ALGÈBRES DE LIE. — *Sur le foncteur de Zuckerman.* Note de **Michel Duflo** et **Michèle Vergne**, présentée par Michel Duflo, Correspondant de l'Académie.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe. Nous donnons une description simple de l'action de $\mathfrak{g}$ dans les foncteurs de Zuckerman et reprouvons un résultat classique de dualité.

LIE ALGEBRAS. — On Zuckerman's functor.

Let $\mathfrak{g}$ *be a complex Lie algebra. We give a simple description of the action of* $\mathfrak{g}$ *in the Zuckerman's functors and reprove a well known duality result.*

INTRODUCTION. — Soient G un groupe de Lie réel, K un sous-groupe compact maximal, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie complexes, H un sous-groupe fermé de K. G. Zuckerman a introduit des foncteurs $\Gamma^i (i \geqq 0)$ de la catégorie des ($\mathfrak{g}$-H)-modules dans la catégorie des ($\mathfrak{g}$-K)-modules qui jouent un rôle important dans la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples (*voir* [4], [5] par exemple). Si la structure de K-module de Γ^i est simple à décrire en terme de cohomologie relative de la paire ($\mathfrak{k}$-H), il n'en était pas de même de la structure de $\mathfrak{g}$-module. Nous résolvons ici ce problème de la manière suivante. Soit V un ($\mathfrak{g}$-H)-module. Nous construisons un complexe de ($\mathfrak{g}$-H)-modules dont la cohomologie est K-finie et fournit les foncteurs de Zuckerman. Cette construction rend évidente une propriété de dualité conjecturée par G. Zuckerman, fondamentale dans les applications aux représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples, discutée ou établie dans [2], [3], [5].

Signalons que Y. Benoist et D. Wigner ont trouvé indépendamment d'autres démonstrations intéressantes de la propriété de dualité. Nous remercions Y. Benoist, D. Vogan et D. Wigner pour d'utiles conversations.

I. UNE CONSTRUCTION DES MODULES DE ZUCKERMAN. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Soit K un groupe de Lie compact (non nécessairement connexe). On suppose que ($\mathfrak{g}$-K) forme une paire compatible : l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{k}$ de K est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, et K opère comme groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ par une action dont la différentielle est l'action adjointe de $\mathfrak{k}$ et qui induit dans $\mathfrak{k}$ la représentation adjointe. (On pourrait seulement supposer K algébrique comme dans [1].)

Soient H un sous-groupe fermé de K, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie complexe, et E un ($\mathfrak{k}$-H)-module. Rappelons la définition de la cohomologie relative $H^*(\mathfrak{k}, H, E)$. Soit $\mathfrak{k}^*$ le dual de $\mathfrak{k}$. Considérons l'espace vectoriel gradué $\Lambda \mathfrak{k}^* \otimes E$ [que nous identifierons à $\operatorname{Hom}(\Lambda \mathfrak{k}, E)$]. Si $Y \in \mathfrak{k}$, on note $i(Y)$ le produit intérieur par Y, $\lambda(Y)$ l'action naturelle de Y dans $\operatorname{Hom}(\Lambda \mathfrak{k}, E)$. On note d la différentielle, de sorte que l'on a $\lambda(Y) = i(Y) \circ d + d \circ i(Y)$. Le groupe H opère dans $\operatorname{Hom}(\Lambda \mathfrak{k}, E)$. On note $C^*(E)$ le sous-espace vectoriel des formes H-basiques, c'est-à-dire des formes annulées par les opérateurs $i(Y)$ $(Y \in \mathfrak{h})$ et invariantes par H. Il est stable par d et l'homologie du complexe $(C^*(E), d)$ est la cohomologie relative $H^*(\mathfrak{k}, H, E)$.

Soit F(K) l'algèbre des fonctions régulières sur K. Elle s'écrit :

$$F(K) = \bigoplus_{\delta} (E_\delta^* \otimes E_\delta) \tag{1}$$

où δ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de dimension finie de K, et où $E_\delta^* \otimes E_\delta$ est identifié à l'espace des coefficients $\langle f, kv \rangle$ $(v \in E_\delta, f \in E_\delta^*, k \in K)$. On note l et r les représentations régulières gauche et droite de K (ou de $\mathfrak{k}$) dans F(K). Considérons

0249-6291/87/03040467 $ 2.00

un ($\mathfrak{g}$-H)-module V. Nous noterons θ^V l'action de $\mathfrak{g}$ ou de H dans V. On pose $F(K, V) = F(K) \otimes V$. On identifie $F(K, V)$ à l'espace des fonctions régulières de K dans V, et l'on note encore l et r les représentations régulières gauche et droite de K (ou de $\mathfrak{k}$) dans $F(K, V)$. Nous définissons une structure de ($\mathfrak{k}$-H)-module ψ sur $F(K, V)$ par les formules :

$$(\psi(X)\varphi)(k) = \theta^V(X)\varphi(k) + (l(X)\varphi)(k)$$

$$(\psi(h)\varphi)(k) = \theta^V(h)\varphi(h^{-1}k) \qquad (X \in \mathfrak{k}, h \in H, \varphi \in F(K, V)).$$

Soit $i \geqq 0$. On sait (*cf.* [2]) que l'espace vectoriel sous-jacent au module de Zuckerman $\Gamma^i(V)$ est défini par :

$$\Gamma^i(V) = H^i(\mathfrak{k}, H, F(K, V)).$$

Nous allons expliciter la structure de ($\mathfrak{g}$-K)-module de $\Gamma^i(V)$.

Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $\varphi \in F(K, V)$. On pose :

$$(\Gamma(X)\varphi)(k) = \theta^V(k.X)\varphi(k) \qquad (k \in K).$$

Ceci définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $F(K, V)$. Il est immédiat de vérifier que Γ et ψ commutent. De même, la représentation r (de K ou $\mathfrak{k}$) et ψ commutent. D'autre part, on a :

$$r(k)\Gamma(X)r(k^{-1}) = \Gamma(k.X) \qquad (k \in K, X \in \mathfrak{g}). \tag{2}$$

On prolonge Γ et r en des représentations de $\mathfrak{g}$ et K (ou $\mathfrak{k}$) respectivement sur l'espace $\mathrm{Hom}(\Lambda\mathfrak{k}, F(K, V))$ en les faisant agir sur l'espace d'arrivée $F(K, V)$. Soit $Y \in \mathfrak{k}$. On définit un endomorphisme $I(Y)$ de degré -1 de $\mathrm{Hom}(\Lambda\mathfrak{k}, F(K, V))$ de la manière suivante. On identifie $\mathrm{Hom}(\Lambda\mathfrak{k}, F(K, V))$ et $F(K, \mathrm{Hom}(\Lambda\mathfrak{k}, V))$. On pose :

$$(I(Y)\mu)(k) = i(k.Y)\mu(k) \qquad (k \in K, \mu \in F(K, \mathrm{Hom}(\Lambda\mathfrak{k}, V)).$$

Proposition. — *Soit* $Y \in \mathfrak{k}$. *On a :* $\Gamma(Y) - r(Y) = d \circ I(Y) + I(Y) \circ d$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{A}(K)$ le complexe de De Rham des formes différentielles sur K à coefficients dans $F(K)$. On note ∂ la différentielle et $i(\xi)$ le produit intérieur par un champ de vecteurs ξ à coefficients dans $F(K)$. On identifie $\Lambda\mathfrak{k}^*$ à la sous-algèbre de $\mathscr{A}(K)$ des formes invariantes à droite par K, et $\mathscr{A}(K)$ à $\Lambda\mathfrak{k}^* \otimes F(K)$. Soit $\mathscr{L}(\xi)$ la dérivée de Lie. La relation $\mathscr{L}(\xi) = i(\xi) \circ \partial + \partial \circ i(\xi)$ est bien connue. Soit ξ le champ de vecteurs invariant à gauche sur K défini par Y. Il opère donc par action à droite dans K, et l'on a $\mathscr{L}(\xi) = 1 \otimes r(Y)$. On définit la différentielle δ et $I(Y)$ dans $\Lambda\mathfrak{k}^* \otimes F(K)$ comme plus haut (c'est le cas particulier $V = \mathbb{C}$). On voit que $\delta = -\partial$ et que $I(Y) = i(\xi)$. La proposition est donc établie dans le cas où V est trivial.

Soit X_j une base de $\mathfrak{k}$, et soit f_j la base duale de $\mathfrak{k}^*$. Considérons l'opérateur u défini dans $\mathscr{A}(K) \otimes V$ par la formule $u(\omega \otimes v) = \sum f_j \omega \otimes \theta^V(X_j)v$. On a $d = \delta \otimes 1 + u$. Il reste à vérifier la relation $u \circ I(Y) + I(Y) \circ u = \Gamma(Y)$. Par linéarité sur $F(K)$, elle résulte de la relation facile $u \circ i(X) + i(X) \circ u = \theta^V(X)$ pour $X \in \mathfrak{k}$.

C.Q.F.D.

Les représentations Γ de $\mathfrak{g}$ et r de K induisent pour tout $i \geqq 0$ des représentations, notées de la même manière, dans les espaces de cohomologie $\Gamma^i(V)$. La proposition ci-dessus montre que $\Gamma(Y)$ y opère comme $r(Y)$ pour $Y \in \mathfrak{k}$ et la formule (2) montre la compatibilité aux actions adjointes. On obtient donc :

THÉORÈME 1. — *Les représentations* Γ *et* r *munissent* $\Gamma^i(V)$ *d'une structure de* ($\mathfrak{g}$-K)-*module.*

Grâce à (1) la structure de K-module est facile à décrire. On a :

$$\Gamma^i(V)=\bigoplus_{\delta} H^i(\mathfrak{k}, H, E_\delta^* \otimes V) \otimes E_\delta.$$

Des arguments cohomologiques standards montrent que Γ^i est le i-ième foncteur dérivé du foncteur Γ^0 de la catégorie des ($\mathfrak{g}$-H)-modules dans la catégorie des ($\mathfrak{g}$-K)-modules. Lorsque K est connexe, l'application $\varphi \to \varphi(1)$ de l'espace des invariants $F(K, V)^{\mathfrak{k}}$ dans V induit un isomorphisme de $\Gamma^0(V)$ sur le sous-$\mathfrak{g}$-module de V formé des vecteurs $\mathfrak{k}$-finis. On retrouve donc la définition classique de Zuckerman. Dans le cas général, nous renvoyons à [3] pour une autre description de Γ^0.

Supposons que V soit un ($\mathfrak{g}$-K)-module. On considère dans F(K, V) l'application qui à φ associe la fonction $k \to k^{-1}\varphi(k)$. Après cette transformation, les constructions qui précèdent deviennent limpides. On remarque que $H^i(\mathfrak{k}, H, F(K))$, muni de sa structure naturelle de K-module, et de la structure de $\mathfrak{g}$-module trivial, est un ($\mathfrak{g}$-K)-module et on voit que $\Gamma^i(V)$ est isomorphe à $H^i(\mathfrak{k}, H, F(K)) \otimes V$.

II. APPLICATION À LA DUALITÉ. — Soit n la dimension de $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$. Comme H est compact, l'action naturelle de H dans $\Lambda^n(\mathfrak{k}/\mathfrak{h})$ est un caractère $\varepsilon_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}}$ de différentielle nulle, et on peut le considérer comme un ($\mathfrak{g}$-H)-module trivial sur $\mathfrak{g}$. Soient V et W deux ($\mathfrak{g}$-H)-modules, et supposons donnée une forme bilinéaire ($\mathfrak{g}$-H)-invariante $\langle -, - \rangle$ sur $V \times W$ à valeurs dans les nombres complexes. Identifions $F(K, W \otimes \Lambda^n(\mathfrak{k}/\mathfrak{h}))$ et $F(K, W) \otimes \Lambda^n(\mathfrak{k}/\mathfrak{h})$. On définit une forme bilinéaire sur $\Lambda\mathfrak{k}^* \otimes F(K, V) \times \Lambda\mathfrak{k}^* \otimes F(K, W) \otimes \Lambda^n(\mathfrak{k}/\mathfrak{h})$ par la formule :

$$\langle \omega_1 \otimes f_1, \omega_2 \otimes f_2 \otimes \zeta \rangle = \langle \omega_1 \wedge \omega_2, \zeta \rangle \int_K \langle f_1(k), f_2(k) \rangle \, dk. \tag{3}$$

Cette forme est invariante pour la structure de K-module définie par r, et pour la structure de $\mathfrak{g}$-module définie par Γ. Si

$$\mu_1 \in \Lambda^i \mathfrak{k}^* \otimes F(K, V) \quad \text{et} \quad \mu_2 \in \Lambda^{n-i-1}\mathfrak{k}^* \otimes F(K, W) \otimes \Lambda^n(\mathfrak{k}/\mathfrak{h})$$

sont des éléments H-basiques, on a $\langle d\mu_1, \mu_2 \rangle + (-1)^i \langle \mu_1, d\mu_2 \rangle = 0$, car $\mathfrak{k}$ est unimodulaire. On a donc redémontré le

THÉORÈME 2. — *La forme* (3) *induit par passage au quotient une forme bilinéaire* ($\mathfrak{g}$-K)-*invariante sur* $\Gamma^i(V) \times \Gamma^{n-i}(W \otimes \varepsilon_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}})$.

Reçue le 2 mars 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. DU CLOUX, *Foncteurs dérivés des vecteurs* $\mathfrak{g}$-*finis*, preprint, 1986.

[2] T. ENRIGHT et N. WALLACH, Notes on homological algebra and representations of Lie algebras, *Duke Math. J.*, 47, 1980, p. 1-15.

[3] A. W. KNAPP et D. VOGAN, *Duality theorems in relative Lie algebra cohomology*, Preprint, septembre 1986.

[4] D. VOGAN, *Progress in Mathematics*, 15, Birkhaüser, Boston, 1981.

[5] N. WALLACH, *Real reductive groups*, livre en préparation.

M. D. : *U.A. n° 748 du C.N.R.S.*, Tour n° 45-55, *Université Paris-VII*, 2, *place Jussieu*, 75251 *Paris Cedex* 05;

M. V. : *U.A. n° 748 du C.N.R.S.*, *Université Paris-VII*, 75005 *Paris et M.I.T.*