C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 583-585 (17 mars 1969). Série A

THÉORIE DES GROUPES. — *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie.* Note (*) de M. **Michel Duflo** et Mlle **Michèle Vergne**, transmise par M. Henri Cartan.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps $\mathfrak{k}$, et $\mathfrak{g}^\star$ le dual de $\mathfrak{g}$, muni de sa structure canonique de $\mathfrak{g}$-module. Si $f \in \mathfrak{g}^\star$, on notera $\mathfrak{g}_f$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$, i. e. $\mathfrak{g}_f = \{ x \in \mathfrak{g}$ tels que $f \circ \operatorname{ad} x = 0 \}$.

Soit r la dimension minimale des sous-algèbres $\mathfrak{g}_f$ de $\mathfrak{g}$. Le but de cette Note est de démontrer dans les deux cas suivants :

A. $\mathfrak{k}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;

B. $\mathfrak{k}$ est de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ est algébrique,

le :

Théorème. — *Soit f un point de $\mathfrak{g}^\star$ tel que* $\dim \mathfrak{g}_f = r$. *Alors $\mathfrak{g}_f$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration :

A. *Corps de base* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$:

Soient U un ouvert de $\mathfrak{g}^\star$ et φ une fonction numérique indéfiniment différentiable définie sur U.

Si f est un point de U, on notera $D_f \varphi$ la différentielle de la fonction φ au point f, considérée comme élément de $\mathfrak{g}$.

Si $x \in \mathfrak{g}$, on notera $\sigma(x)$ l'opérateur différentiel défini par

$$(\sigma(x)\,\varphi)(f) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \varphi(f - t x . f).$$

On a donc

$$(\sigma(x)\,\varphi)(f) = f([x, D_f \varphi]).$$

Ceci prouve que pour toute fonction φ localement invariante sur U [i. e. $\sigma(x)\,\varphi = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$] et pour tout point f de U, $D_f \varphi$ appartient à la sous-algèbre $\mathfrak{g}_f$ de $\mathfrak{g}$.

D'autre part, pour tout $x \in \mathfrak{g}_f$ et pour toute fonction φ on a

$$D_f(\sigma(x)\,\varphi) = [x, D_f \varphi].$$

Il en résulte la :

Proposition. — *Si φ est une fonction localement invariante sur l'ouvert* U, *pour tout f dans* U, *$D_f \varphi$ appartient au centre de $\mathfrak{g}_f$.*

Soit maintenant $f \in \mathfrak{g}^\star$, tel que $\mathfrak{g}_f$ soit de dimension r; alors il existe un voisinage U de f tel que pour tout $u \in$ U, $\dim \mathfrak{g}_u = r$. Autrement dit, la donnée des champs de vecteurs $\sigma(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, sur U définit une distribution involutive de dimension $n-r$, et le théorème de Frobenius [1] dit que, dans ces conditions, il existe des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, C^∞ au voisinage de f, localement invariantes, et telles que les différentielles $D_f\varphi_i$ de ces fonctions au point f soient linéairement indépendantes. La sous-algèbre $\mathfrak{g}_f$ est alors engendrée par les éléments $D_f\varphi_i$, elle est donc abélienne.

Corollaire. — *Soit $f\in\mathfrak{g}^\star$; alors $\mathfrak{g}_f$ contient une sous-algèbre abélienne de dimension r.*

En effet, il en est ainsi sur un ouvert de dense $\mathfrak{g}^\star$ et un argument standard de compacité de la grassmannienne des sous-espaces de dimension r de $\mathfrak{g}$ donne le corollaire.

B. *Corps $\mathfrak{k}$ de caractéristique* o, *algèbre de Lie algébrique* $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, canoniquement isomorphe à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}^\star$.

Si $f\in\mathfrak{g}^\star$, on notera $f(\mathrm{P})$ la valeur du polynôme P au point f, D_f l'unique application de $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$ telle que

$$D_f(x)=x \qquad \text{si} \quad x\in\mathfrak{g},$$
$$D_f(\mathrm{PQ})=f(\mathrm{P})\,D_f(\mathrm{Q})+f(\mathrm{Q})\,D_f(\mathrm{P}),$$

$\sigma(x)$ la dérivation de l'algèbre $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ prolongeant la dérivation $\operatorname{ad} x$ de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})^{\mathrm{I}}$ l'anneau des invariants de $\mathfrak{f}(\mathfrak{g})$, i. e. l'ensemble des polynômes P annulés par toutes les dérivations $\sigma(x)$.

On a alors les relations suivantes :

1° Si $f\in\mathfrak{g}^\star$ et $\mathrm{P}\in\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$,

$$f(\sigma(x)\,\mathrm{P})=f([x, D_f\mathrm{P}]);$$

2° Si $x\in\mathfrak{g}_f$ et $\mathrm{P}\in\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$,

$$D_f(\sigma(x)\,\mathrm{P})=[x, D_f\mathrm{P}].$$

On en déduit donc la :

Proposition. — *Soient f un point de $\mathfrak{g}^\star$, et* P *un polynôme invariant; alors $D_f\mathrm{P}$ appartient au centre de $\mathfrak{g}_f$.*

Mais, d'autre part, si (e_i), $1\leq i\leq n$, est une base de $\mathfrak{g}$, et si $f\in\mathfrak{g}^\star$, la dimension de l'algèbre $\mathfrak{g}_f$ est égale à $n-l(f)$, où $l(f)$ est le rang de la matrice $(f[e_i, e_j])_{i,j}$. Le rang maximal de cette matrice est égal, d'une part à $n-r$, d'autre part au rang de la matrice $([e_i, e_j])_{i,j}$ dans le corps des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{g}^\star$. D'après [2], il existe r polynômes invariants $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_r$ algébriquement indépendants. Il existe donc un ouvert de Zariski U dans $\mathfrak{g}^\star$ tel que pour tout f dans U, le rang de la matrice $(f([e_i, e_j]))_{i,j}$ soit égal à $n-r$, et les éléments $D_f\mathrm{P}_1, D_f\mathrm{P}_2, \ldots, D_f\mathrm{P}_r$ soient linéairement indépendants.

$\mathfrak{g}_f$ est donc abélienne pour tout f dans U.

Le théorème 1 dans le cas B résulte alors de la

Proposition. — *Soit* $f \in \mathfrak{g}^*$; *alors* $\mathfrak{g}_f$ *contient une sous-algèbre abélienne de dimension* r.

En effet, il en est ainsi sur un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$; pour conclure, on utilise alors le fait que la grassmannienne des sous-espaces de dimension r de $\mathfrak{g}$ est une variété algébrique complète.

(*) Séance du 10 mars 1969.

(1) C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, I, p. 89.

(2) J. Dixmier, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 89, 1957, p. 336.

(M. D. : 109, *boulevard de la République,*
92-Saint-Cloud, Hauts-de-Seine;
Mlle M. V. : 11, *rue de Quatrefages,*
75-Paris, 5e.)