,H,M}([\sigma])$ se restreint à $G\times H'$ et

$$i^{G,H,M}([\sigma])|_{G\times H'} = i^{G,H',M}([\sigma])\,. \tag{10}$$

Il est clair que l'indice analytique est invariant par difféomorphismes et fonctoriel par rapport aux homomorphismes de groupe.

Pour $H=\{e\}$, on note $i^{G,M}$ au lieu de $i^{G,H,M}$. Considérons l'injection $r : T^*_{G\times H}M \to T^*_G M$. Par restriction, on obtient une application

$$r^* : K_{G\times H}(T^*_G M) \to K_{G\times H}(T^*_{G\times H}M)\,.$$

On suppose que

$$i^{G,H,M} = i^{G\times H,M} r^*\,. \tag{11}$$

Autrement dit, l'application $i^{G,H,M}$ est entièrement déterminée par $i^{G\times H,M}$. Cependant, pour formuler certains des axiomes qui suivent, on a besoin de savoir que, pour des symboles $[\sigma]$ ayant des propriétés d'ellipticité plus fortes, la fonction généralisée $i^{G,H,M}([\sigma])$ est C^∞ dans certaines directions. Par exemple, si $G=\{e\}$, les symboles $\sigma\in K_{G\times H}(T^*_G M) = K_H(T^*M)$ sont des symboles elliptiques et H-équivariants et on impose que $i^{\{e\},H,M}([\sigma])$ est C^∞. On dira d'une telle famille de données $i = (i^{G,H,M})$, invariante par difféomorphismes, fonctorielle en H et vérifiant (11), que i est une fonction indice. Enonçons quelques propriétés fonctorielles souhaitées pour une telle donnée.

2.3.1 Excision

Soit U une variété localement compacte sur laquelle le groupe de Lie compact G opère. Soit $j^M : U \to M$ un G-homéomorphisme de U sur un ouvert d'une G-variété compacte M. D'après le lemme 4, on peut construire une application $j^M_* : K_G(T^*_G U) \to K_G(T^*_G M)$ et une application composée:

$$K_G(T^*_G U) \xrightarrow{j^M_*} K_G(T^*_G M) \xrightarrow{i^{G,M}} C^{-\infty}(G)^G \;.$$

Définition 7 *On dit que la fonction indice $i = (i^{G,M})$ satisfait l'axiome d'excision si la condition suivante est satisfaite. Soit U une G-variété localement compacte. Soit j^{M_i} (pour $i = 1,2$) un G-homéomorphisme de U sur un ouvert d'une G-variété compacte M_i. Soit $j^{M_i}_* : K_G(T^*_G U) \to K_G(T^*_G M_i)$ l'application déduite de j^{M_i} en K-théorie. Alors on a l'égalité*

$$i^{G,M_1} j^{M_1}_* = i^{G,M_2} j^{M_2}_* \;.$$

Définition 8 *Si U est une G-variété localement compacte qui admet un plongement G-équivariant j^M comme ouvert d'une G-variété compacte M et si $i = (i^{G,M})$ est une fonction indice vérifiant l'axiome d'excision, on définit pour $[\sigma] \in K_G(T^*_G U)$*

$$i^{G,U}([\sigma]) = i^{G,M}(j^M_*[\sigma]) \;.$$

Remarque 9 L'axiome d'excision permet en particulier de définir $i^{G,V}$: $K_G(T^*_G V) \to C^{-\infty}(G)^G$ lorsque V est un espace vectoriel muni d'une représentation linéaire de G.

2.3.2 Produit externe

Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie compacts. Soit M_1 une variété compacte munie d'une action de $G_1 \times G_2$. L'espace $T^*_{G_1} M_1$ est alors muni d'une action de $G_1 \times G_2$. Soit M_2 une variété compacte munie d'une action de G_2.

On note $f^{G_i,M_1} : T^*M_1 \to \mathfrak{g}_i^*$ l'application moment relative à l'action de G_i dans T^*M_1 et $f^{G_2,M_2} : T^*M_2 \to \mathfrak{g}_2^*$ l'application moment relative à l'action de G_2 dans T^*M_2. L'application moment totale $f_{\text{tot}} : T^*M_1 \times T^*M_2 \to \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$ pour l'action de $G_1 \times G_2$ sur $M_1 \times M_2$ est donnée pour $(x_i, \xi_i) \in T^*M_i$ par

$$f_{\text{tot}}((x_1,\xi_1),(x_2,\xi_2)) = f^{G_1,M_1}(x_1,\xi_1) \oplus (f^{G_2,M_1}(x_1,\xi_1) + f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)) \;.$$

Remarquons que, pour tout $(x_1,x_2) \in M_1 \times M_2$, la suite d'applications linéaires

$$0 \to (T^*_{G_2} M_2)_{x_2} \to (T^*_{G_1 \times G_2}(M_1 \times M_2))_{(x_1,x_2)} \to (T^*_{G_1} M_1)_{x_1} \qquad (12)$$

(où la première application est induite par l'injection $(x_2, \xi_2) \mapsto ((0,0),(x_2,\xi_2))$ et la deuxième application est l'application $((x_1,\xi_1),(x_2,\xi_2)) \mapsto (x_1,\xi_1)$) est une suite exacte.

Soient $\mathscr{E}_1^{\pm}$ deux fibrés $G_1 \times G_2$-équivariants sur M_1 et soient $\mathscr{E}_2^{\pm}$ deux fibrés G_2-équivariants sur M_2. Soit $\sigma_1 : p_1^*\mathscr{E}_1^+ \to p_1^*\mathscr{E}_1^-$ un morphisme de fibrés $G_1 \times G_2$-équivariants sur T^*M_1. On suppose que σ_1 est G_1-transversalement elliptique. Soit $\sigma_2 : p_2^*\mathscr{E}_2^+ \to p_2^*\mathscr{E}_2^-$ un morphisme de fibrés G_2-équivariants sur T^*M_2. On voit alors grâce à (12) que le produit externe de symboles $\sigma_1 \odot \sigma_2$ est un symbole $G_1 \times G_2$-transversalement elliptique pour l'action de $G_1 \times G_2$ sur $M_1 \times M_2$. Ceci définit une application

$$K_{G_1\times G_2}(T^*_{G_1}M_1) \otimes K_{G_2}(T^*_{G_2}M_2) \to K_{G_1\times G_2}(T^*_{G_1\times G_2}(M_1 \times M_2))\ .$$

Comme le front d'onde de $i^{G_1\times G_2, M_1}([\sigma_1])$ est contenu dans $T^*_{G_2}(G_1 \times G_2)$, le produit $i^{G_1\times G_2,M_1}([\sigma_1])(g_1,g_2)i^{G_2,M_2}([\sigma_2])(g_2)$ est bien défini comme fonction généralisée.

Définition 10 *On dira que la fonction indice $i = (i^{G,H,M})$ vérifie l'axiome de produit externe si, pour toute $G_1 \times G_2$-variété M_1, toute G_2-variété M_2, tout $[\sigma_1] \in K_{G_1\times G_2}(T^*_{G_1}M_1)$ et tout $[\sigma_2] \in K_{G_2}(T^*_{G_2}M_2)$,*

$$i^{G_1\times G_2, M_1\times M_2}([\sigma_1] \odot [\sigma_2])(g_1, g_2) = i^{G_1\times G_2, M_1}([\sigma_1])(g_1,g_2)i^{G_2,M_2}([\sigma_2])(g_2)\ .$$

2.3.3 Action libre

Soient H et G deux groupes de Lie compacts. Soit P une variété compacte munie d'une action de $G \times H$. On écrira l'action de G à gauche et l'action de H à droite. On suppose que H agit librement sur P. L'espace $M = P/H$ des H-orbites est donc muni d'une action de G. On note $q : P \to M$ l'application quotient. Remarquons que $T^*_H P$ s'identifie naturellement à q^*T^*M. On a donc

$$(T^*_H P)/H \sim T^*M\ .$$

Plus généralement

$$(T^*_{G\times H}P)/H \sim T^*_G M\ .$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme

$$q^* : K_G(T^*_G M) \to K_{G\times H}(T^*_{G\times H}P)\ .$$

Soit $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$. Soit $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ un symbole G-transversalement elliptique représentant $[\sigma]$. Soit $\tau \in R(H)$ une représentation de H dans un espace vectoriel complexe de dimension finie V_τ. Soit $\mathscr{V}_\tau = P \times_H V_\tau$ le fibré G-équivariant sur M correspondant. On pose

$$\sigma_\tau = \sigma \otimes I_{\mathscr{V}_\tau} : p^*(\mathscr{E}^+ \otimes \mathscr{V}_\tau) \to p^*(\mathscr{E}^- \otimes \mathscr{V}_\tau)\ .$$

C'est encore un symbole G-transversalement elliptique relativement à l'action de G sur M. L'indice $i^{G,M}([\sigma_\tau])$ est une fonction généralisée sur G. L'indice $i^{G\times H,P}(q^*([\sigma])$ est une fonction généralisée sur $G\times H$.

Soit $\hat{H}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de dimension finie de H. Si $\tau\in\hat{H}$, on note τ^* la représentation duale.

Définition 11 *On dira que la fonction indice $i=i^{G,M}$ vérifie l'axiome d'action libre si, pour toute variété compacte P munie d'une action de G à gauche et d'une action libre de H à droite commutant à G et pour tout élément $[\sigma]\in K_G(T_G^*(P/H))$, on a l'égalité de fonctions généralisées: pour $g\in G$ et $h\in H$*

$$i^{G\times H,P}(q^*[\sigma])(g,h)=\sum_{\tau\in\hat{H}}\operatorname{Tr}\tau(h)(i^{G,M}([\sigma_{\tau^*}])(g))\,.$$

La série dans le membre de droite est convergente dans l'espace des fonctions généralisées sur $G\times H$, car le terme $i^{G,M}([\sigma_{\tau^*}])(g)$ est le coefficient de Fourier du caractère de la représentation τ de H dans la fonction généralisée $i^{G\times H,P}(q^*[\sigma])(g,h)$.

2.4 Un théorème d'unicité

Rappelons quelques propriétés fonctorielles de l'indice analytique démontrées par Atiyah [1].

Théorème 12 [1] *La famille* $\mathrm{index}_a^{G,H,M}$ *d'indices analytiques est une fonction indice vérifiant les axiomes d'excision, de produit externe et d'action libre.*

Plus précisément la propriété d'excision est le théorème 3.7 de [1]. La propriété de produit externe est le théorème 3.5 de [1]. La propriété de l'indice analytique vis-à-vis des actions libres est le théorème 3.1 de [1].

Rappelons l'indice analytique de quelques symboles particuliers.

Soit V un espace vectoriel muni d'une représentation linéaire de G. Comme la famille d'indices analytiques $\mathrm{index}_a^{G,M}$ vérifie l'axiome d'excision, on peut définir $\mathrm{index}_a^{G,V}([\sigma])$ pour $[\sigma]\in K_G(T_G^*(V))$ d'après la remarque 9.

Considérons $V=\mathbb{R}$ et le symbole de Bott $[b]$ (défini en 2.1.1). Ici le groupe $G=\{e\}$ est trivial. L'indice analytique de b est donc un entier relatif.

Proposition 13 (*page* 525, [3]) $\mathrm{index}_a^{\{e\},\mathbb{R}}([b])=1$

Soit $V=\mathbb{C}$. Soit $G=S^1$. L'indice analytique du symbole d'Atiyah $[m]$ défini en 2.1.2 est calculé par la Proposition 6.2 de [1].

Théorème 14 *On a*

$$\mathrm{index}_a^{S^1,\mathbb{C}}([m])(e^{i\theta})=-\sum_{k=1}^{\infty}e^{ik\theta}\,.$$

Ce théorème découle de la description de $K_G(T_G^*\mathbb{C})$ donnée dans le chapitre 5 de [1]. Nous en donnerons une démonstration directe dans l'appendice 2.

Dans [1], Atiyah donne un algorithme pour calculer l'indice analytique d'un élément de $K_G(T_G^*M)$. Il résulte de l'algorithme donné par Atiyah que l'on a le théorème suivant.

Théorème 15 [1] *Soit* $i = (i^{G,H,M})$ *une fonction indice qui vérifie les axiomes d'excision, de produit externe et d'action libre. Supposons de plus que, si* b *est le symbole de Bott défini en* 2.1.1,

$$i^{\{e\},\mathbb{R}}([b]) = 1$$

et que, si m *est le symbole d'Atiyah défini dans* 2.1.2,

$$i^{S^1,\mathbb{C}}([m])(e^{i\theta}) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}.$$

Alors la fonction indice $i^{G,H,M}$ *coincide avec l'indice analytique* $\mathrm{index}_a^{G,H,M}$.

Dans ce théorème, les éléments $i^{\{e\},\mathbb{R}}([b])$ et $i^{S^1,\mathbb{C}}([m])$ sont définis par la définition 8.

3 Propriétés fonctorielles de l'indice cohomologique

Nous démontrons maintenant des propriétés fonctorielles de l'indice cohomologique $\mathrm{index}_c^{G,H,M}$ défini dans [11].

3.1 Enoncé de la formule de l'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques

Rappelons tout d'abord brièvement la définition de $\mathrm{index}_c^{G,M}([\sigma])$ pour $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$ lorsque M est une variété compacte munie d'une action d'un groupe de Lie compact G. L'indice cohomologique est défini à l'aide de la cohomologie équivariante de la variété T^*M.

Soit $\mathscr{V}$ une variété différentiable. Une forme différentielle G-équivariante sur $\mathscr{V}$ est une application G-équivariante $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathscr{A}(\mathscr{V})$ définie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, à valeurs dans l'espace $\mathscr{A}(\mathscr{V})$ des formes différentielles sur $\mathscr{V}$. On note $\mathscr{A}_G^{\infty}(\mathfrak{g},\mathscr{V}) = C^{\infty}(\mathfrak{g},\mathscr{A}(\mathscr{V}))^G$ l'espace des formes différentielles G-équivariantes. Ici X désigne soit un point de $\mathfrak{g}$, soit la fonction $X \mapsto X$. On notera donc parfois une application $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathscr{F}$ de $\mathfrak{g}$ dans un espace $\mathscr{F}$ par la notation $\alpha(X)$. On considèrera aussi des formes différentielles $\alpha(X)$ qui sont définies seulement pour X appartenant à un ouvert G-invariant $W \subset \mathfrak{g}$. On note $\mathscr{A}_G^{\infty}(W,\mathscr{V}) = C^{\infty}(W,\mathscr{A}(\mathscr{V}))^G$ l'ensemble de ces formes. La différentielle G-équivariante $d_{\mathfrak{g}} : \mathscr{A}_G^{\infty}(W,\mathscr{V}) \to A_G^{\infty}(W,\mathscr{V})$ est définie, pour $\alpha \in \mathscr{A}_G^{\infty}(W,\mathscr{V})$ et $X \in W$, par

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d(\alpha(X)) - \imath(X_{\mathscr{V}})(\alpha(X))\,,$$

où $\imath(X_{\mathscr{V}})$ est la contraction par le champ de vecteurs $X_{\mathscr{V}}$. On note aussi d_X l'opérateur $d - \imath(X_{\mathscr{V}})$ agissant sur les formes différentielles. Une forme G-équivariante fermée est une forme G-équivariante α telle que $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$.

Si $\mathcal{V}$ est une variété compacte orientée, l'intégrale $\int_{\mathcal{V}} \alpha(X)$ définit une fonction C^{∞} et G-invariante sur $\mathfrak{g}$ (par définition, l'intégrale d'une forme différentielle inhomogène sur une variété de dimension k est l'intégrale de son terme extérieur de degré k). Si $\mathcal{V}$ est non compacte, on peut parfois définir $\int_{\mathcal{V}} \alpha(X)$ comme une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$: si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{g}$, on considère la forme différentielle $\int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\phi(X)dX$ sur $\mathcal{V}$. Si elle est intégrable sur $\mathcal{V}$, on posera

$$\int_{\mathfrak{g}} \left(\int_{\mathcal{V}} \alpha \right)(X)\phi(X)dX = \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\phi(X)dX \right) .$$

On dira que $\int_{\mathcal{V}} \alpha(X)$ est l'intégrale de α au sens généralisé.

Si $s \in G$, on note $G(s)$ le centralisateur de $s \in G$ et $\mathcal{V}(s)$ la sous-variété de $\mathcal{V}$ fixée par s. On note $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$.

Un bouquet de formes différentielles équivariantes sur $\mathcal{V}$ est une famille $(\alpha_s)_{s\in G}$ indexée par les éléments s de G telle que, pour $s \in G$, la forme α_s est une forme différentielle $G(s)$-équivariante fermée sur $\mathcal{V}(s)$ satisfaisant des conditions d'invariance et de compatibilité définies dans [13], [12] (voir aussi [16]). Rappelons la définition du bouquet $\mathrm{bch}(\mathcal{E}, \mathbb{A})$ de caractères de Chern d'un superfibré G-équivariant $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^- \to \mathcal{V}$ muni d'une superconnexion G-invariante $\mathbb{A}$. Soit $s \in G$. On note $s^{\mathcal{E}}$ l'action de s sur $\mathcal{E}$. Si $x \in \mathcal{V}(s)$, l'action de $s^{\mathcal{E}}$ préserve la fibre $\mathcal{E}_x$ de $\mathcal{E}$. Soit $F^{\mathbb{A}}(X)$ la courbure équivariante de la superconnexion $\mathbb{A}$ (voir chapitre 7, [6]). Par définition, $\mathrm{bch}(\mathcal{E}, \mathbb{A}) = (\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \mathbb{A}))_{s\in G}$, où $\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \mathbb{A})$ est la forme $G(s)$-équivariante sur $\mathcal{V}(s)$ définie, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, par

$$\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \mathbb{A})(X) = \mathrm{Str}(s^{\mathcal{E}} e^{F^{\mathbb{A}}(X)|_{\mathcal{V}(s)}}) . \tag{13}$$

Soit M une G-variété compacte. Soit $\sigma : p^*\mathcal{E}^+ \to p^*\mathcal{E}^-$ un symbole G-transversalement elliptique sur M. On introduit une métrique G-invariante g^M sur T^*M. On note (x, ξ) un point de T^*M. On note $\|\xi\|_x$ ou seulement $\|\xi\|$ la norme de l'élément (x, ξ) pour la métrique g^M. On introduit des structures hermitiennes G-invariantes $h^{\mathcal{E}^{\pm}}$ sur $\mathcal{E}^{\pm}$. On associe à σ l'endomorphisme impair du superfibré $p^*\mathcal{E} = p^*\mathcal{E}^+ \oplus p^*\mathcal{E}^-$

$$v(\sigma)(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(x, \xi)^* \\ \sigma(x, \xi) & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

L'opérateur

$$v(\sigma)(x, \xi)^2 = \begin{pmatrix} \sigma(x, \xi)^*\sigma(x, \xi) & 0 \\ 0 & \sigma(x, \xi)\sigma(x, \xi)^* \end{pmatrix}$$

est un opérateur hermitien semi-défini positif et est strictement positif si $(x, \xi) \in T^*_G M$ et $\|\xi\|$ assez grand. Le fermé $T^*_G M$ de la variété T^*M est défini par l'équation $f = 0$, où $f : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ est l'application moment. La restriction de f à chaque fibre est linéaire en ξ.

On introduit la notion de symbole G-transversalement bon sur la variété T^*M.

Définition 16 *Soit M une G-variété compacte. On dit qu'un symbole G-transversalement elliptique $\sigma : p^*\mathcal{E}^+ \to p^*\mathcal{E}^-$ est G-transversalement bon si*

(1) *Le symbole $\sigma(x,\xi)$ ainsi que toutes ses dérivées $\partial_x^k \partial_\xi^l$ sont à croissance au plus polynomiales en ξ.*

(2) *Il existe $r > 0, c > 0$ et $a > 0$ tels que*

$$v(\sigma)^2(x,\xi) \geqq c\|\xi\|^2 I_{\mathcal{E}_x}$$

pour tout $(x,\xi) \in T^*M$ tels que $\|f(x,\xi)\| \leqq a\|\xi\|$ et $\|\xi\| \geqq r$.

L'inégalité $v(\sigma)^2(x,\xi) \geqq c\|\xi\|^2 I_{\mathcal{E}_x}$ est une inégalité d'opérateurs hermitiens.

La définition de symbole G-transversalement bon est indépendante du choix de la métrique g^M sur T^*M.

Remarque 17 Il est clair que, si $\sigma(x,\xi)$ est un symbole G-transversalement elliptique et presque homogène d'ordre 1 en ξ, alors σ est G-transversalement bon. Comme nous l'avons signalé dans la remarque 2, tout élément de $K_G(T_G^*M)$ peut être représenté par un symbole presque homogène d'ordre 1. Toutefois la classe des symboles presque homogènes d'ordre 1 n'est pas stable par produit externe. Nous demandons aux symboles transversalement bons de satisfaire à une condition de croissance moins forte que la condition d'homogénéité d'ordre 1, mais suffisante pour définir l'indice cohomologique. Nous montrerons à la proposition 23 que le produit externe $\odot$ de symboles G-transversalement bons est encore G-transversalement bon.

Définition 18 *Si $v(\sigma)^2(x,\xi)$ vérifie l'inégalité* (2) *de la définition* 16 *ci-dessus pour tout $(x,\xi) \in T^*M$ tel que $\|\xi\| \geqq r$, on dira que σ est un bon symbole elliptique G-équivariant.*

Soit ω^M la 1-forme canonique de T^*M. Alors, si V est un vecteur tangent au point (x,ξ) de T^*M,

$$(\omega^M_{(x,\xi)}, V) = (\xi, p_* V)\ .$$

Par définition, la forme symplectique de T^*M est la 2-forme fermée $\Omega^M = -d\omega^M$. L'orientation de T^*M est l'orientation déterminée par cette structure symplectique.

Choisissons des connexions G-invariantes $\nabla^{\mathcal{E}^\pm}$ sur les fibrés $\mathcal{E}^\pm$. On associe à un symbole σ la superconnexion sur le superfibré $p^*\mathcal{E} = p^*\mathcal{E}^+ \oplus p^*\mathcal{E}^-$:

$$\mathbb{A}(\sigma) = iv(\sigma) + p^*\nabla\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\mathbb{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} p^*\nabla^{\mathcal{E}^+} & i\sigma^* \\ i\sigma & p^*\nabla^{\mathcal{E}^-} \end{pmatrix} \tag{15}$$

et la superconnexion

$$\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma) = iv(\sigma) + p^*\nabla - i\omega^M I_{p^*\mathscr{E}} \tag{16}$$

qui s'écrit aussi

$$\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma) = \begin{pmatrix} p^*\nabla^{\mathscr{E}^+} - i\omega^M & i\sigma^* \\ i\sigma & p^*\nabla^{\mathscr{E}^-} - i\omega^M \end{pmatrix} . \tag{17}$$

On construit alors les bouquets de caractères de Chern du superfibré $p^*\mathscr{E}$ muni des superconnexions $\mathbb{A}(\sigma)$ et $\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma)$. Dans la suite on notera simplement $\mathrm{bch}(p^*\mathscr{E}, \mathbb{A}(\sigma)) = \mathrm{bch}(\mathbb{A}(\sigma))$ et $\mathrm{bch}(p^*\mathscr{E}, \mathbb{A}^{\omega^M})(\sigma) = \mathrm{bch}(\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma))$. On a la relation

$$\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma))(Y) = e^{-id_Y\omega^M|_{T^*M(s)}}\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(s)$.

On note $\mathscr{N}(M, M(s))$ le fibré normal à $M(s)$ dans M. Soit ∇^M une connexion G-invariante sur TM. Alors ∇^M détermine des connexions $G(s)$-invariantes ∇_0 sur $TM(s)$ et ∇_1 sur $\mathscr{N}(M, M(s))$. Soit $R_0(X), R_1(X)$ les courbures équivariantes de ∇_0 et ∇_1. On définit la forme $G(s)$-équivariante $J(M(s), \nabla^M)$ sur $M(s)$ par

$$J(M(s), \nabla^M)(X) = \det\left(\frac{e^{R_0(X)/2} - e^{-R_0(X)/2}}{R_0(X)}\right) \tag{18}$$

pour $X \in \mathfrak{g}(s)$. Pour X dans un petit voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, $J(M(s), \nabla^M)(X)$ est inversible. Si ∇^M est fixée, on écrira $J(M(s), \nabla^M)$ simplement $J(M(s))$.

Notons encore s la transformation de $\mathscr{N}(M, M(s))$ déterminée par s. Alors, en tout point $x \in M(s)$, la transformation s est une transformation de $(\mathscr{N}(M, M(s)))_x$ qui n'a pas de vecteurs fixes autres que 0. On définit, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$:

$$D_s(\mathscr{N}(M, M(s)), \nabla^M)(X) = \det(1 - se^{R_1(X)}) . \tag{19}$$

Lorsque ∇^M est fixée, on écrit la forme équivariante $D_s(\mathscr{N}(M, M(s)), \nabla^M)$ simplement $D_s(\mathscr{N}(M, M(s)))$.

La forme différentielle $\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)D_s(\mathscr{N}(M, M(s))(Y))^{-1}\, J(M(s))(Y)^{-1}$ est une forme $G(s)$-équivariante fermée sur $T^*M(s)$.

Théorème 19 (*Section* 5.2 [11]) *Soit σ un symbole G-transversalement bon. Il existe une fonction généralisée G-invariante sur G et une seule, notée* $\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma)$, *vérifiant la formule intégrale* (*au sens généralisé*) *suivante. Soit $s \in G$. Pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)$ suffisament petit*,

$$\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma)(se^Y) = \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} \frac{e^{-id_Y\omega^M}\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)}{D_s(\mathscr{N}(M, M(s)))(Y)J(M(s))(Y)} . \tag{20}$$

La fonction $\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma)$ *ne dépend que de la classe de σ dans $K_G(T^*_GM)$.*

Explicitons le sens de ce théorème. Si $U_s(0)$ est un voisinage suffisamment petit de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, la sous-variété $s \exp U_s(0)$ est transverse aux G-orbites et la fonction généralisée G-invariante $\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma)$ se restreint à $s \exp U_s(0)$. Ceci donne un sens au membre de gauche de la formule. D'autre part, il est prouvé dans [11] que le membre de droite peut s'intégrer au sens généralisé contre une fonction test $\phi(Y)$ sur $U_s(0)$.

Comme tout élément $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$ admet un représentant par un symbole G-transversalement bon σ, on peut ainsi définir l'application

$$\mathrm{index}_c^{G,M} : K_G(T^*_G M) \to C^{-\infty}(G)^G$$

en posant $\mathrm{index}_c^{G,M}([\sigma]) = \mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_1)$, pour un symbole G-transversalement bon σ_1 représentant $[\sigma]$. On dit que la fonction généralisée $\mathrm{index}_c^{G,M}([\sigma])$ est l'indice cohomologique de $[\sigma]$.

Soit V un espace vectoriel complexe muni d'une représentation τ de G. On note encore τ l'élément correspondant de $R(G)$. Notons $[V]$ le fibré trivial $M \times V$ muni de l'action diagonale de G. Si $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ est un morphisme G-transversalement bon, alors $\sigma \otimes I_V : p^*(\mathscr{E}^+ \otimes [V]) \to p^*(\mathscr{E}^- \otimes [V])$ est un morphisme G-transversalement bon représentant $\tau \odot [\sigma]$. On le note σ_τ. On voit immédiatement que $\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma_\tau))(Y) = \mathrm{Tr}\, \tau(s \exp Y)\, \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)$. Donc on a, pour tout $s \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit,

$$\mathrm{index}_c^{G,M}(\tau \odot [\sigma])(s \exp Y) = \mathrm{Tr}\, \tau(s \exp Y)\, \mathrm{index}_c^{G,M}([\sigma])(s \exp Y)\ .$$

On a donc l'égalité de fonctions généralisées sur G:

$$\mathrm{index}_c^{G,M}(\tau \odot [\sigma])(g) = \mathrm{Tr}\, \tau(g)(\mathrm{index}_c^{G,M}([\sigma])(g))\ .$$

Autrement dit $\mathrm{index}_c^{G,M}$ est un $R(G)$-homomorphisme.

Reprenons les notations de la section 2.3. Soit H un groupe de Lie compact commutant à l'action de G. Soit $[\sigma] \in K_{G\times H}(T^*_G M)$. On peut choisir des fibrés $G \times H$-équivariants sur M et un représentant $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ de $[\sigma]$ qui soit un morphisme de fibrés $G \times H$-équivariants sur T^*M et qui soit G-transversalement bon. Comme σ est G-transversalement bon, il est a fortiori $G \times H$-transversalement bon. On pose

$$\mathrm{index}_c^{G,H,M}([\sigma]) = \mathrm{index}_c^{G\times H,M}(r^*[\sigma])\ .$$

Il est facile de voir (remarque 39, section 5.3 de [11]) que le front d'onde de $\mathrm{index}_c^{G,H,M}([\sigma])$ est contenu dans $T^*_H(G \times H)$.

L'invariance par G-difféomorphismes de la fonction $\mathrm{index}_c^{G,H,M}$ est évidente. Par conséquent la famille de $R(G \times H)$-homomorphismes $i = (\mathrm{index}_c^{G,H,M})$ est une fonction indice au sens de la section 2.3.

Le but de cet article est de démontrer l'égalité de l'indice cohomologique et de l'indice analytique.

Théorème 20 *Pour toute G-variété compacte M, on a l'égalité*:

$$\mathrm{index}_a^{G,M} = \mathrm{index}_c^{G,M}\ .$$

Soit P un opérateur pseudo-différentiel G-transversalement elliptique. Soit σ un symbole G-transversalement bon représentant $[\sigma(P)]$. Soit $s \in G$. Le théorème 20 signifie que l'indice de P est donné au voisinage de $s \in G$ par la formule suivante (égalité de fonctions généralisées): si Y varie dans un voisinage suffisamment petit de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, alors:

$$\operatorname{index}^G(P)(s \exp Y) = \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} \frac{e^{-id_Y\omega^M} \operatorname{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)}{D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(Y) J(M(s))(Y)} . \tag{21}$$

Concrètement, il faut trouver un représentant σ de la classe de K-théorie $[\sigma(P)]$ qui soit un symbole G-transversalement bon. Si P est un opérateur différentiel (d'ordre au moins 1), alors $\sigma(P)(x, \xi)$ est une fonction C^∞ sur T^*M et, $\sigma(P)(x, \xi)$ étant homogène d'ordre $m \geqq 1$, il suffit de choisir $\sigma = \sigma(P)$. Si P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m, le symbole $\sigma(P)$ de P est défini en dehors de la section nulle. Il est défini en particulier pour $\|\xi\| = 1$. On choisit une fonction $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit C^∞, telle que $\vartheta(t) = 0$ pour $t \leqq \frac{1}{2}$ et $\vartheta(t) = 1$ pour $t \geqq 1$. On définit (par exemple) $\sigma(x, \xi) = \vartheta(\|\xi\|)\|\xi\|\sigma(P)(x, \xi/\|\xi\|)$.

Si σ est un bon symbole elliptique, pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)$, la forme différentielle $\operatorname{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)$ est rapidement décroissante sur $T^*M(s)$ (ceci est démontré dans [10], [11]) et l'intégrale (20) est convergente en chaque point Y (et non pas seulement en moyenne). De plus comme $e^{-id_Y\omega^M}$ est congru à 1 en cohomologie, on peut supprimer ce terme dans la formule (20). On a donc, pour σ un bon symbole elliptique G-équivariant:

$$\operatorname{index}_c^{G,M}([\sigma])(se^Y) = \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} \frac{\operatorname{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)}{D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(Y) J(M(s))(Y)} . \tag{22}$$

Si σ est le symbole de l'opérateur de Dirac, cette égalité est la formule de l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac donnée dans [8].

Si P est un opérateur *elliptique*, on peut choisir un représentant de $[\sigma(P)]$ qui soit un bon symbole elliptique. L'égalité ci-dessus pour $\operatorname{index}^G(P)(s \exp Y)$ se déduit facilement de la formule d'Atiyah–Segal–Singer, modulo la formule de localisation [7].

Introduisons quelques notations supplémentaires. On note $h^{\mathcal{E}} = h^{\mathcal{E}^+} \oplus h^{\mathcal{E}^-}$ et $\nabla^{\mathcal{E}} = \nabla^{\mathcal{E}^+} \oplus \nabla^{\mathcal{E}^-}$. On note $I(s, \sigma, \nabla^{\mathcal{E}}, h^{\mathcal{E}}, \nabla^M)$ la forme $G(s)$-équivariante fermée sur $T^*M(s)$ définie, pour Y dans un voisinage $U_s(0)$ de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, par

$$I(s, \sigma, \nabla^{\mathcal{E}}, h^{\mathcal{E}}, \nabla^M)(Y) = \frac{\operatorname{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)}{D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(Y) J(M(s))(Y)} .$$

Si $\nabla^{\mathcal{E}}, h^{\mathcal{E}}, \nabla^M$ sont fixées, on note $I(s, \sigma, \nabla^{\mathcal{E}}, h^{\mathcal{E}}, \nabla^M)(Y)$ simplement par $I(s, \sigma)(Y)$. On notera aussi

$$I^{\omega^M}(s, \sigma)(Y) = e^{-id_Y\omega^M|_{T^*M(s)}} I(s, \sigma)(Y)$$

pour $Y \in U_s(0)$.

On a donc la formule, pour Y variant dans un voisinage $U_s(0)$ de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$,

$$\operatorname{index}_c^{G,M}([\sigma])(se^Y) = \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} e^{-id_Y\omega^M} I(s,\sigma)(Y) \tag{23}$$

ou, en explicitant $e^{-id_Y\omega^M}$ en fonction de l'application moment $f : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ et de la 2-forme symplectique $\Omega^M = -d\omega^M$ de M,

$$\operatorname{index}_c^{G,M}([\sigma])(se^Y) = \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} e^{i\langle Y, f(x,\xi)\rangle} e^{i\Omega^M} I(s,\sigma)(Y)$$

pour $Y \in U_s(0)$.

Faisons une remarque évidente sur la fonction $\operatorname{index}_c^{G,M}(\sigma)$. Soit $\mathscr{L}$ un fibré hermitien G-équivariant sur M. Soit $\mathscr{E}^- = \mathscr{E}^+ = \mathscr{L}$. Soit $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ un morphisme G-transversalement bon de fibrés équivariants et tel que $\sigma = \sigma^*$. On sait que la classe définie par σ dans $K_G(\mathscr{V})$ est nulle. On voit facilement que l'intégrand dans la formule de l'indice cohomologique de σ est nul. En effet choisissons une connexion G-équivariante $\nabla^{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{L}$ et choisissons $\nabla^+ = \nabla^- = \nabla^{\mathscr{L}}$. On considère la superconnexion $\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma)$ associée à σ. Elle est de la forme suivante:

$$\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma) = \begin{pmatrix} p^*\nabla^{\mathscr{L}} - i\omega^M & i\sigma \\ i\sigma & p^*\nabla^{\mathscr{L}} - i\omega^M \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas la courbure équivariante $F^{\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma)}(X)$ appartient à la sous algèbre de $\operatorname{End}(\mathscr{L} \oplus \mathscr{L})$ (à coefficients formes sur T^*M) constituées d'éléments

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Sur cette sous-algèbre, la supertrace s'annule. Par conséquent, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la forme différentielle $\operatorname{ch}(\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma))(X)$ est identiquement nullle. Pour la même raison, les formes différentielles $\operatorname{ch}_s(\mathbb{A}^{\omega^M}(\sigma))(Y)$ sont identiquement nulles sur $T^*M(s)$.

3.2 Excision

Montrons que l'indice cohomologique satisfait à l'axiome d'excision.

Proposition 21 *Soit U une G-variété localement compacte. Soit j^{M_i} (pour $i = 1, 2$) un G-homéomorphisme de U sur un ouvert d'une G-variété compacte M_i. Soit $j_*^{M_i} : K_G(T_G^*U) \to K_G(T_G^*M_i)$ l'application déduite de j^{M_i} en K-théorie. Alors on a l'égalité*

$$\operatorname{index}_c^{G,M_1} j_*^{M_1} = \operatorname{index}_c^{G,M_2} j_*^{M_2}.$$

Démonstration. Rappelons que l'on peut tout d'abord choisir un représentant σ_0 de $[\sigma]$ vérifiant les conditions suivantes: il existe un sous-ensemble K compact et G-invariant de U, un espace vectoriel hermitien V muni d'une représentation unitaire de G, deux fibrés $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ sur U tels que $\mathcal{E}^\pm|_{U-K} = (U-K) \times V$ et tels que $\sigma_0 : p^*\mathcal{E}^+ \to p^*\mathcal{E}^-$ soit un symbole G-transversalement elliptique vérifiant $\sigma_0(x,\xi) = I_V$ pour x en dehors de K. Soit σ_0 un tel représentant de $[\sigma]$. On choisit un voisinage ouvert W_1 de K dans U qui soit relativement compact et G-invariant. Choisissons des métriques hermitiennes G-invariantes $h^{U,\mathcal{E}^\pm}$ sur $\mathcal{E}^\pm$ telles que $h^{U,\mathcal{E}^\pm}(x,v) = \|v\|_V$ pour x dans $U - W_1$. Choisissons des connexions $\nabla^{U,\mathcal{E}^\pm}$ sur $\mathcal{E}^\pm$ telles que $\nabla^{U,\mathcal{E}^\pm}$ soient triviales (i.e. égales à $d \otimes I_V$) en dehors de W_1. Choissons d'autre part une connexion G-invariante ∇^U sur le fibré TU. Enfin choisissons une métrique G-invariante g^U sur T^*U.

Soit $j^M : U \to M$ un plongement G-équivariant de U dans une variété compacte M. Les fibrés $\mathcal{E}^\pm$ s'étendent naturellement en des fibrés sur M, encore notés $\mathcal{E}^\pm$, triviaux à l'infini et G-équivariants. Le morphisme σ_0 s'étend naturellement à l'infini par le morphisme identique. On note $j^M_*\sigma_0$ ce prolongement. L'élément $j^M_*([\sigma])$ est alors représenté par l'élément $j^M_*\sigma_0$.

Montrons que la fonction généralisée $\operatorname{index}_c^{G,M}(j^M_*([\sigma]))$ ne dépend pas de M. Pour la calculer, il faut construire un représentant G-transversalement bon de $j^M_*([\sigma])$. Choisissons une métrique G-invariante $g^M(\xi) = \|\xi\|$ sur T^*M. Par partition de l'unité, on peut la choisir de telle sorte que cette métrique coincide avec g^U sur W_1. On remplace alors le morphisme $j^M_*\sigma_0$ par le morphisme G-transversalement bon $\sigma_1^M(x,\xi) = \vartheta(\|\xi\|)\|\xi\|(j^M_*\sigma_0)(x, \|\xi\|^{-1}\xi)$ où $\vartheta(t), t \in \mathbb{R}$, est une fonction nulle au voisinage de 0 et égale à 1 pour $t \geqq 1$. Le morphisme σ_1^M dépend du choix de g^M. La connexion $\nabla^{U,\mathcal{E}}$, étant triviale à l'infini, se prolonge naturellement en une connexion notée $\nabla^{M,\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E} \to M$. De même, la structure hermitienne G-invariante $h^{U,\mathcal{E}}$, étant constante à l'infini, se prolonge en une structure hermitienne $h^{M,\mathcal{E}}$.

Notons $\mathbb{A}^M = v(\sigma_1^M) + p^*\nabla^{M,\mathcal{E}}$ la superconnexion associée à ces données sur le superfibré $p^*\mathcal{E}$ sur T^*M. En dehors de W_1, les fibrés hermitiens $\mathcal{E}^\pm$ sont identiques, le morphisme $\sigma_1^M(x,\xi)$ est donné par le morphisme $\vartheta(\|\xi\|)\|\xi\|$ et les connexions sur $\mathcal{E}^\pm$ sont égales. On voit (formule (24)) que la forme $\operatorname{ch}(\mathbb{A}^M)$ est nulle en dehors de $p^{-1}(W_1)$. D'autre part sur $p^{-1}(W_1)$, cette forme différentielle ne dépend que de $g^U|_{W_1}$. On peut choisir une connexion G-invariante ∇^M sur TM qui coincide avec ∇^U sur W_1. Soit $s \in G$. Les choix de $g^M, \nabla^{M,\mathcal{E}}, h^{M,\mathcal{E}}$ et ∇^M déterminent la forme différentielle équivariante $I(s, \sigma_1^M, \nabla^{M,\mathcal{E}}, h^{M,\mathcal{E}}, \nabla^M)$ sur $T^*M(s)$. Comme $\operatorname{ch}_s(\mathbb{A})(X)$ est nulle en dehors de $p^{-1}(W_1(s))$, on voit que cette forme différentielle ne dépend que des restrictions de $g^M, \nabla^{M,\mathcal{E}}, h^{M,\mathcal{E}}, \nabla^M$ à W_1 qui, par construction, coincident avec les restrictions de $g^U, \nabla^{U,\mathcal{E}}, h^{U,\mathcal{E}}, \nabla^U$. La fonction généralisée $\operatorname{index}_c(j^M_*([\sigma])) = \operatorname{index}_c(\sigma_1^M))$ est donc indépendante du choix du plongement $U \to M$.

On peut présenter cette démonstration de manière légèrement différente. Soient $\mathcal{E}^\pm$ deux fibrés G-équivariants sur U et supposons que $\mathcal{E}^-$ soit trivial à l'infini. Soit $\sigma : p^*\mathcal{E}^+ \to p^*\mathcal{E}^-$ un morphisme G-transversalement bon audessus de K tel que $\sigma(x,\xi) = L(x)\vartheta(\|\xi\|)\|\xi\|$ pour x en dehors de K, où $L(x)$ est un morphisme inversible de $\mathcal{E}^+_x$ dans $\mathcal{E}^-_x$. Nous identifions $\mathcal{E}^+$ et

$\mathscr{E}^-$ à l'infini grâce à $L(x)$. Soit $\nabla^{\mathscr{E}^-}$ une connexion G-invariante sur $\mathscr{E}^-$ et choisissons $\nabla^{\mathscr{E}^+}$ telle que $\nabla^{\mathscr{E}^+} = L(x)^{-1} \circ \nabla^{\mathscr{E}^-} \circ L(x)$ à l'infini. Choisissons $h^{\mathscr{E}^-}$ une structure hermitienne G-invariante sur $\mathscr{E}^-$. Choisissons une métrique hermitienne G-invariante $h^{\mathscr{E}^+}$ sur le fibré $\mathscr{E}^+$ telle que, pour $v, w \in \mathscr{E}^+_x$ et pour x grand, $(v, w)_x = (L(x)v, L(x)w)_x$. Alors, pour ces choix compatibles à l'infini de $\nabla^{\mathscr{E}}, h^{\mathscr{E}}$, la forme différentielle $\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)(x,\xi)$ sur $T^*U(s)$ est nulle lorsque $x \in U(s)$ est grand. Soit ∇^U une connexion G-invariante sur TU. On considère la forme différentielle $G(s)$-équivariante fermée $I(s,\sigma) = I(s,\sigma,\nabla^{\mathscr{E}}, h^{\mathscr{E}}, \nabla^U)$ sur $T^*U(s)$ définie pour Y dans un voisinage $U_s(0)$ de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$. On a donc la formule, pour Y variant dans un voisinage $U_s(0)$ de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$,

$$\mathrm{index}_c^{G,U}([\sigma])(se^Y) = \int_{T^*U(s)} (2i\pi)^{-\dim U(s)} e^{-id_Y\omega^U} I(s,\sigma)(Y)\,. \tag{25}$$

On voit clairement sur cette formule que l'indice cohomologique de σ ne dépend que de U. □

Autrement dit, la famille d'indices $\mathrm{index}_c^{G,M}$ vérifie l'axiome d'excision.

On voit ici qu'on peut définir par la formule précédente la fonction $\mathrm{index}_c^{G,U} : K_G(T^*_G U) \to C^{-\infty}(G)^G$ pour toute G-variété localement compacte U. En particulier, si V est un espace vectoriel muni d'une représentation linéaire de G, la proposition précédente permet d'associer à tout élément $[\sigma] \in K_G(T^*_G V)$ une fonction généralisée $\mathrm{index}_c^{G,V}([\sigma]) \in C^{-\infty}(G)^G$.

3.3 Produit externe

Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie compacts. Soit M_1 une variété compacte munie d'une action de $G_1 \times G_2$. Soit M_2 une variété compacte munie d'une action de G_2. On reprend les notations du paragraphe 2.3.2. Soit $[\sigma_1] \in K_{G_1\times G_2}(T^*_{G_1} M_1)$ et $[\sigma_2] \in K_{G_2}(T^*_{G_2} M_2)$. Soient $\mathscr{E}_1^\pm$ des fibrés hermitiens $G_1 \times G_2$-équivariants sur M_1 et soient $\mathscr{E}_2^\pm$ des fibrés hermitiens G_2-équivariants sur M_2. On peut choisir un représentant $\sigma_1 : p_1^*\mathscr{E}_1^+ \to p_1^*\mathscr{E}_1^-$ de $[\sigma_1]$ qui soit un morphisme de fibrés $G_1 \times G_2$-équivariants et qui soit G_1-transversalement bon. De même, on peut choisir un représentant $\sigma_2 : p_2^*\mathscr{E}_2^+ \to p_2^*\mathscr{E}_2^-$ de $[\sigma_2]$ qui soit un morphisme de fibrés G_2-équivariants sur T^*M_2 et qui soit G_2-transversalement bon. Le produit externe de symboles $\sigma_1 \odot \sigma_2$ est alors un symbole sur $M_1 \times M_2$. Nous allons montrer (proposition 23) que $\sigma_1 \odot \sigma_2$ est $G_1 \times G_2$-transversalement bon sur $M_1 \times M_2$. Le théorème suivant est alors presque immédiat.

Théorème 22 *Soit $[\sigma_1] \in K_{G_1\times G_2}(T^*_{G_1} M_1)$ et $[\sigma_2] \in K_{G_2}(T^*_{G_2} M_2)$. Alors le produit des fonctions généralisées $\mathrm{index}_c^{G_1\times G_2, M_1}([\sigma_1])(g_1,g_2)\,\mathrm{index}_c^{G_2,M_2}([\sigma_2])(g_2)$ est défini comme fonction généralisée sur $G_1 \times G_2$ et, de plus,*

$$\begin{aligned}\mathrm{index}_c^{G_1\times G_2, M_1\times M_2}([\sigma_1]\odot[\sigma_2])(g_1,g_2) &= \mathrm{index}_c^{G_1\times G_2, M_1}([\sigma_1])(g_1,g_2)\\ &\quad\times \mathrm{index}_c^{G_2,M_2}([\sigma_2])(g_2)\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\nabla^{\mathscr{E}_i}$ des connexions sur $\mathscr{E}_i$, $i = 1,2$. Considérons la connexion produit tensoriel $\nabla^{\mathscr{E}}$ sur $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2$

$$\nabla^{\mathscr{E}}(\alpha \wedge \beta) = \nabla^{\mathscr{E}_1}\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \nabla^{\mathscr{E}_2}\beta .$$

On considère donc sur $p^*(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)$ la superconnexion $\mathbb{A}^{\omega^M}$ associée à $p^*\nabla^{\mathscr{E}}$ et $\sigma_1 \odot \sigma_2$ par la formule (16).

Soit $(s_1,s_2) \in G_1 \times G_2$. Alors la variété $M(s_1,s_2)$ est le produit direct des variétés $M_1(s_1,s_2)$ et $M_2(s_2)$. Le caractère de Chern équivariant étant multiplicatif par rapport aux produits tensoriels, on voit facilement que la forme différentielle $I^{\omega^M}((s_1,s_2),\sigma_1 \odot \sigma_2)(X_1,X_2)$ sur $T^*M(s_1,s_2) = T^*M_1(s_1,s_2) \times T^*M_2(s_2)$, définie si $X_i \in \mathfrak{g}_i(s_i)$ (pour $i = 1,2$) sont assez voisins de 0, est le produit extérieur des formes différentielles $I^{\omega^{M_1}}((s_1,s_2),\sigma_1)(X_1,X_2)$ sur $T^*M_1(s_1,s_2)$ et $I^{\omega^{M_2}}(s_2,\sigma_2)(X_2)$ sur $T^*M_2(s_2)$:

$$\begin{aligned} &I^{\omega^M}((s_1,s_2),\sigma_1 \odot \sigma_2)(X_1,X_2)((x_1,\xi_1),(x_2,\xi_2)) \\ &\quad = I^{\omega^{M_1}}((s_1,s_2),\sigma_1)(X_1,X_2)(x_1,\xi_1) \wedge I^{\omega^{M_2}}(s_2,\sigma_2)(X_2)(x_2,\xi_2) . \end{aligned}$$

En intégrant sur la variété produit $T^*M(s_1,s_2) = T^*M_1(s_1,s_2) \times T^*M_2(s_2)$, on en déduit que, pour X_1 et X_2 sont suffisamment petits,

$$\begin{aligned} &\mathrm{index}_c^{G_1\times G_2, M_1\times M_2}(\sigma_1 \odot \sigma_2)(s_1 \exp X_1, s_2 \exp X_2) \\ &\quad = \mathrm{index}_c^{G_1\times G_2, M_1}(s_1 \exp X_1, s_2 \exp X_2)\, \mathrm{index}_c^{G_2,M_2}(\sigma_2)(s_2 \exp X_2) . \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout (s_1,s_2), on obtient le théorème. □

Il reste à montrer la proposition suivante.

Proposition 23 *Si σ_1 est G_1-transversalement bon et σ_2 est G_2-transversalement bon, le morphisme $\sigma_1 \odot \sigma_2$ est $G_1 \times G_2$-transversalement bon sur $M_1 \times M_2$.*

Démonstration. Considérons les endomorphismes impairs $v(\sigma_i) : p_i^*\mathscr{E}_i^+ \to p_i^*\mathscr{E}_i^-$ pour $i = 1,2$ associés à σ_i et notons

$$W = v(\sigma_1 \odot \sigma_2) .$$

On a

$$W^2 = (v(\sigma_1))^2 \otimes I + I \otimes (v(\sigma_2))^2 .$$

En particulier

$$W^2 \geqq (v(\sigma_1))^2 \otimes I$$

et

$$W^2 \geqq I \otimes (v(\sigma_2))^2 .$$

Comme σ_1 est G_1-transversalement bon, il existe des nombres réels positifs k_1, r_1, a_1 tels que

$$(v(\sigma_1))^2(x_1,\xi_1) \geqq k_1\|\xi_1\|^2 \tag{26}$$

pour tout $(x_1,\xi_1) \in T^*M_1$ tel que $\|f^{G_1,M_1}(x_1,\xi_1)\| \leqq a_1\|\xi_1\|$, $\|\xi_1\| \geqq r_1$. De même pour σ_2, on choisit des nombres réels positifs k_2, a_2, r_2 tels que

$$(v(\sigma_2))^2(x_2,\xi_2) \geqq k_2\|\xi_2\|^2 \tag{27}$$

pour tout $(x_2,\xi_2) \in T^*M_2$ tel que $\|f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\| \leqq a_2\|\xi_2\|$, $\|\xi_2\| \geqq r_2$.

On note $M = M_1 \times M_2$ et on note $(x,\xi) = ((x_1,\xi_1),(x_2,\xi_2))$ un point de T^*M.

Lemme 24 *Pour tout couple (a_1,a_2) de nombres réels positifs, il existe des nombres réels positifs ε, v tels que*

1) *Les inégalités $\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\| \leqq \varepsilon\|\xi\|$ et $\|\xi_1\| \geqq v\|\xi_2\|$ entraînent*

$$\|f^{G_1,M_1}(x_1,\xi_1)\| \leqq a_1\|\xi_1\| .$$

2) *Les inégalités $\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\| \leqq \varepsilon\|\xi\|$ et $\|\xi_1\| \leqq v\|\xi_2\|$ entraînent*

$$\|f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\| \leqq a_2\|\xi_2\| .$$

Démonstration. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f^{G_2,M_1}(x_1,\xi_1)\| \leqq C\|\xi_1\|$ pour tout x_1 appartenant à la variété compacte M_1. Pour tous $A, B \in \mathfrak{g}_2^*$, on a $\|B\|^2 \leqq 2\|A+B\|^2 + 2\|A\|^2$. On obtient

$$\begin{aligned}\|f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\|^2 \leqq\ & 2\|f^{G_2,M_1}(x_1,\xi_1) + f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\|^2 \\ & + 2\|f^{G_2,M_1}(x_1,\xi_1)\|^2 .\end{aligned}$$

D'après la forme de l'application f_{tot}, on a donc les inégalités

$$\begin{aligned}\|f^{G_1,M_1}(x_1,\xi_1)\|^2 &\leqq \|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\|^2 ,\\ \|f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\|^2 &\leqq 2\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\|^2 + 2\|f^{G_2,M_1}(x_1,\xi_1)\|^2 \\ &\leqq 2\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\|^2 + 2C^2\|\xi_1\|^2 .\end{aligned}$$

Les inégalités $\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\| \leqq \varepsilon\|\xi\|$ et $\|\xi_1\| \geqq v\|\xi_2\|$ entraînent

$$\|f^{G_1,M_1}(x_1,\xi_1)\|^2 \leqq \varepsilon^2(1+v^{-2})\|\xi_1\|^2 .$$

Les inégalités $\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\| \leqq \varepsilon\|\xi\|$ et $\|\xi_1\| \leqq v\|\xi_2\|$ entraînent

$$\|f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\|^2 \leqq 2\varepsilon^2(1+v^2)\|\xi_2\|^2 + 2C^2v^2\|\xi_2\|^2 .$$

Il suffit alors de choisir (v,ε) tels que l'on ait simultanément

$$\begin{gathered}\varepsilon^2(1+v^{-2}) \leqq (a_1)^2 ,\\ 2\varepsilon^2(1+v^2) + 2C^2v^2 \leqq (a_2)^2,\end{gathered}$$

ce qui est possible. □

Soient alors ε, v déterminés en fonction de a_1, a_2 par le lemme 24. Choisissons R tel que

$$R^2 \geqq (1+v^{-2})(r_1)^2, \quad R^2 \geqq (1+v^2)(r_2)^2$$

et k tel que
$$(1+v^{-2})k \leqq k_1, \quad (1+v^2)k \leqq k_2 .$$
Montrons qu'alors on a l'inégalité d'opérateurs hermitiens
$$W^2 \geqq k\|\xi\|^2 I$$
pour tout $(x,\xi) \in T^*M$ tel que $\|f_{\mathrm{tot}}(x,\xi)\| \leqq \varepsilon\|\xi\|$, $\|\xi\| \geqq R$.

En effet, si $\|\xi_1\| \geqq v\|\xi_2\|$, on emploie l'inégalité (1) du lemme 24. On a donc
$$\|f^{G_1,M_1}(x_1,\xi_1)\| \leqq a_1\|\xi_1\| .$$
D'autre part, l'inégalité $\|\xi\| \geqq R$ entraine $\|\xi_1\| \geqq r_1$. On emploie l'inégalité $W^2 \geqq (v(\sigma_1))^2 \otimes I$ et l'inégalité (26), on obtient $W^2 \geqq k_1\|\xi_1\|^2 I \geqq k\|\xi\|^2 I$.

Si $\|\xi_1\| \leqq v\|\xi_2\|$, on emploie l'inégalité (2) du lemme 24. On a donc
$$\|f^{G_2,M_2}(x_2,\xi_2)\| \leqq a_2\|\xi_2\| .$$
D'autre part, l'inégalité $\|\xi\| \geqq R$ entraîne $\|\xi_2\| \geqq r_2$. On utilise l'inégalité $W^2 \geqq I \otimes (v(\sigma_2))^2$ et l'inégalité (27), on obtient $W^2 \geqq k_2\|\xi_2\|^2 \geqq k\|\xi\|^2$.

On a donc montré que $\sigma_1 \odot \sigma_2$ est $G_1 \times G_2$-transversalement bon. □

3.4 *Action libre*

On reprend les notations du paragraphe 2.3.3. On choisit une connexion G-invariante pour la fibration principale $q : P \to M$ de groupe H. Le fibré des vecteurs tangents horizontaux s'identifie à q^*TM. On a donc une décomposition en somme directe du fibré cotangent à P
$$T^*P = q^*T^*M \oplus P \times \mathfrak{h}^* .$$
Dans cette identification, $T^*_{G\times H}P$ s'identifie à $q^*T^*_GM$. Soit $p \in P$ et $\xi \in T^*_pP$. Soit $x = q(p)$. On note $Q(p,\xi) \in T^*_xM$ l'élément tel que $(Q(p,\xi),v) = (\xi,(v_{\mathrm{hor}})_p)$ où v_{hor} est le relevé horizontal du vecteur v. On obtient ainsi une application
$$Q : T^*P \to T^*M .$$
Cette application a pour fibre $H \times \mathfrak{h}^*$.

Soient $\mathscr{E}^\pm$ des fibrés G-équivariants sur M. Soit $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ un morphisme des fibrés G-équivariants $p^*\mathscr{E}^\pm$ au-dessus de T^*M. Considérons les fibrés $(G\times H)$-équivariants $q^*\mathscr{E}^\pm$ sur P. Grâce à l'application Q, on obtient un morphisme $\mathrm{hor}(\sigma) : p^*q^*\mathscr{E}^+ \to p^*q^*\mathscr{E}^-$ de fibrés $(G\times H)$-équivariants sur T^*P en posant
$$\mathrm{hor}(\sigma)(p,\xi) = \sigma(Q(p,\xi)) .$$
On dira que $\mathrm{hor}(\sigma)$ est le relevé horizontal de σ. Soit σ un symbole G-transversalement elliptique, alors $\mathrm{hor}(\sigma)$ est un symbole $(G\times H)$-transversalement elliptique. De plus l'élément de $K_{G\times H}(T^*_{G\times H}P)$ déterminé par $\mathrm{hor}(\sigma)$ est égal à $q^*[\sigma]$.

Théorème 25 *Soit $P \to M$ un fibré principal de groupe H muni d'une action à gauche de G. Soit $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$. On a l'égalité de fonctions généralisées: pour $g \in G$ et $h \in H$*

$$\mathrm{index}_c^{G\times H,P}(q^*[\sigma])(g,h) = \sum_{\tau\in\hat{H}} \mathrm{Tr}\,\tau(h)(\mathrm{index}_c^{G,M}([\sigma_{\tau^*}])(g))\,.$$

Démonstration. Soit $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$. On note $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ un morphisme G-transversalement bon représentant σ. Alors le morphisme $\mathrm{hor}(\sigma)(p,\xi) = \sigma(Q(p,\xi))$ est un morphisme $(G\times H)$-transversalement bon.

Commençons par démontrer l'égalité de fonctions généralisées ci-dessus au voisinage de l'identité de $G\times H$. Si $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{h}$ sont assez petits, il s'agit de montrer l'égalité

$$\mathrm{index}_c^{G\times H,P}(\mathrm{hor}(\sigma))(\exp X, \exp Y) = \sum_{r\in\hat{H}} \mathrm{Tr}\,\tau(\exp Y)\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(\exp X)\,. \tag{28}$$

Explicitons tout d'abord le deuxième membre de l'égalité ci-dessus. Soit $\theta \in \mathscr{A}^1(P)\otimes\mathfrak{h}$ la 1-forme de connexion du fibré principal $P \to M$ et soit $\Theta \in \mathscr{A}^2(P)\otimes\mathfrak{h}$ la courbure de θ. Pour $X \in \mathfrak{g}$, soit $\mu(X) = -\theta(X_P)$ le moment de la connexion θ. Considérons la courbure équivariante $X \mapsto \Theta(X)$ de θ. Par définition, on a $\Theta(X) = \mu(X) + \Theta$. C'est un élément horizontal de $\mathscr{A}(P)\otimes\mathfrak{h}$. Si $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{h})^H$ est une fonction H-invariante sur $\mathfrak{h}$, alors $\phi(\Theta(X))$ se calcule par série de Taylor par rapport à l'élément nilpotent Θ et l'application $X \mapsto \phi(\Theta(X))$ est une forme G-équivariante fermée sur M. En particulier, le caractère de Chern équivariant du fibré $\mathscr{V}_\tau$ muni de la connexion $\tau(\theta)$ déduite de θ est la forme différentielle équivariante $\mathrm{ch}(\mathscr{V}_\tau)(X) = \mathrm{Tr}\,\tau(\exp\Theta(X))$.

Soient $\nabla^{\mathscr{E}^\pm}$ des connexions G-équivariantes sur les fibrés $\mathscr{E}^\pm \to M$. Soit $\mathscr{E} = \mathscr{E}^+ \oplus \mathscr{E}^-$ et $\nabla^{\mathscr{E}} = \nabla^{\mathscr{E}^+} \oplus \nabla^{\mathscr{E}^-}$. On associe à la superconnexion $\mathbb{A}(\sigma) = v(\sigma) + p^*\nabla^{\mathscr{E}}$ la forme équivariante $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))$ sur T^*M. On la note simplement $\mathrm{ch}(\sigma)$.

Si $\tau \in \hat{H}$, on choisit sur le fibré $\mathscr{E}\otimes\mathscr{V}_\tau$ la connexion produit tensoriel $\nabla^\tau = \nabla^{\mathscr{E}} \otimes I + I \otimes \tau(\theta)$. On associe alors à σ_τ le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mathbb{A}^\tau(\sigma_\tau))$ de la superconnexion $\mathbb{A}^\tau(\sigma_\tau) = v(\sigma_\tau) + p^*\nabla^\tau$. On le note simplement $\mathrm{ch}(\sigma_\tau)$. On a:

$$\mathrm{ch}(\sigma_\tau)(X) = \mathrm{Tr}\,\tau(\exp\Theta(X))\mathrm{ch}(\sigma)(X)\,.$$

Choisissons une connexion G-invariante ∇^M sur le fibré tangent TM. Ceci détermine la forme G-équivariante fermée $X \mapsto J(M)(X)$ sur M. Par définition, on a alors (pour X dans un voisinage de 0)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(\exp X)\\
&\quad= (2i\pi)^{-\dim M}\int_{T^*M}\mathrm{ch}(\sigma_{\tau^*})(X)e^{-id_X\omega^M}(J(M)(X))^{-1}\\
&\quad= (2i\pi)^{-\dim M}\int_{T^*M}\mathrm{Tr}\,\tau^*(\exp(\Theta(X)))\mathrm{ch}(\sigma)(X)e^{-id_X\omega^M}(J(M)(X))^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Posons

$$B(X) = e^{-id_X \omega^M} \mathrm{ch}(\sigma)(X)(J(M)(X))^{-1}. \tag{29}$$

Avec cette notation, la somme

$$\sum_{\tau \in \hat{H}} \mathrm{Tr}\, \tau(\exp Y)\, \mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(\exp X)$$

est égale à

$$(2i\pi)^{-\dim M} \sum_{\tau \in \hat{H}} \mathrm{Tr}\, \tau(\exp Y) \int_{T^*M} \mathrm{Tr}(\exp\, \tau^*(\Theta(X)))B(X)\,.$$

Soit dh une mesure de Haar sur H. On note $\mathrm{vol}(H)$ le volume de H par rapport à dh. Soit dY la mesure euclidienne sur $\mathfrak{h}$ tangente à dh. On a $d(\exp Y) = J_{\mathfrak{h}}(Y)dY$ avec

$$J_{\mathfrak{h}}(Y) = \det{}_{\mathfrak{h}} \frac{e^{\mathrm{ad}\, Y/2} - e^{-\mathrm{ad}\, Y/2}}{\mathrm{ad} Y}\ .$$

Soit ϕ une fonction test sur $\mathfrak{h}$. Notons $\mathrm{m}_H(\phi)$ la fonction H-invariante obtenue en moyennant ϕ:

$$\mathrm{m}_H(\phi)(Y) = (\mathrm{vol}\, H)^{-1} \int_H \phi(h \cdot Y)\, dh \tag{30}$$

de sorte que, si ϕ est H-invariante, $\mathrm{m}_H(\phi) = \phi$.

Lemme 26 *Soit ϕ une fonction test sur $\mathfrak{h}$ de support dans un voisinage de 0 suffisamment petit. On a l'égalité de formes différentielles G-équivariantes sur M :*

$$\sum_{\tau \in \hat{H}} \left(\int_{\mathfrak{h}} \mathrm{Tr}\, \tau(\exp Y)\phi(Y)J_{\mathfrak{h}}(Y)dY \right) \mathrm{Tr}\, \tau^*(\exp \Theta(X)) = \mathrm{vol}(H)\mathrm{m}_H(\phi)(\Theta(X))\,.$$

Démonstration. Si $s \in H$ et si Φ est une fonction C^∞ sur H, les relations d'orthogonalité de Schur entraînent la formule:

$$\int_H \Phi(hsh^{-1})dh = \sum_{r \in \hat{H}} (\int_H \mathrm{Tr}\, \tau(h)\Phi(h)dh)\mathrm{Tr}\, \tau^*(s)\,. \tag{31}$$

Soit $S \in \mathfrak{h}$ et $s = \exp S$. Posons $\phi(Y) = \Phi(\exp Y)$. La relation précédente entraîne que, si Φ est à petit support,

$$\mathrm{vol}(H)\mathrm{m}_H(\phi)(S) = \sum_{\tau \in \hat{H}} \left(\int_{\mathfrak{h}} \mathrm{Tr}\, \tau(\exp Y)\phi(Y)J_{\mathfrak{h}}(Y)dY \right) \mathrm{Tr}\, \tau^*(\exp S)\,.$$

En remplacant S par $\Theta(X)$, on obtient le résultat. □

Si ϕ est une fonction test de support contenu dans un voisinage assez petit de 0, on obtient donc

$$\sum_{\tau \in \hat{H}} \left(\int_{\mathfrak{h}} \mathrm{Tr}\, \tau(\exp Y)\phi(Y)J_{\mathfrak{h}}(Y)dY \right) \mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(\exp X)$$
$$= \mathrm{vol}(H) \int_{T^*M} (2i\pi)^{-\dim M} \mathrm{m}_H(\phi)(\Theta(X))B(X)\,.$$

Posons

$$v_1(X,\phi) = \int_{\mathfrak{h}} \operatorname{index}_c^{G\times H,P}(\operatorname{hor}(\sigma))(\exp X, \exp Y)\, J_{\mathfrak{h}}(Y)\phi(Y)dY \tag{32}$$

et

$$v_2(X,\phi) = \operatorname{vol}(H) \int_{T^*M} (2i\pi)^{-\dim M} \mathrm{m}_H(\phi)(\Theta(X))B(X)\,. \tag{33}$$

Pour montrer l'égalité (28), il faut montrer l'égalité de fonctions généralisées $v_1(X,\phi) = v_2(X,\phi)$.

Explicitons $v_1(X,\phi)$. On choisit la connexion $q^*\nabla^{\mathscr{E}}$ sur le superfibré $q^*\mathscr{E}$ sur P. On associe à $\operatorname{hor}(\sigma)$ la superconnexion $\mathbb{B}(\operatorname{hor}(\sigma)) = v(\operatorname{hor}(\sigma)) + p^*q^*\nabla^{\mathscr{E}}$. On note $\operatorname{ch}(\mathbb{B}(\operatorname{hor}(\sigma))$ par $\operatorname{ch}(\operatorname{hor}(\sigma))$. On a alors pour $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{h}$:

$$\operatorname{ch}(\operatorname{hor}(\sigma))(X,Y) = Q^*\operatorname{ch}(\sigma)(X)\,. \tag{34}$$

Comme $TP = q^*TM \oplus P\times\mathfrak{h}$, on a, pour des choix naturels de connexions,

$$J(P)(X,Y) = q^*J(M)(X)J_{\mathfrak{h}}(Y) \tag{35}$$

pour $X\in\mathfrak{g}$ et $Y\in\mathfrak{h}$.

Notons $f : P\times\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ la deuxième projection. Considérons la 1-forme v sur $P\times\mathfrak{h}^*$ telle que

$$v = (\theta, f)\,.$$

Précisons cette 1-forme en coordonnées. Soit E^i une base de $\mathfrak{h}$ et soit E_i la base duale de $\mathfrak{h}^*$. On écrit la 1-forme de connexion $\theta = \sum_i \theta_i E^i$. On écrit un élément $f \in \mathfrak{h}^*$ sous la forme $f = \sum_i f^i E_i$. On a alors $v = \sum_i \theta_i f^i$.

Considérons l'application $m : T^*P \to P\times\mathfrak{h}^*$ de restriction aux vecteurs verticaux. Soit ω^P la 1-forme du fibré cotangent T^*P. On a

$$\omega^P = Q^*\omega^M + m^*v\,. \tag{36}$$

Par définition, on a

$$\operatorname{index}_c^{G\times H,P}(\operatorname{hor}(\sigma))(\exp X,\exp Y) = \int_{T^*P} (2i\pi)^{-\dim P} e^{-id_{X,Y}\omega^P} I(\operatorname{hor}(\sigma))(X,Y)$$

où $I(\operatorname{hor}(\sigma))(X,Y)$ est la forme différentielle sur T^*P définie par:

$$I(\operatorname{hor}(\sigma))(X,Y) = \operatorname{ch}(\operatorname{hor}(\sigma))(X,Y)(J(P)(X,Y))^{-1}\,.$$

Considérons la fibration $Q : T^*P \to T^*M$. D'après les formules (34), (35), (36):

$$e^{-id_{X,Y}\omega^P} I(\operatorname{hor}(\sigma))(X,Y)J_{\mathfrak{h}}(Y) = e^{-id_{X,Y}m^*v} Q^*(B(X))\,.$$

Notons Q_* l'intégration sur la fibre de Q. On choisit sur la fibre de Q qui est isomorphe à $H\times\mathfrak{h}^*$ l'orientation symplectique. On a donc l'égalité de fonctions généralisées:

$$\begin{aligned}&\mathrm{index}_c^{G\times H,P}((\mathrm{hor}(\sigma))(\exp X,\exp Y)J_{\mathfrak{h}}(Y)\\&=(2i\pi)^{-\dim P}\int_{T^*P}e^{-id_{X,Y}m^*\nu}Q^*(B(X))\\&=(2i\pi)^{-\dim P}\int_{T^*M}Q_*(e^{-id_{X,Y}m^*\nu})B(X)\,.\end{aligned}$$

Si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{h}$, notons $k(X,\phi)=\int_{\mathfrak{h}}e^{-id_{X,Y}m^*\nu}\phi(Y)dY$. Nous verrons que c'est une forme à décroissance rapide sur la fibre de Q. Notons $Q_*(k(X,\phi))$ son intégrale sur la fibre. C'est une forme différentielle sur T^*M. On obtient donc

$$v_1(X,\phi)=(2i\pi)^{-\dim P}\int_{T^*M}Q_*(k(X,\phi))B(X)\,.$$

En comparant avec la formule (33) pour $v_2(X,\phi)$, on voit que l'égalité $v_1(X,\phi)=v_2(X,\phi)$ résultera de l'égalité suivante:

$$(2i\pi)^{-\dim H}Q_*(k(X,\phi))=\mathrm{vol}(H)\mathrm{m}_H(\phi)(\Theta(X))\,.$$

Considérons la projection $w:P\times\mathfrak{h}^*\to P/H=M$. Cette fibration est de fibre $H\times\mathfrak{h}^*=T^*H$. Soit $\nu=(\theta,f)$ la 1-forme sur $P\times\mathfrak{h}^*$. Notons

$$r(X,\phi)=\int_{\mathfrak{h}}e^{-id_{X,Y}\nu}\phi(Y)dY\,.$$

C'est une forme différentielle sur $P\times\mathfrak{h}^*$. On a $k(X,\phi)=m^*r(X,\phi)$. Les applications w et Q ayant même fibre, il suffit de démontrer la proposition suivante:

Proposition 27 *Soit P un fibré principal de groupe H et muni d'une action de G à gauche. Soit $f:P\times\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^*$ la deuxième projection. Soit θ une 1-forme de connexion G-invariante. Soit $\nu=(\theta,f)$ la 1-forme sur $P\times\mathfrak{h}^*$. Soit $w:P\times\mathfrak{h}^*\to P/H$ la fibration de fibre $H\times\mathfrak{h}^*$. Si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{h}$, on a*

$$(2i\pi)^{-\dim H}w_*\left(\int_{\mathfrak{h}}e^{-id_{X,Y}\nu}\phi(Y)dY\right)=\mathrm{vol}(H)\mathrm{m}_H(\phi)(\Theta(X))\,,\tag{37}$$

où $\mathrm{m}_H(\phi)$ est la moyenne H-invariante de ϕ donnée par (30).

Démonstration. L'application w est composée des applications $t:P\times\mathfrak{h}^*\to P$ de fibre $\mathfrak{h}^*$ et $q:P\to P/H$ de fibre H. Comme $\theta(Y_P)=Y$, on a

$$\nu(X_P,Y_P)(p,f)=(Y-\mu(X),f).$$

De plus, $d\nu=(d\theta,f)-(\theta,df)$. Si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{h}$, la forme différentielle $r(X,\phi)=\int_{\mathfrak{h}}e^{-id_{X,Y}\nu}\phi(Y)dY$ est à décroissance rapide sur la fibre.

En effet on a

$$r(X,\phi)=\left(\int_{\mathfrak{h}} e^{i(Y,f)}\phi(Y)dY\right)e^{-i(\mu(X)+d\theta,f)+i(\theta,df)}$$

et, puisque ϕ est C^∞ et à support compact, la fonction $f\mapsto(\int_{\mathfrak{h}} e^{i(Y,f)}\phi(Y)dY)$ est rapidement décroissante en f.

Soit $k=\dim H$. Notons $\alpha=\theta_1\wedge\theta_2\wedge\cdots\wedge\theta_k$ et $df=df^1\wedge df^2\wedge\cdots\wedge df^k$. Alors le terme de degré maximum de $\exp(\theta,df)$ se restreint sur la fibre de w en une forme différentielle de degré maximum partout non nulle égale à $(-1)^{k(k+1)/2}df\wedge\alpha$. L'orientation symplectique de la fibre est donnée par cette forme différentielle. Elle définit donc une densité positive sur chaque fibre. Pour intégrer sur la fibre de t la forme $r(X,\phi)$ il faut calculer son terme de degré maximum par rapport à df. Le terme de degré maximum de $r(X,\phi)$ par rapport aux variables de la fibre est donc

$$i^k\left(\int_{\mathfrak{h}} e^{i(Y,f)}\phi(Y)dY\right)e^{-i(\mu(X)+d\theta,f)}(-1)^{k(k+1)/2}df\wedge\alpha\,.$$

On a $\theta_i\wedge\alpha=0$ pour tout i. Comme $\Theta=d\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta]$,

$$e^{-i(\mu(X)+d\theta,f)}\wedge\alpha=e^{-i(\mu(X)+\Theta,f)}\wedge\alpha=e^{-i(\Theta(X),f)}\wedge\alpha\,.$$

Le terme de degré maximum de $r(X,\phi)$ par rapport aux variables df de la fibre est donc aussi égal à

$$i^k(-1)^{k(k+1)/2}\left(\int_{\mathfrak{h}} e^{i(Y,f)}\phi(Y)dY\right)e^{-i(\Theta(X),f)}df\wedge\alpha\,.$$

L'intégrale sur la fibre de la fibration $t:P\times\mathfrak{h}^*\to P$ de $r(X,\phi)$ (pour l'orientation donnée par df) est la forme différentielle sur P

$$t_*(r(X,\phi))=i^k(-1)^{k(k+1)/2}\left(\int_{\mathfrak{h}^*}\left(\int_{\mathfrak{h}} e^{i(Y,f)}\phi(Y)dY\right)e^{-i(\Theta(X),f)}df\right)\wedge\alpha.$$

La formule d'inversion de Fourier montre que

$$t_*(r(X,\phi))=(-1)^{k(k+1)/2}(2i\pi)^k\phi(\Theta(X))\wedge\alpha\,.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale sur la fibre de l'application $q:P\to P/H$ de $\phi(\Theta(X))\wedge\alpha$. Choisissons un point $p\in P$ au dessus de x. Ceci nous donne une identification $i_p:H\to q^{-1}(x)$ par $i_p(h)=ph$. Comme $\phi(\Theta(X))(ph)=h^{-1}\cdot\Theta(X)(p)$ et que $i_p^*\alpha=dh$, on obtient (pour l'orientation donnée par α sur chaque fibre)

$$q_*(\phi(\Theta(X))\wedge\alpha)=\int_H\phi(h\cdot\Theta(X))dh=\mathrm{vol}\,(H)\mathrm{m}_H(\phi)(\Theta_p(X))\,.$$

C'est bien la formule à démontrer puisque les orientations choisies pour $q_* t_*$ données par $df \wedge \alpha$ et l'orientation symplectique de la fibre de w_* diffèrent par le facteur $(-1)^{k(k+1)/2}$. □

Considérons maintenant un point quelconque $(s,u) \in G \times H$. Soit $G(s)$ le centralisateur de s dans G et $H(u)$ le centralisateur de u dans H. Soit $\mathfrak{g}(s) = \{X \in \mathfrak{g}; s \cdot X = X\}$ et $\mathfrak{h}(u) = \{Y \in \mathfrak{h}; u \cdot Y = Y\}$ les algèbres de Lie de $G(s)$ et de $H(u)$.

Si $X \in \mathfrak{g}(s)$ et $Y \in \mathfrak{h}(u)$ sont assez petits, il faut montrer que

$$\begin{aligned} &\mathrm{index}_c^{G\times H,P}(\mathrm{hor}(\sigma))(s \exp X, u \exp Y) \\ &= \sum_{\tau \in \hat{H}} \mathrm{Tr}\, \tau(u \exp Y) \mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(s \exp X) . \end{aligned} \tag{38}$$

Explicitons $\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(s \exp X)$. Soit $M(s)$ la variété des points fixes pour l'action de s sur M. On note $\mathcal{N}(M, M(s))$ le fibré normal à $M(s)$ dans M. Nous avons par définition

$$\begin{aligned} &\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(s \exp X) \\ &= \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} \frac{e^{-id_X \omega^M} \mathrm{ch}_s(\sigma_{\tau^*})(X)}{J(M(s))(X) D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(X)} . \end{aligned}$$

On a $\mathrm{ch}_s(\sigma_{\tau^*}) = \mathrm{ch}_s(\mathcal{V}_{\tau^*})\mathrm{ch}_s(\sigma)$. Notons $B_s(X)$ la forme différentielle sur $T^*M(s)$ définie par

$$B_s(X) = \frac{\mathrm{ch}_s(\sigma)(X) e^{-id_X \omega^M}|_{T^*M(s)}}{J(M(s))(X) D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(X)} . \tag{39}$$

On a

$$\mathrm{index}_c^{G,M}(\sigma_{\tau^*})(s \exp X) = \int_{T^*M(s)} (2i\pi)^{-\dim M(s)} \mathrm{ch}_s(\mathcal{V}_{\tau^*})(X) B_s(X) .$$

Explicitons $\mathrm{ch}_s(\mathcal{V}_{\tau^*})(X)$. Si $p \in P$ est un point au dessus de $x \in M_s$, il existe un élément $\gamma(p) \in H$ tel $sp = p\gamma(p)$. On a $\gamma(ph) = h^{-1}\gamma(p)h$. La classe de conjugaison de $\gamma(p)$ ne dépend donc que de $x \in M(s)$. On la note $[\gamma(x)]$. Si $\gamma \in H$, on note $P(s,\gamma) = \{p \in P; sp = p\gamma\}$.

Lemme 28 1. *La classe de conjugaison* $[\gamma(x)]$ *est constante sur chaque composante connexe* $M(s)_k$ *de* $M(s)$. *On la note* $[\gamma(M(s)_k)]$.

2. *Si* $\gamma_k \in [\gamma(M(s)_k)]$, *l'application* $P(s,\gamma_k) \to M(s)_k$ *est une fibration principale de groupe* $H(\gamma_k)$.

Démonstration. Si $v(t)$ est une courbe horizontale dans P telle que $v(0) = p$ et relevant une courbe $x(t)$ dans M_s, les courbes $sv(t)$ et $v(t)\gamma(p)$ sont des courbes horizontales au dessus de la courbe $x(t)$ et ayant le même point de départ $sp = p\gamma(p)$. On en déduit donc $sv(t) = v(t)\gamma(p)$, ce qui prouve 1. Le point 2 est évident. □

Si $X \in \mathfrak{g}(s)$ et $\gamma \in H$, on note $\Theta_{s,\gamma}(X) = \Theta(X)|_{P(s,\gamma)}$. On a

$$\Theta_{s,\gamma}(X) \in \mathscr{A}(P(s,\gamma)) \otimes \mathfrak{h}(\gamma) .$$

Si γ_k appartient à $[\gamma(M(s)_k)]$ et si ϕ est une fonction $H(\gamma_k)$-invariante sur $\mathfrak{h}(\gamma_k)$, la forme différentielle $\phi(\Theta_{s,\gamma_k}(X))$ définit une forme différentielle sur $M(s)_k$. De plus l'application $X \mapsto \phi(\Theta_{s,\gamma_k}(X))$ est une forme $G(s)$-équivariante fermée sur $M(s)_k$. Si $\tau \in \hat{H}$, l'automorphisme produit par s sur le fibré $\mathscr{V}_\tau|_{M(s)_k}$ est donné en un point $[p,v]$, $p \in P(s,\gamma_k), v \in V_\tau$, au dessus d'un point de $M(s)_k$ par $\tau(\gamma_k)$, car $sp = p\gamma_k$. On a donc, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$,

$$\mathrm{ch}_s(\mathscr{V}_\tau)|_{M(s)_k}(X) = \mathrm{Tr}(\gamma_k \exp \Theta_{s,\gamma_k}(X)) .$$

Le membre de droite de (38) est donc égal à

$$S(X,Y) = \sum_{\tau\in\hat{H}} \mathrm{Tr}\, \tau(u \exp Y) \sum_k \int_{T^*M(s)_k} (2i\pi)^{-\dim M(s)_k} \times \mathrm{Tr}\, \tau^*(\gamma_k \exp \Theta_{s,\gamma_k}(X)) B_s(X) . \tag{40}$$

Posons

$$S_k(X,Y) = \sum_{\tau\in\hat{H}} \mathrm{Tr}\, \tau(u \exp Y) \int_{T^*M(s)_k} (2i\pi)^{-\dim M(s)_k} \mathrm{Tr}\, \tau^*(\gamma_k \exp \Theta_{s,\gamma_k}(X)) B_s(X) .$$

Soit ϕ une fonction test sur $\mathfrak{h}(u)$ de support assez voisin de 0. Posons pour $X \in \mathfrak{g}(s)$

$$v_1(X,\phi) = \int_{\mathfrak{h}(u)} \mathrm{index}_c^{G\times H,P}(\mathrm{hor}(\sigma))(s \exp X, u \exp Y) \times \det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y) J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)\phi(Y) dY \tag{41}$$

et

$$v_2(X,\phi) = \int_{\mathfrak{h}(u)} S(X,Y) \det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y) J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)\phi(Y) dY . \tag{42}$$

On a donc $v_2(X,\phi) = \sum_k v_{2,k}(X,\phi)$, avec

$$v_{2,k}(X,\phi) = \int_{\mathfrak{h}(u)} S_k(X,Y) \det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y) J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)\phi(Y) dY. \tag{43}$$

Il s'agit de montrer que $v_1(X,\phi) = v_2(X,\phi)$.

Explicitons tout d'abord $S_k(X,Y)$.

Lemme 29 *Soit $\gamma \in H$ et $C \in \mathfrak{h}(\gamma)$. Soit ϕ une fonction test sur $\mathfrak{h}(u)$ de support assez voisin de* 0*. On note $\mathrm{m}_{H(u)}(\phi)$ sa moyenne par rapport à $H(u)$. Soit*

$$E(C,\gamma,\phi) = \sum_{\tau\in\hat{H}} \left(\int_{\mathfrak{h}(u)} \mathrm{Tr}\, \tau(u \exp Y) \det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y) J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)\phi(Y) dY \right) \times \mathrm{Tr}\, \tau^*(\gamma \exp C) .$$

Alors

1. *Si γ n'appartient pas à la classe de conjugaison de u et si C est assez petit,* $E(C,\gamma,\phi)=0$.
2. *Si $C\in\mathfrak{h}(u)$ est assez petit,* $E(C,u,\phi)=\mathrm{vol}(H(u))\mathrm{m}_{H(u)}(\phi)(C)$.

Démonstration. Soit $c=\exp C$. Notons $E(c,\gamma)$ la fonction généralisée sur $H(u)$ définie par

$$E(c,\gamma)(y)=\det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1-uy)\sum_{\tau\in\hat{H}}\mathrm{Tr}\,\tau(uy)\,\mathrm{Tr}\,\tau^*(\gamma c)\,.$$

Soit W_0 un voisinage $H(u)$-invariant de e dans $H(u)$. Choisissons W_0 assez petit pour que l'application $[h,y]\to h(uy)h^{-1}$ soit un isomorphime de $H\times_{H(u)}W_0$ sur un voisinage tubulaire U_0 de la classe de conjugaison de u dans H. Si Φ est une fonction C^∞ à support compact contenu dans U_0, on a la formule d'intégration

$$\int_H\Phi(h)dh=\int_{H/H(u)}\left(\int_{W_0}\det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1-uy)\Phi(h(uy)h^{-1})dy\right)(dh/dy)$$

où (dh/dy) désigne la mesure H-invariante sur $H/H(u)$ déduite de dh et dy.
Considérons l'égalité (31)

$$\int_H\Phi(h\gamma ch^{-1})dh=\sum_{\tau\in\hat{H}}\left(\int_H\mathrm{Tr}\,\tau(h)\Phi(h)dh\right)\mathrm{Tr}\,\tau^*(\gamma c)\,.$$

En passant en coordonnées $h(uy)h^{-1}$ dans le deuxième membre, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_H\Phi(h\gamma ch^{-1})dh\\&\quad=\sum_{\tau\in\hat{H}}\left(\int_{H/H(u)}\left(\int_{W_0}\mathrm{Tr}\tau(uy)\Phi(h(uy)h^{-1})\det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1-uy)dy\right)dh/dy\right)\\&\qquad\times\mathrm{Tr}\,\tau^*(\gamma c)\,.\end{aligned}$$

Si Φ est une fonction C^∞ à support compact contenu dans U_0 et H-invariante, la fonction $y\mapsto\Phi(uy), y\in W_0$, est une fonction C^∞ à support compact contenu dans le voisinage W_0 et $H(u)$-invariante. On obtient ainsi toutes les fonctions $H(u)$-invariantes à support dans W_0. Pour une telle function Φ, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}(H)\Phi(\gamma c)\\&\quad=\mathrm{vol}(H/H(u))\sum_{\tau\in\hat{H}}\left(\int_{W_0}\mathrm{Tr}\,\tau(uy)\Phi(uy)\det_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1-uy)dy\right)\mathrm{Tr}\,\tau^*(\gamma c)\\&\quad=\mathrm{vol}(H/H(u))\int_{H(u)}E(c,\gamma)(y)\Phi(uy)dy\,.\end{aligned}$$

En particulier, si γ n'est pas conjugué à u, on peut choisir un voisinage $\mathscr{W}_0$ de $0 \in \mathfrak{h}(\gamma)$ et un voisinage W_0 de e dans $H(u)$ tels que $U_0 = \{h(uy)h^{-1}\}$, $h \in H, y \in W_0$, ne rencontre pas l'orbite de $\gamma\ \exp C, C \in \mathscr{W}_0$. La fonction Φ est donc nulle en $\gamma\ \exp C$ pour toute fonction Φ à support dans U_0. On obtient donc la première partie du lemme.

Soit $\gamma = u$. Soit $\mathscr{W}_0$ un voisinage $H(u)$-invariant assez petit de 0 dans $\mathfrak{h}(u)$ et soit $W_0 = \exp \mathscr{W}_0$. Soit Φ une fonction H-invariante à support contenu dans U_0 et soit $\phi(Y) = \Phi(u \exp Y)$. On obtient ainsi toutes les fonctions $H(u)$-invariantes à support dans $\mathscr{W}_0$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(H(u))\phi(C) = \sum_{\tau\in\hat{H}} &\left(\int_{\mathfrak{h}(u)} \mathrm{Tr}\,\tau(u \exp Y)\det{}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y)\phi(Y)J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)dY\right)\\ &\times \mathrm{Tr}\,\tau^*(u \exp C)\,.\end{aligned}$$

On obtient donc le lemme. □

Soit ϕ une fonction test sur $\mathfrak{h}(u)$ de petit support et soit $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. Grâce au lemme 29, si γ_k et u ne sont pas dans la même classe de conjugaison,

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\hat{H}} &\left(\int_{\mathfrak{h}(u)} \mathrm{Tr}\,\tau(u \exp Y)\phi(Y)\det{}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y)J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)dY\right)\\ &\times \mathrm{Tr}\,\tau^*(\gamma_k \exp \Theta_{s,\gamma_k}(X)) = 0\end{aligned} \tag{44}$$

et, de plus,

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\hat{H}} &\left(\int_{\mathfrak{h}(u)} \mathrm{Tr}\,\tau(u \exp Y)\phi(Y)\det{}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1 - u \exp Y)J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)dY\right)\\ &\times \mathrm{Tr}\,\tau^*(u \exp \Theta_{s,u}(X)) = \mathrm{vol}(H(u))\mathrm{m}_{H(u)}(\phi)(\Theta_{s,u}(X))\,.\end{aligned} \tag{45}$$

Notons $M(s)^u$ l'ensemble des composantes connexes de $M(s)_k$ de $M(s)$ telles que $u \in [\gamma_k]$. On voit que seules ces composantes contribuent à la somme (43) définissant $v_2(X,\phi) = \sum_k v_{2,k}(X,\phi)$. On obtient donc

$$v_2(X,\phi) = \int_{T^*M(s)^u} (2i\pi)^{-\dim M(s)^u}\mathrm{vol}(H(u))\mathrm{m}_{H(u)}(\phi)(\Theta_{s,u}(X))B_s(X)\,. \tag{46}$$

Explicitons $v_1(X,\phi)$. Soit $P(s,u)$ la variété des points fixes pour l'action de (s,u) sur P:

$$P(s,u) = \{p \in P; sp = pu\}\,.$$

La variété $P(s,u)$ est un fibré principal sur $M(s)^u$ de groupe $H(u)$.

On a

$$\begin{aligned}&\mathrm{index}_c^{G\times H}(\mathrm{hor}(\sigma))(s \exp X, u \exp Y)\\ &\quad= \int_{T^*P(s,u)} (2i\pi)^{-\dim P(s,u)}e^{-id_{X,Y}\omega^P}I(s,u,\mathrm{hor}(\sigma))(X,Y)\end{aligned}$$

où $I(s,u,\mathrm{hor}(\sigma))(X,Y)$ est la forme différentielle sur $T^*P(s,u)$ définie par

$$I(s,u,\mathrm{hor}(\sigma))(X,Y)=\frac{\mathrm{ch}_s(\mathrm{hor}(\sigma))(X)}{J(P(s,u))(X,Y)D_{s,u}(\mathcal{N}(P,P(s,u)))(X,Y)}\ .$$

Etudions le fibré tangent et le fibré normal à $P(s,u)$. On note $q_0 : P(s,u)\to M(s)^u$ la fibration déduite de q. On a

$$TP(s,u)=q_0^*TM(s)^u\oplus P(s,u)\times\mathfrak{h}(u)\ ,$$
$$\mathcal{N}(P,P(s,u))=q_0^*(\mathcal{N}(M,M(s)^u))\oplus P_{s,u}\times\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)\ .$$

Ces fibrés sont $Z\times H(u)$-équivariants. On en déduit que, si $X\in\mathfrak{g}(s)$ et $Y\in\mathfrak{h}(u)$, alors

$$J(P(s,u))(X,Y)=q_0^*J(M(s)^u)(X)J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)\ ,\tag{47}$$

$$D_{s,u}(\mathcal{N}(P,P(s,u)))(X,Y)=q_0^*D_s(\mathcal{N}(M,M(s)^u))(X)\det{}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1-u\exp Y)\ .\tag{48}$$

La connexion θ restreinte à $P(s,u)$ est à valeurs dans $\mathfrak{h}(u)$. On note f_0 la projection de $P\times\mathfrak{h}(u)^*$ sur $\mathfrak{h}(u)^*$. On note v_0 la 1-forme sur $P(s,u)\times\mathfrak{h}(u)^*$ définie par (θ,f_0). On note $m_0 : T^*P(s,u)\to P(s,u)\times\mathfrak{h}(u)^*$ l'application de restriction aux vecteurs tangents verticaux. Considérons la fibration Q_0: $T^*P(s,u)\to T^*M(s)^u$. Elle est de fibre $H(u)\times\mathfrak{h}(u)^*$.

Comme précédemment, on voit que

$$I(s,u,\mathrm{hor}(\sigma))(X,Y)\det{}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(u)}(1-u\exp Y)J_{\mathfrak{h}(u)}(Y)=e^{-id_{X,Y}m_0^*v_0}Q_0^*(B_s(X))\ .$$

Si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{h}(u)$ de petit support, posons $k(X,\phi)=\int_{\mathfrak{h}(u)}e^{-id_{X,Y}m_0^*v_0}\phi(Y)dY$.

On a

$$v_1(X,\phi)=\int_{T^*M(s)^u}(2i\pi)^{-\dim P(s,u)}(Q_0)_*(k(X,\phi))B_s(X)\ .$$

La proposition 27 appliquée à la fibration Q_0 montre que

$$(2i\pi)^{-\dim H(u)}(Q_0)_*k(X,\phi)=\mathrm{vol}(H(u))\mathrm{m}_{H(u)}(\phi)(\Theta_{s,u}(X))\ .$$

En comparant avec l'expression (46) donnée pour $v_2(X,\phi)$, on voit que $v_1(X,\phi)=v_2(X,\phi)$.

Ceci termine la démonstration du théorème 25. □

4 Calcul d'indices

Dans cette section, nous calculons certains indices cohomologiques.

4.1 L'indice cohomologique du symbole de Bott

On reprend les notations du paragraphe 2.1.1.

Soit $V = \mathbb{R}$. Nous calculons l'indice cohomologique du symbole de Bott:

$$b(x, \xi) = x + i\xi .$$

Proposition 30 *On a*

$$\mathrm{index}_c^{\{e\},\mathbb{R}}([b]) = 1 .$$

Démonstration. Soit $i : \mathbb{R} \to S^1$ la compactification de $\mathbb{R}$ obtenue en rajoutant un point à l'infini. Par définition, on a

$$\mathrm{index}_c^{\{e\},\mathbb{R}}([b]) = \mathrm{index}_c^{\{e\},S^1}(i_*[b]) .$$

Pour calculer l'indice cohomologique de $[b]$, il faut donc calculer un représentant de $i_*[b]$ sur T^*S^1. On écrit

$$T^*S^1 = \{(e^{i\theta}, \xi d\theta); \theta, \xi \in \mathbb{R}\} .$$

Il est montré (pages 525–526, [3]) qu'un représentant σ_0 de $-i_*[b]$ est donné par le symbole

$$\sigma_0(e^{i\theta}, \xi d\theta) = e^{i\theta} \quad \text{si } \xi > 0,$$
$$= 1 \quad \text{si } \xi < 0 .$$

Soit $t \mapsto \phi(t)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, nulle sur un voisinage de 0 et égale à 1 si $t > 1$. Soit σ défini par la formule

$$\sigma(e^{i\theta}, \xi d\theta) = \phi(|\xi|)e^{i\theta}\xi \quad \text{si } \xi > 0,$$
$$= \phi(|\xi|)|\xi| \quad \text{si } \xi < 0 .$$

Alors σ est un bon symbole dans la même classe que σ_0.

On doit montrer que l'indice cohomologique de σ est égal à -1. Nous appliquons la définition de l'indice cohomologique. Comme b est elliptique, il n'est pas nécessaire d'introduire la 1-forme de l'espace T^*S^1. Considérons la superconnexion

$$\mathbb{A}(\sigma) = d + i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^* \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

sur T^*S^1. On calcule alors aisément que, si $f(\xi) = \phi(\xi)\xi$, on a

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma)) = e^{-f^2} 2if df \wedge d\theta \quad \text{si } \xi > 0 ,$$

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma)) = 0 \quad \text{si } \xi < 0 .$$

Le fibré tangent à S^1 est trivial et on a donc $J(S^1) = 1$. Donc, d'après la formule (22),

$$\mathrm{index}_c^{\{e\},S^1}(\sigma) = (2i\pi)^{-1} \int_{S^1 \times \mathbb{R}^+} e^{-f^2}(id(f^2)) \wedge d\theta .$$

L'orientation symplectique de T^*S^1 est donnée par $d\theta \wedge d\xi$. On obtient donc

$$\mathrm{index}_c^{\{e\},S^1}(\sigma) = -1 \, .$$

Ceci termine la démonstration de notre proposition. □

4.2 *Le symbole d'Atiyah*

Nous reprenons les notations de 2.1.2. Nous calculons maintenant l'indice cohomologique du symbole d'Atiyah $m(z,\xi) = z - i\xi$

Théorème 31 *On a* $\mathrm{index}_c^{S^1,\mathbb{C}}([m])(e^{i\theta}) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}$

Démonstration. Nous donnons ici une démonstration de ce résultat qui utilise les résultats de [11] sur le front d'onde. Nous donnerons dans l'appendice une démonstration directe. Quoique plus longue, elle aura le mérite de montrer au lecteur comment on peut parfois calculer l'indice cohomologique.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}E$, où $\exp(\theta E) = e^{i\theta}$. L'application moment $f : T^*V \to \mathfrak{g}^*$ est donnée par $f(z,\xi) = \mathrm{Re}(i\xi\bar{z})E^*$.

Soit $\phi(t)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ identiquement égale à 0 près de 0 et égale à 1 pour t plus grand que 1. On déforme d'abord m en

$$m_1(z,\xi) = z\phi(|\xi|)|\xi| - i\phi((1+|z|^2)^{-1/2})\xi$$

de sorte que, si z est grand, $m_1(z,\xi) = z\phi(|\xi|)|\xi|$. Considérons la formule pour l'indice cohomologique de m_1 donnée par la formule (25). Si $s \in G$ n'est pas l'identité, la variété $V(s)$ des points fixes de s est réduite au point $0 \in V$. On obtient pour $s = e^{i\theta}$, $s \neq 1$,

$$I(s,m_1) = \frac{1-e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} \, .$$

On a donc

$$\mathrm{index}_c^{G,V}(m_1)(e^{i\theta}) = \frac{1}{(1-e^{-i\theta})} = -\frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})} \, .$$

D'autre part considérons l'ensemble conique $\mathscr{C} = \{(z, -i\mathbb{R}^+ z);\, z \in \mathbb{C}\}$ dans T^*V. L'ensemble des $(z,\xi) \in T^*V$ où $m_1(z,\xi)$ n'est pas inversible est contenu dans $\mathscr{C}$. Il résulte de (Proposition 43 [11]) que le front d'onde en 1 de $\mathrm{index}_c^{G,V}(m_1)(e^{i\theta})$ est contenu dans $f(\mathscr{C}) = \mathbb{R}^+E^*$. On conclut donc que

$$\mathrm{index}_c^{G,V}(m_1)(e^{i\theta}) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta} \, ,$$

car c'est la seule fonction généralisée F sur S^1 telle que $F(e^{i\theta}) = -\frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})}$ si $e^{i\theta} \neq 1$ et de front d'onde en 1 contenu dans $\mathbb{R}^+$. □

Grâce au théorème d’unicité cité au paragraphe 2.3, on a démontré l’égalité

$$\mathrm{index}_a^{G,M} = \mathrm{index}_c^{G,M}$$

5 Appendice 1: Quelques calculs d’indices cohomologiques

5.1 L’indice cohomologique d’un symbole transversalement elliptique sur un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel réel. On note (x, ξ) un élément de $V \oplus V^*$ avec $x \in V$ et $\xi \in V^*$. Soit G un groupe compact agissant linéairement sur V. Soient $E^{\pm}$ deux espaces vectoriels hermitiens munis d’actions unitaires $\rho^{\pm}$ de G. On note encore $X \mapsto \rho^{\pm}(X)$ les représentations associées de l’algèbre de Lie de G. Soient $\mathscr{E}^{\pm} = V \times E^{\pm}$ les fibrés équivariants hermitiens correspondants sur V. Un morphisme G-équivariant $\sigma : p^*\mathscr{E}^+ \to p^*\mathscr{E}^-$ est donc une application de $V \oplus V^*$ dans l’espace vectoriel fixe $\mathrm{Hom}(E^+, E^-)$ telle que, pour tout $g \in G$, $\rho^-(g)\sigma(x, \xi) = \sigma(gx, g\xi)\rho^+(g)$.

Nous commençons par étudier l’indice cohomologique de morphismes elliptiques, qui sont donc inversibles en dehors d’un compact. Il est clair que tout élément de $K_G(T^*V)$ est représenté par un morphisme elliptique. Mais ces représentants ne sont en général pas donnés sous la forme de “symboles” triviaux à l’infini au sens du lemme 4. On cherchera donc une formule directe en fonction du symbole initial σ lorsque ce symbole est “totalement” bon, par exemple s’il est homogène par rapport à l’ensemble des variables (x, ξ).

Soit

$$v(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^* \\ i\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

l’endomorphisme impair associé à σ.

On introduit une norme euclidienne G-invariante sur V. Il est naturel d’imposer que σ soit bon par rapport aux deux variables (x, ξ).

Définition 32 *On dit qu’un symbole* $\sigma : V \oplus V^* \to \mathrm{Hom}(E^+, E^-)$ *est totalement bon si*

(1) *Le symbole* $\sigma(x, \xi)$ *ainsi que toutes ses dérivées* $\partial_x^k \partial_\xi^l$ *sont à croissance au plus polynomiales sur* $V \oplus V^*$.

(2) *Il existe* $r > 0$ *et* $c > 0$ *tels que*

$$v(\sigma)^2(x, \xi) \geqq c(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)I$$

pour tout (x, ξ) *tel que* $(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)^{1/2} \geqq r$.

On montre facilement que tout élément de $K_G(T^*V)$ est représentable par un morphisme totalement bon. Soit

$$\mathbb{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} d & i\sigma^* \\ i\sigma & d \end{pmatrix}$$

la superconnexion associée à σ. Il est facile de voir ([10]) que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la forme différentielle $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(X)$ est rapidement décroissante sur $V \oplus V^*$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, soit

$$J_V(X) = \det{}_V \left(\frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{X} \right) .$$

Pour $s \in G$, soit

$$V(s) = \{v \in V; sv = v\} , \quad V^1(s) = (1-s)V .$$

Soit

$$D_s(X) = \det{}_{V^1(s)}(1 - se^X) .$$

Théorème 33 *Soit σ un morphisme elliptique G-équivariant totalement bon. Soit*

$$\mathbb{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} d & i\sigma^* \\ i\sigma & d \end{pmatrix} .$$

Alors, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit,

$$\mathrm{index}_c^{G,V}(\sigma)(s \exp X) = (2i\pi)^{-\dim V(s)} \int_{T^*V(s)} \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(X) J_{V(s)}^{-1}(X) D_s^{-1}(X) .$$

Démonstration. Soit r tel que $\sigma(x, \xi)$ soit inversible pour $(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)^{1/2} \geqq r$. Soit ϑ une fonction à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que $\vartheta(t) = 1$ si $t \leqq r$ et $\vartheta(t) = 0$ si $t \geqq 2r$. Posons $v_t(x, \xi) = (x, (t\vartheta(\|x\|) + (1-t))\xi)$. Si $\|x\| \leqq r$, $v_t(x, \xi) = (x, \xi)$. D'autre part, si $(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)^{1/2} \geqq r$, on voit que $\|v_t(x, \xi)\| \geqq r$. En effet, si $\|x\| \geqq r$, alors $\|v_t(x, \xi)\| \geqq \|x\| \geqq r$. Si $\|x\| \leqq r$, $v_t(x, \xi) = (x, \xi)$. Posons

$$\begin{aligned} \sigma_t'(x, \xi) &= \sigma(x, v_t(x, \xi)) , \\ \sigma_t(x, \xi) &= \sigma(x, v_t(x, \xi))(1 + t\|\xi\|^2)^{1/2} . \end{aligned} \tag{49}$$

Il est clair que $\sigma_t'(x, \xi)$ est inversible pour $(\|x\|^2 + \|\xi\|^2) \geqq r$. On a $\sigma_0'(x, \xi) = \sigma(x, \xi)$ et $\sigma_1'(x, \xi) = \sigma(x, 0)$ pour $\|x\| \geqq 2r$. La classe de σ_1' dans $K_G(T^*V)$ est égale à la classe de σ. On pose $L(x) = \sigma(x, 0)$. Comme σ est totalement bon, si $\|x\| \geqq r$, on a $L(x)^*L(x) \geqq c\|x\|^2 I_{E^+}$ et $L(x)L(x)^* \geqq c\|x\|^2 I_{E^-}$ où c est une constante positive. L'application $L(x)$ définit un morphisme G-équivariant de $\mathscr{E}^+$ dans $\mathscr{E}^-$. Identifions $\mathscr{E}^+$ avec $\mathscr{E}^-$ à l'infini grâce à l'application $L(x)$. Alors les fibrés $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}^-$ sont trivialisés à l'infini de telle sorte que σ_1' soit l'identité à l'infini. Le symbole σ_1' est donc trivial à l'infini et on appliquera à σ_1' la construction d'excision.

Tout d'abord, il est facile de vérifier que le chemin (49) de morphismes σ_t est un chemin de morphismes totalement bons. On a $\sigma_0 = \sigma$. En reprenant les arguments de [10], la formule de transgression des caractères de Chern montre que, pour tout $X \in \mathfrak{g}(s)$, on a

$$\int_{T^*V(s)} \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(X) = \int_{T^*V(s)} \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma_1))(X) .$$

Calculons maintenant l'indice cohomologique de σ_1'. Nous trivialisons toutes les données à l'infini (connexion, forme hermitienne) grâce à $L(x)$. On choisit $R = 2r$. Nous choissons une partition de l'unité $\phi_0(x) + \phi_1(x) = 1$ sur V telle que $\phi_0(x) = 1$ pour $\|x\| \leqq R$. De plus les fonctions ϕ_0 et ϕ_1 sont choisies G-invariantes. Sur le support de ϕ_1, on a donc $\sigma_1(x,\xi) = L(x)(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}$.

Considérons la connexion ∇^+ sur $\mathcal{E}^+ = V \times E^+$ définie par

$$\nabla^+ = \phi_0(x)d + \phi_1(x)L(x)^{-1} \circ d \circ L(x)$$

ainsi que la métrique hermitienne sur le fibré $\mathcal{E}^+$ définie, pour $v, w \in E^+$, par:

$$(v,w)_x = \phi_0(x)(v,w)_{E^+} + \phi_1(x)(L(x)v, L(x)w)_{E^-} \ .$$

On conserve la connexion $\nabla^- = d$ sur $\mathcal{E}^- = V \times E^-$. On conserve aussi le produit hermitien (v,w) sur $\mathcal{E}^-$. Notons $\sigma_1^-(x,\xi)$ l'adjoint de $\sigma_1(x,\xi)$ par rapport à la métrique $(v,w)_x$ sur $\mathcal{E}^+$. On a, lorsque x est grand,

$$\sigma_1^-(x,\xi) = L(x)^{-1}(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}. \tag{50}$$

Soit

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} \nabla^+ & i\sigma_1^- \\ i\sigma_1 & d \end{pmatrix} \ .$$

On pose $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(\sigma_1)$.

Notons $B_R = \{x \in V;\ \|x\| < R\}$. Sur l'ouvert $B_R \times V^*$, la superconnexion $\mathbb{A}_2$ coincide avec $\mathbb{A}_1$.

Considérons la superconnexion équivariante $\mathbb{D}$ sur le fibré $\mathcal{E}^- \oplus \mathcal{E}^-$ donnée par

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d & i(1 + \|\xi\|^2)^{1/2} \\ i(1 + \|\xi\|^2)^{1/2} & d \end{pmatrix} \ .$$

Grace à (24), on a $\mathrm{ch}(\mathbb{D})(X) = 0$.

Lorsque x est grand, la superconnexion $\mathbb{A}_2$ coincide par construction avec

$$\begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathbb{D} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ .$$

On a donc $\mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X) = 0$, pour x grand. D'autre part, comme $\sigma_1(x,\xi)$ est un bon morphisme (par rapport à ξ), la classe $\mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X)$ est à décroissance rapide sur les fibres de la projection $(x,\xi) \to x$. L'intégrale $\int_{T^*V} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X)$ est bien définie. Soit $i : V \to M$ un plongement G-équivariant de V dans une variété compacte M. D'après la formule (25), nous avons, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit,

$$\mathrm{index}_c^{G,M}(i_*[\sigma_1'])(s \exp X) = (2i\pi)^{-\dim V(s)} \int_{T^*V(s)} \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}_2)(X) J_{V(s)}^{-1}(X) D_s^{-1}(X) \ .$$

Il suffit donc de montrer qu' on a l'égalité, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$,

$$\int_{T^*V(s)} \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}_1)(X) = \int_{T^*V(s)} \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}_2)(X) \ .$$

Nous le montrons pour $s = 1$, le cas général étant démontrable de la même manière.

Par construction $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1$ sur $B_R \times V^*$. Nous établirons une formule pour $\int_{T^*V} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_i)(X)$ comme une somme d'une intégrale sur $B_R \times V^*$ et d'une intégrale sur le bord de $B_R \times V^*$. Cette formule établira l'égalité

$$\int_{T^*V} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1)(X) = \int_{T^*V} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X).$$

Cette égalité ne résulte pas directement des calculs de [10]. (Si $F_2(X)$ est la courbure équivariante de $\mathbb{A}_2$, le caractère de Chern Str $e^{F_2(X)}$ est nul pour x grand grâce à la supertrace, mais chaque bloc individuel de la matrice $e^{F_2(X)}$ n'est pas décroissant à l'infini).

Considérons le chemin de superconnexions

$$\mathbb{A}_1(t) = \begin{pmatrix} d & it\sigma_1^* \\ it\sigma_1 & d \end{pmatrix}.$$

Soit $X \mapsto F_1(t)(X)$ la courbure équivariante de $\mathbb{A}_1(t)$. Soit

$$v(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1^* \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a

$$F_1(t)(X) = -t^2 v(\sigma_1)^2 + \begin{pmatrix} \rho^+(X) & 0 \\ 0 & \rho^-(X) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & itd\sigma_1^* \\ itd\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sur l'ouvert $(B - B_R) \times V^*$, on a

$$v(\sigma_1)^2(x, \xi) = (1 + \|\xi\|^2) \begin{pmatrix} L^*(x)L(x) & 0 \\ 0 & L(x)L(x)^* \end{pmatrix} .$$

Rappelons que $L(x)^*L(x) \geqq c\|x\|^2 I_{E^+}$ et $L(x)L(x)^* \geqq c\|x\|^2 I_{E^-}$, où c est une constante positive. Soit

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A}_1(t))(X) = \mathrm{Str}(e^{F_1(t)(X)}) .$$

On a

$$\frac{d}{dt}\mathrm{ch}(\mathbb{A}_1(t)) = d_{\mathfrak{g}}\alpha_1(t)$$

où $\alpha_1(t)$ est la forme de transgression:

$$\alpha_1(t)(X) = i\,\mathrm{Str}(v(\sigma_1)e^{F_1(t)(X)}) .$$

On voit comme dans [10] que lorsque X varie dans un compact de $\mathfrak{g}$ et pour $t \geqq 1$:

1. $\lim_{t\to\infty} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1(t))(X) = 0$ uniformément sur $(B - B_R) \times V^*$.
2. La forme $\alpha_1(t)(X)$ est rapidement décroissante en t, x, ξ sur $[1, \infty[\times (B - B_R) \times V^*$.

3. La forme $\beta_1(X) = \int_1^\infty \alpha_1(t)(X)dt$ est rapidement décroissante (en (x,ξ)) sur $(B - B_R) \times V^*$.

De la formule de transgression

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A}_1(T)) - \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1) = d_{\mathfrak{g}} \int_1^T \alpha_1(t)dt \,,$$

on déduit, en faisant tendre T vers l'infini, que, sur l'ouvert $(B-B_R)\times V^*$, on a $\mathrm{ch}(\mathbb{A}_1) = -d_{\mathfrak{g}}\beta_1$. Appliquons le théorème de Stokes. Soit $S_R = \{x;\ \|x\| = R\}$. Le bord δ_R de $(B - B_R) \times V^*$ est la variété $S_R \times V^*$. Comme β_1 est rapidement décroissante à l'infini sur $(B - B_R) \times V^*$, on a $\int_{(B-B_R)\times V^*} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1)(X) = \int_{\delta_R} \beta_1(X)$ et

$$\int_{V\times V^*} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1)(X) = \int_{B_R\times V^*} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1)(X) + \int_{S_R\times V^*} \beta_1(X)\,. \tag{51}$$

Considérons maintenant le chemin de superconnexions

$$\mathbb{A}_2(t) = \begin{pmatrix} \nabla^+ & it\sigma_1^- \\ it\sigma_1 & d \end{pmatrix} .$$

Soit $X \mapsto F_2(t)(X)$ la courbure équivariante de $\mathbb{A}_2(t)$. Soit

$$U_2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1^- \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit $\mathbb{D}_t$ la superconnexion:

$$\mathbb{D}_t = \begin{pmatrix} d & it(1+\|\xi\|^2)^{1/2} \\ it(1+\|\xi\|^2)^{1/2} & d \end{pmatrix} .$$

Grace à (24), on a $\mathrm{ch}(\mathbb{D}_t)(X) = 0$.

Lorsque x est grand, la superconnexion $\mathbb{A}_2(t)$ coincide avec

$$\begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathbb{D}_t \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} .$$

En particulier $\mathrm{ch}(\mathbb{A}_2(t))$ est une forme nulle pour x grand. Considérons la forme de transgression:

$$\alpha_2(t)(X) = i\,\mathrm{Str}(U_2(\sigma_1)e^{F_2(t)(X)})\,.$$

On voit alors que $\alpha_2(t)$ est nulle pour x grand.

Ainsi, lorsque X varie dans un compact de $\mathfrak{g}$,

1. $\lim_{t\to\infty} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_2(t))(X) = 0$ uniformément sur $(B - B_R) \times V^*$.
2. Pour $t \geqq 1$, la forme $\alpha_2(t)(X)$ est à support compact en x et est rapidement décroissante en t, ξ.
3. La forme $\beta_2(X) = \int_1^\infty \alpha_2(t)(X)dt$ est à support compact en x et rapidement décroissante en ξ sur $(B - B_R) \times V^*$.

De la formule de transgression

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A}_2(T)) - \mathrm{ch}(\mathbb{A}_2) = d_{\mathfrak{g}} \int_1^T \alpha_2(t)dt,$$

on déduit, en faisant tendre T vers l'infini, que, sur l'ouvert $(B - B_R) \times V^*$, on a $\mathrm{ch}(\mathbb{A}_2) = -d_{\mathfrak{g}}\beta_2$. En appliquant le théorème de Stokes, on obtient

$$\int_{V\times V^*} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X) = \int_{B_R\times V^*} \mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X) + \int_{S_R\times V^*} \beta_2(X)\,. \tag{52}$$

Mais, sur $B_R \times V^*$, on a $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. On a donc $\mathrm{ch}(\mathbb{A}_2)(X) = \mathrm{ch}(\mathbb{A}_1)(X)$ sur $B_R \times V^*$ et $\beta_1 = \beta_2$ sur $S_R \times V^*$. En comparant (51) et (52) on déduit notre proposition. $\square$

On peut établir de même une formule directe pour un symbole G-transversalement elliptique totalement bon sur V sans utiliser un plongement de V dans une variété compacte.

L'application moment sur T^*V est définie par $(f(x,\xi),X) = (X \cdot x, \xi)$. Elle est homogène de degré 2 par rapport à l'ensemble des variables (x,ξ) de T^*V. Soient $E^{\pm}$ des espaces vectoriels hermitiens munis de représentations unitaires de G. Soit σ une application G-équivariante de $V \oplus V^*$ dans l'espace vectoriel fixe $\mathrm{Hom}(E^+,E^-)$ telle que $\sigma(x,\xi)$ soit inversible en dehors d'un compact de $T^*_G V$. Soit

$$v(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^* \\ i\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

l'endomorphisme impair associé à σ.

Il est naturel d'imposer que σ soit G-transversalement bon par rapport aux deux variables (x,ξ).

Définition 34 *On dit qu'un symbole G-équivariant $\sigma : V \oplus V^* \to \mathrm{Hom}(E^+,E^-)$ est G-transversalement totalement bon si*

(1) *Le symbole $\sigma(x,\xi)$ ainsi que toutes ses dérivées $\partial_x^k \partial_\xi^l$ sont à croissance au plus polynomiales sur $V \oplus V^*$.*

(2) *Il existe $r > 0, a > 0$ et $c > 0$ tels que*

$$v(\sigma)^2(x,\xi) \geqq c(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)I$$

pour tout (x,ξ), tels que $\|f(x,\xi)\| \leqq a(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)$ et $(\|x\|^2 + \|\xi\|^2)^{1/2} \geqq r$.

Tout élément de $K_G(T^*_G V)$ est représentable par un morphisme G-transversalement totalement bon. Soit $\omega = (dx,\xi)$ la 1-forme canonique de T^*V. Soit

$$\mathbb{A}^{\omega}(\sigma) = \begin{pmatrix} d - i\omega & i\sigma^* \\ i\sigma & d - i\omega \end{pmatrix}$$

la superconnexion associée à σ et à la 1-forme de T^*V. Il est facile de voir comme dans [11] que, si ϕ est une fonction test sur $\mathfrak{g}$, la forme différentielle $\int_{\mathfrak{g}} \mathrm{ch}(\mathbb{A}^{\omega}(\sigma))(X)\phi(X)dX$ est rapidement décroissante sur $V \oplus V^*$.

Théorème 35 *Soit σ un morphisme G-tranversalement totalement bon sur $V \oplus V^*$. Soit*

$$\mathbb{A}^{\omega}(\sigma) = \begin{pmatrix} d - i\omega & i\sigma^* \\ i\sigma & d - i\omega \end{pmatrix}.$$

Alors, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit, on a l'égalité de fonctions généralisées:

$$\operatorname{index}_c^{G,V}(\sigma)(s \exp X) = (2i\pi)^{-\dim V(s)} \int_{T^*V(s)} \operatorname{ch}_s(\mathbb{A}^{\omega}(\sigma))(X) J_{V(s)}^{-1}(X) D_s^{-1}(X).$$

La démonstration de cette proposition est identique à la démonstration précédente, lorsque l'on remplace les intégrales de formes équivariantes en X par leur moyenne sur une fonction test ϕ.

5.2 L'indice cohomologique du symbole d'Atiyah

Donnons une deuxième démonstration de la formule de l'indice cohomologique du symbole d'Atiyah (théorème 31) basée sur la formule du théorème 35.

Le symbole $m(z, \xi) = z - i\xi$ est G-transversalement totalement bon sur V. On peut donc calculer $\operatorname{index}_c^{G,V}(m)$ grâce à la formule du théorème 35. Posons

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(m) = \begin{pmatrix} d & i\overline{m} \\ im & d \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour $X \in \mathfrak{g}$ suffisamment petit,

$$\operatorname{index}_c^{G,V}(m)(\exp X) = (2i\pi)^{-2} \int_{T^*V} e^{-id_X\omega} \operatorname{ch}(\mathbb{A})(X) J_V^{-1}(X).$$

On doit donc démontrer la formule suivante:

Proposition 36 *Si $X = \theta E$, avec θ petit,*

$$(2i\pi)^{-2} \int_{T^*V} e^{-id_X\omega} \operatorname{ch}(\mathbb{A})(X) J_V^{-1}(X) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}.$$

Démonstration. La courbure F de $\mathbb{A}$ est donnée par

$$F = \begin{pmatrix} -|m|^2 & id\overline{m} \\ idm & -|a|^2 \end{pmatrix}.$$

Le moment équivariant de la connexion triviale d sur le fibré équivariant $\mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ est la matrice donnée par l'action infinitésimale verticale de θE dans $\mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$, c'est-à-dire

$$\mu(\theta E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix}.$$

La courbure équivariante $F(\theta E)$ de $\mathbb{A}$ est donc

$$F(\theta E) = \begin{pmatrix} -|m|^2 & id\overline{m} \\ idm & -|m|^2 + i\theta \end{pmatrix}.$$

Grâce à la formule de Volterra, on a,

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A})(\theta E) = \frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}\,(-i\theta + d\bar{m}\wedge dm)e^{-|m|^2}\,.$$

Soit $\omega = \mathrm{Re}(\xi d\bar{z})$ la 1-forme canonique de T^*V. L'orientation symplectique de T^*V est l'opposée de l'orientation de $V \oplus V = \mathbb{C}^2$ donnée par la structure complexe de $\mathbb{C}^2$. Choisissons les nouvelles coordonnées $u = z - i\xi$ et $v = z + i\xi$ sur T^*V. Dans ces nouvelles coordonnées, on a $-id_X\omega = i\theta(|v|^2 - |u|^2)/4 - dv\wedge d\bar{v}/4 + du\wedge d\bar{u}/4$. Donc $e^{-id_X\omega}\,\mathrm{ch}(\mathbb{A})(\theta E)$ est égal à

$$\left(\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}\right)(e^{i|v|^2\theta/4}(1 - dv\wedge d\bar{v}/4))(e^{-i|u|^2\theta/4}(1 + du\wedge d\bar{u}/4))$$
$$\times(-i\theta + d\bar{u}\wedge du)e^{-|u|^2}\,.$$

Montrons que, pour $X = \theta E$,

$$\int_{T^*V} e^{-id_X\omega}\,\mathrm{ch}(\mathbb{A})(X) = -(2i\pi)^2 J_V(X)\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}\,.$$

On a

$$J_V(\theta E) = \left(\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}\right)\left(\frac{e^{-i\theta}-1}{-i\theta}\right)\,.$$

L'intégrale sur T^*V se décompose en produit d'intégrales en u, v. On a

$$\int_{\mathbb{C}} (e^{-i|u|^2\theta/4}(1 + du\wedge d\bar{u}/4))(-i\theta + d\bar{u}\wedge du)e^{-|u|^2}$$
$$= \int_{\mathbb{C}} e^{-|u|^2(1+i\theta/4)}(1 + i\theta/4)d\bar{u}\wedge du = 2i\pi\,.$$

En tenant compte des orientations, il reste à vérifier que

$$\int_{\mathbb{C}} e^{i|v|^2\theta/4} d\bar{v}\wedge dv = (2i\pi)\left(\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}\right)\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}\,.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\int_{\mathbb{C}} e^{i|v|^2\theta} d\bar{v}\wedge dv = (2i\pi)\int_0^{\infty} e^{i\xi\theta}\,d\xi.$$

Comme $\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta} = \int_0^1 e^{i\xi\theta}\,d\xi$, on obtient

$$\left(\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}\right)\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta} = \int_0^{\infty} e^{i\xi\theta}\,d\xi\,.$$

C'est l'égalité cherchée.

6 Appendice 2: Le calcul de l'indice analytique du symbole d'Atiyah

Soit $M = P_1(\mathbb{C})$ l'espace projectif et $i : V \to M$ l'injection de $V = \mathbb{C}$ dans $P_1(\mathbb{C})$. Dans cette section, nous donnons une démonstration directe du calcul de l'indice analytique de m en construisant un opérateur A sur l'espace projectif dont le symbole fournit un représentant de $i_*[m]$. Nous donnerons explicitement l'action de A dans une base orthonormale de $\Gamma(M, \mathscr{E}^{\pm})$, ce qui permettra de calculer facilement l'indice analytique de A.

Pour obtenir une base orthonormale de $L^2(M)$, il sera utile de décrire M comme espace homogène du groupe compact $U(2) \subset GL(2,\mathbb{C})$. Le groupe $GL(2,\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$ et donc sur l'ensemble $P_1(\mathbb{C})$ des lignes de $\mathbb{C}^2$. La variété $P_1(\mathbb{C}) = U_0 \cup U_1$ est recouverte par les deux ouverts:

$$U_0 = \{\mathbb{C}(ze_1 + e_2);\ z \in \mathbb{C}\},$$
$$U_1 = \{\mathbb{C}(e_1 + ze_2);\ z \in \mathbb{C}\}\ .$$

On note $p_\infty = \mathbb{C}e_1$. On a $P_1(\mathbb{C}) - \{p_\infty\} = U_0 = \mathbb{C}$. On voit donc que $M = P_1(\mathbb{C})$ est la compactification de $\mathbb{R}^2$ avec un point à l'infini.

Soit

$$G = S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \theta \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

L'action de $G \subset GL(2,\mathbb{C})$ sur $P^1(\mathbb{C})$ prolonge naturellement l'action $z \mapsto e^{i\theta}z$ de S^1 sur $\mathbb{C}$. On notera $p_0 = \mathbb{C}e_2$.

Considérons le sous-groupe compact $K = U(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$. On a

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ |a|^2 + |c|^2 = 1;\ |b|^2 + |d|^2 = 1\ ;\right.$$
$$\left. a\bar{b} + c\bar{d} = 0;\ a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}.$$

On considèrera aussi a, b comme des fonctions sur K à valeurs complexes.

Soit T le sous-groupe de K formé des matrices diagonales:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix};\ \theta_i \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

L'application $k \mapsto k \cdot p_0$ fournit un isomorphisme:

$$M = P_1(\mathbb{C}) = U(2)/T\ .$$

Considérons le sous-groupe $SU(2)$ de $U(2)$. L'algèbre de Lie de $SU(2)$ a pour base J_1, J_2, J_3 avec

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Soit

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a

$$Y = \tfrac{1}{2}(-J_2 - iJ_3) .$$

Pour $\tau = (m_1, m_2)$, on note μ_τ le caractère de T défini par

$$\mu_\tau\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\right) = e^{im_1\theta_1}\, e^{im_2\theta_2} .$$

On note $\mathbb{C}_\tau$ l'espace $\mathbb{C}$ muni de la représentation μ_τ de T. On note $\mathscr{L}_\tau = K \times_T \mathbb{C}_\tau$ le fibré en lignes associé. L'espace des sections C^∞ de $\mathscr{L}_\tau$ s'identifie à l'espace

$$\Gamma_\tau = \{\phi \in C^\infty(K);\ \phi(kt) = \mu_\tau(t)^{-1}\phi(k),\ \text{pour } k \in K,\ t \in T\} .$$

L'espace Γ_τ est un sous-espace de $C^\infty(K)$ stable pour la représentation à gauche L du groupe K.

Remarquons que la fonction $k \mapsto a(k)$ est une fonction dans $\Gamma_{(-1,0)}$ tandis que la fonction $k \mapsto b(k)$ est dans $\Gamma_{(0,-1)}$. On notera encore

$$a : \Gamma_\tau \to \Gamma_{\tau+(-1,0)}$$

l'opérateur de multiplication par la fonction $a(k)$ et

$$b : \Gamma_\tau \to \Gamma_{\tau+(0,-1)}$$

l'opérateur de multiplication par la fonction $b(k)$. La section a est inversible sur l'ouvert U_0. Elle s'annule au point p_∞. La section b est inversible sur l'ouvert U_1. Elle s'annule au point p_0.

Soit $V \in \mathfrak{k}$ un élément de l'algèbre de Lie de K. On note $\mathscr{R}(V)$ le champ de vecteurs sur K tel que $(\mathscr{R}(V) \cdot \phi)(k) = \frac{d}{dt}\phi(k \exp tV)|_{t=0}$. L'opérateur $\mathscr{R}(V)$ commute avec la représentation à gauche de K. On note $\mathscr{R}(Y) = \frac{1}{2}(-\mathscr{R}(J_2) - i\mathscr{R}(J_3))$. Remarquons que

$$\mathscr{R}(Y) : \Gamma_\tau \to \Gamma_{\tau+(1,-1)} .$$

Soit $\Delta = -(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$ l'élément de Casimir de $SU(2)$. On note encore Δ l'opérateur $-(\mathscr{R}(J_1)^2 + \mathscr{R}(J_2)^2 + \mathscr{R}(J_3)^2)$. L'opérateur $\sqrt{1+\Delta}$ est un opérateur pseudo-différentiel sur $C^\infty(K)$. Il laisse stable chacun des espaces Γ_τ. On note $\Omega : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ l'opérateur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\Delta}$. C'est un opérateur pseudo-différentiel. Considérons l'opérateur pseudo-différentiel $A : C^\infty(M) \to \Gamma_{(0,-1)}$ défini par

$$A = -a\mathscr{R}(Y) - b\Omega .$$

Considérons l'action naturelle $L(g)$ de $G \subset K$ sur Γ_τ par translation à gauche. On voit que

$$AL(g) = e^{i\theta}L(g)A$$

pour $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut donc considérer A comme un opérateur pseudo-différentiel G-équivariant si on munit $\Gamma_{(0,-1)}$ de la représentation $e^{i\theta}L$.

Proposition 37 *L'opérateur A est un opérateur pseudo-différentiel G-transversalement elliptique. Le symbole principal $\sigma(A)$ est un représentant de l'élément $i_*[m]$.*

Démonstration. Il est clair que le symbole principal de A au dessus du point à l'infini $a = 0, b = 1$ est égal à $-|\xi|$ et est trivial.

On paramétrise l'ouvert U_0 par $z \in \mathbb{C}$ en faisant correspondre à z la ligne $\mathbb{C}(ze_1 + e_2)$. Si

$$k_0(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix},$$

alors $k_0(z) \cdot p_0$ est dans l'ouvert U_0 et de coordonnée z. On identifie l'espace des sections C^∞ de $\mathscr{L}_\tau$ définies au-dessus de U_0 à $C^\infty(U_0)$ par $C_0\phi(z) = \phi(k_0(z))$. L'opérateur $\mathscr{R}(Y) : C^\infty(M) \to \Gamma_{(1,-1)}$ devient sur la carte U_0 l'opérateur

$$\mathscr{R}(Y) = -(1 + |z|^2)\partial_{\bar{z}}\,.$$

Sur l'ouvert U_0 paramétrisé par z, le symbole $\sigma(A)$ est donné par

$$\sigma(A) = \frac{1}{2}(1 + |z|^2)^{1/2}(i\xi - z|\xi|)\,.$$

En particulier, l'opérateur A est G-transversalement elliptique. Il est clair que $\sigma(A)$ est homotope à m. □

Proposition 38 *L'indice équivariant de l'opérateur A est*

$$\mathrm{index}^G(A) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\theta}\,.$$

Démonstration. Soit $V = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$. On note $V_n = S^n V$. L'espace V_n est de dimension $(n+1)$. Il a pour base $e_1^n, e_1^{n-1}e_2, \ldots, e_2^n$. L'espace V_n est un espace de représentation de $U(2)$. L'espace V_n est muni d'un produit scalaire hermitien $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ invariant par $G = U(2)$. On normalise ce produit de telle sorte que $\|e_1^p e_2^q\|^2 = p!q!$.

Pour $P \in V_{2j}$ et $k \in U(2)$, on note $u(P)$ la fonction sur K définie, pour $k \in K$, par

$$u(P)(k) = (\det k)^j \langle k^{-1}P, e_1^j e_2^j\rangle\,.$$

On voit que $u(P)(kt) = u(P)(k)$ pour tout $k \in K$ et $t \in T$. Donc la fonction $u(P)$ est une fonction sur $M = K/T$. On obtient la décomposition orthonormale

$$L^2(M) = \bigoplus_{j \geqq 0} u(V_{2j})\,.$$

Si $Q \in V_{2j+1}$, on note $v(Q)$ la fonction sur K définie par

$$v(Q)(k) = (\det k)^{j+1} \langle k^{-1}Q, e_1^{j+1} e_2^j\rangle\,.$$

On obtient la décomposition orthonormale

$$\Gamma_{(0,-1)} = \bigoplus_{j \geqq 0} v(V_{2j+1}) .$$

Si $P \in V_{2j}$, alors $Pe_2 \in V_{2j-1}$.

Lemme 39 *On a*:

$$A \cdot u(P) = v(Pe_2) \tag{53}$$

pour tout $P \in V_{2j}$.

Remarque 40 En réalité, nous avons construit l'opérateur A à partir de cette formule simple sur les coefficients de représentations de $U(2)$.

Démonstration. Soit $P \in V_{2j}$ et $k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$.

On a $k^{-1}P \in V_{2j}$. Ecrivons

$$k^{-1}P = c_0(k)e_1^j e_2^j + c_1(k)e_1^{j+1}e_2^{j-1} + c_{-1}(k)e_1^{j-1}e_2^{j+1} + \cdots .$$

On a $u(P)(k) = (j!)^2(\det k)^j c_0(k)$. On vérifie que $-\mathscr{R}(Y)c_0 = (j+1)c_1$. D'autre part, le Casimir Δ opère dans V_n par le scalaire $(n+1)^2 - 1$. On voit donc que $\Omega \cdot u(P) = (j+1)u(P)$ et on obtient

$$A \cdot u(P) = (j!)^2(\det k)^j (a(j+1)c_1 - b(j+1)c_0) .$$

Calculons $v(Pe_2)(k) = (\det k)^{(j+1)}\langle (k^{-1} \cdot P)(k^{-1}e_2), e_1^{j+1}e_2^j\rangle$. Comme $k^{-1}e_2 = (\det k)^{-1}(-be_1 + ae_2)$, on obtient

$$v(Pe_2)(k) = (\det k)^j(-bc_0(k) + ac_1(k))(j+1)!j! . \qquad \square$$

Considérons l'expression (53) de A sur la base de $L^2(M)$ donnée par les éléments $u(P)$ avec $P \in V_{2j}$. On voit que cet opérateur est injectif. Son conoyau est

$$Coker(A) = \sum_{j \geqq 0} \mathbb{C} v(e_1^{2j+1}) .$$

Soit $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $L(g)v(e_1^{2j+1}) = e^{ij\theta}v(e_1^{2j+1})$. La trace de la représentation de $e^{i\theta}L(g)$ dans $Coker(D)$ est donnée par $\sum_{j=1}^{\infty} e^{j\theta}$. On obtient donc la proposition.

Références

1. M.F. Atiyah: Elliptic operators and compact groups. Lecture Notes in Mathematics **401**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1974
2. M.F. Atiyah, G.B. Segal: The index of elliptic operators II. Ann. Math. **87**, 531–545 (1968)
3. M.F. Atiyah, I.M. Singer: The index of elliptic operators. I. Ann. Math. **87**, 484–530 (1968)

4. M.F. Atiyah, I.M. Singer: The index of elliptic operators. III. Ann. Math. **87**, 546–604 (1968)
5. M.F. Atiyah, I.M. Singer: The index of elliptic operators. IV. Ann. Math. **93**, 139–141 (1971)
6. N. Berline, E. Getzler, M. Vergne: Heat kernels and Dirac operators. Grundlehren der math. Wissenschaft **298**. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991
7. N. Berline, M. Vergne: Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. C. R. Acad. Sci. Paris **295**, 539–541 (1982)
8. N. Berline, M. Vergne: The equivariant index and Kirillov character formula. Am. J. Math. **107**, 1159–1190 (1985)
9. N. Berline, M. Vergne: Indice équivariant et caractère d'une représentation induite. In D-modules and Microlocal geometry. p. 173–186. Walter de Gruyter, Berlin New York, 1992
10. N. Berline, M. Vergne: The equivariant Chern character and index of G-invariant operators. In D-modules, representation theory and quantum groups, Lecture Notes in Math. **1565**, pp 157–200, Springer, Berlin Heidelberg New York 1992
11. N. Berline, M. Vergne: The equivariant Chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index. Invent. math. **124**, 11–49 (1996)
12. J. Block, E. Getzler: Equivariant cyclic homology and equivariant differential forms. Annales de l'Ec. Norm. Sup. **27**, (1994)
13. M. Duflo, M. Vergne: Cohomologie équivariante et descente. Astérisque **215**, 5–108 (1993)
14. D. Quillen: Superconnections and the Chern character. Topology **24**, 89–95 (1985)
15. M. Vergne: Sur l'indice des opérateurs transversalement elliptiques. C. R. Acad. Sci. Paris **310**, 329–332 (1990)
16. M. Vergne: Geometric quantization and equivariant cohomology. Proceedings of the European Congress of mathematics. Paris 1992, pp 249–295, Birkhaüser, Berel Boston Berlin, 1994, Progress in Mathematics