Annales scientifiques de l'É.N.S.

Michèle Vergne

# Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 3, nº 3 (1970), p. 353-384.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_3_353_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4e série, t. 3, 1970, p. 353 à 384.

# ÉTUDE DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS INDUITES D'UN GROUPE DE LIE RÉSOLUBLE EXPONENTIEL

PAR MICHÈLE VERGNE

## INTRODUCTION.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle nilpotente et G le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Kirillov a montré qu'il existe une correspondance bijective entre l'espace $\mathfrak{g}^\star/G$ des orbites de G agissant par la représentation coadjointe dans l'espace dual $\mathfrak{g}^\star$ de $\mathfrak{g}$ et l'espace $\hat{G}$ des classes de représentations unitaires irréductibles de G [6].

Les résultats de Kirillov qui conduisent à cette correspondance sont les suivants :

A. Toute représentation unitaire irréductible de G peut s'obtenir par induction d'un caractère $\chi$ d'un sous-groupe H fermé connexe de G; soit alors $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et $f$ le caractère de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ défini par $d\chi = if$ (on a donc $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$).

Désignons encore par $f$ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongeant $f$ sur $\mathfrak{h}$, et soit $B_f$ la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. Alors $\mathfrak{h}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme $B_f$.

B. Pour toute $f \in \mathfrak{g}^\star$, notons $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble de sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ dont le sous-espace vectoriel sous-jacent soit totalement isotrope maximal pour la forme $B_f$; et si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$ notons $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation induite à G par le caractère $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ du groupe analytique H d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ dont la différentielle $d\chi_{f, \mathfrak{h}}$ est $if|\mathfrak{h}$.

Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$, alors il existe un $\mathfrak{h}$ appartenant à $M(f; \mathfrak{g})$. La représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est irréductible et ne dépend pas de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ choisie.

C. On peut donc associer à toute orbite O de G dans $\mathfrak{g}^*$ un élément $\rho(O)$ de $\hat{G}$ en posant

$$\rho(O) = \rho(f;\, \mathfrak{h};\, \mathfrak{g}) \qquad \text{pour} \quad f \in O \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} \in M(f;\, \mathfrak{g}).$$

L'application $\rho$ est bijective.

Bernat [1] a alors étendu cette correspondance bijective entre $\hat{G}$ et l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ à un groupe G résoluble exponentiel (on dit qu'un groupe G est résoluble exponentiel, s'il est résoluble et simplement connexe et si l'application exponentielle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans G est un difféomorphisme).

Les résultats de Bernat qui permettent d'établir cette correspondance sont les suivants :

A. reste identique.

Par contre, si $\mathfrak{h} \in M(f;\, \mathfrak{g})$, il est bien connu que la représentation $\rho(f;\, \mathfrak{h};\, \mathfrak{g})$ n'est en général pas irréductible. On notera $I(f;\, \mathfrak{g})$ le sous-ensemble de $M(f;\, \mathfrak{g})$ formé des $\mathfrak{h}$ telles que $\rho(f;\, \mathfrak{h};\, \mathfrak{g})$ soit irréductible. Alors l'assertion B doit être remplacée par l'assertion suivante :

B′. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe un $\mathfrak{h}$ appartenant à $I(f;\, \mathfrak{g})$, et la représentation irréductible $\rho(f;\, \mathfrak{h};\, \mathfrak{g})$ ne dépend pas de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $I(f;\, \mathfrak{g})$ choisie.

On associe alors de même à toute orbite O de G dans $\mathfrak{g}^*$ un élément $\rho(O)$ de $\hat{G}$, en posant

$$\rho(O) = \rho(f;\, \mathfrak{h};\, \mathfrak{g}) \qquad \text{pour} \quad f \in O \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} \in I(f;\, \mathfrak{g}).$$

C est alors identique.

Il se pose alors naturellement le problème de la détermination du sous-ensemble $I(f;\, \mathfrak{g})$ de $M(f;\, \mathfrak{g})$, et ceci a été résolu par Pukanszky [9]. Rappelons le résultat.

Si $\mathfrak{h} \in M(f;\, \mathfrak{g})$, alors on démontre immédiatement que $H.f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$ (si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $H.f$ orbite de $f$ par une représentation unipotente du groupe H est aussi fermée d'après un théorème de Rosenlicht, *voir* [10]); par conséquent, on a $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$ quelle que soit $\mathfrak{h} \in M(f;\, (\mathfrak{g}))$.

Le critère d'irréductibilité de Pukanszky s'énonce ainsi : Soit G un groupe résoluble exponentiel; alors $\mathfrak{h}$ appartient à $I(f;\, \mathfrak{g})$ si et seulement si $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$.

Enfin Pukanszky [8] a aussi montré que si $\mathfrak{h} \in M(f;\, \mathfrak{g})$, la représentation $\rho(f;\, \mathfrak{h};\, \mathfrak{g})$ (non nécessairement irréductible) se décompose cependant en somme finie de représentations irréductibles, sans toutefois préciser cette décomposition.

On déterminera dans cet article la décomposition exacte de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$. Énonçons dès à présent le résultat; il s'agit de déterminer les orbites O de G dans $\mathfrak{g}^*$ telles que la représentation $\rho(\mathrm{O})$ intervienne effectivement dans la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et la multiplicité d'une telle représentation.

Le critère d'irréductibilité de Pukanszky ainsi que l'étude d'exemples simples suggèrent que cette décomposition est en rapport avec l'action du groupe H dans l'espace affine $(f+\mathfrak{h}^{\perp})$. Ceci est bien le cas : Une représentation $\rho(\mathrm{O})$ intervient dans la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ si et seulement si $\mathrm{O} \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$ est un ouvert non vide de $(f+\mathfrak{h}^{\perp})$. Le groupe H agit dans $\mathrm{O} \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$. Il est facile de voir alors que chaque orbite de H dans $\mathrm{O} \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$ est ouverte dans $(f+\mathfrak{h}^{\perp})$. On démontrera que le nombre $c(\mathrm{O}; f; \mathfrak{h})$ de ces orbites est fini et est égal à la multiplicité de la représentation $\rho(\mathrm{O})$ dans la décomposition $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$.

Cette multiplicité peut être strictement plus grande que 1 comme le montrera l'exemple de la fin de l'article, et contrairement à ce qui avait été un peu trop rapidement conjecturé dans [11].

Enfin nous n'utiliserons dans cet article que les résultats de la thèse de Bernat, et par conséquent un intérêt non négligeable sera de retrouver le critère d'irréductibilité de Pukanszky.

## I. — **Résultats généraux.**

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif. Soit B une forme bilinéaire alternée sur V et soit N(B) son noyau, c'est-à-dire

$$\mathrm{N}(\mathrm{B}) = \{ x \in \mathrm{V};\ \mathrm{B}(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathrm{V} \}.$$

Soit $\tilde{\mathrm{B}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}^*$ l'application de V dans son dual définie par $\tilde{\mathrm{B}}(x)(y) = \mathrm{B}(y, x)$.

Si W est un sous-espace de V, on notera $\mathrm{W}^{\perp}$ l'orthogonal de W dans $\mathrm{V}^*$, c'est-à-dire

$$\mathrm{W}^{\perp} = \{ \varphi \in \mathrm{V}^*;\ \varphi(w) = 0 \text{ pour tout } w \in \mathrm{W} \}$$

et $\mathrm{W}^{\mathrm{B}}$ l'orthogonal de W dans V par rapport à la forme B, c'est-à-dire

$$\mathrm{W}^{\mathrm{B}} = \{ x \in \mathrm{V};\ \mathrm{B}(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in \mathrm{W} \}.$$

On vérifie immédiatement les formules suivantes :

$$(a) \qquad \operatorname{Ker} \tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{N}(\mathrm{B}), \qquad \operatorname{Im} \tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{N}(\mathrm{B})^{\perp};$$

$$(b) \qquad \dim \mathrm{W}^{\mathrm{B}} = \dim \mathrm{V} - \dim \mathrm{W} + \dim (\mathrm{W} \cap \mathrm{N}(\mathrm{B})),$$

$$(c) \qquad (\mathrm{W}^{\mathrm{B}})^{\mathrm{B}} = \mathrm{W} + \mathrm{N}(\mathrm{B});$$

$$(d) \qquad \tilde{\mathrm{B}}(\mathrm{W}) = (\mathrm{W}^{\mathrm{B}})^{\perp}.$$

On dit que W est un sous-espace totalement isotrope si la restriction de B à W est identiquement nulle. Alors W est un sous-espace totalement isotrope maximal si et seulement si $W = W^B$, ou encore si et seulement si W est totalement isotrope et si $\dim W = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B))$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $f$ un point de $\mathfrak{g}^*$. Soit $B_f$ la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. On a alors

$$N(B_f) = \mathfrak{g}(f) = \{ X \in \mathfrak{g} ; f([X, Y]) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g} \}$$

et $\mathfrak{g}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on notera $W^f$ l'orthogonal de W par rapport à la forme $B_f$. Si W est un idéal de $\mathfrak{g}$, $W^f$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Si $X \in \mathfrak{g}$, on notera $X.f$ l'élément de $\mathfrak{g}^*$ défini par

$$(X.f)(Y) = -f[X, Y] = \tilde{B}_f(X).$$

Si donc W est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ et si $W.f$ désigne l'espace vectoriel des formes $X.f$ ou $X \in W$, on a d'après la formule $(d)$,

$$W.f = (W^f)^{\perp}. \tag{e}$$

On notera $S(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{h}$ soit totalement isotrope pour $B_f$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$.

Si $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$, on dira que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre subordonnée à $f$. On notera $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{h}$ soit totalement isotrope maximal pour la forme $B_f$; c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ et telle que

$$\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)).$$

PROPOSITION 1. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. *Posons* $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$. *Alors :*

1° $B_f$ *définit par passage aux quotients une forme bilinéaire* $B : \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \to \mathbf{R}$ *qui met en dualité* $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ *et* $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ *et induit un isomorphisme de* $\mathfrak{h}_0$*-modules de* $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ *et de* $(\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$.

2° *On a quel que soit* $H_0 \in \mathfrak{h}_0$,

$$\operatorname{Tr}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0} \operatorname{ad} H_0 = \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} H_0 - \operatorname{Tr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}'} \operatorname{ad} H_0).$$

3° $\mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g})$.

*Démonstration.* — Comme $f([\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}]) = f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}]) = 0$ $B_f$ définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $B : \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \to \mathbf{R}$.

Or si $H \in \mathfrak{h}$ est tel que $B_f(H, \mathfrak{a}) = 0$, alors $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f = \mathfrak{h}_0$ ; de même, si $A \in \mathfrak{a}$ est tel que $B_f(A, \mathfrak{h}) = 0$, alors $A \in \mathfrak{h}^f \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$. B est donc une dualité.

Les espaces $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ sont tous deux munis d'une structure de $\mathfrak{h}_0$-modules. Soit $H \in \mathfrak{h}$ et $A \in \mathfrak{a}$ et $h$ et $a$ les images de H et A dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$, alors

$$\begin{aligned} B(H_0.h, a) + B(h, H_0.a) &= f([[H_0, H], A]) + f([H, [H_0, A]]) \\ &= f([H_0, [H, A]]) = 0, \end{aligned}$$
$$\text{car} \quad H_0 \in \mathfrak{a}^f \quad \text{et} \quad [H, A] \in \mathfrak{a}.$$

On a donc démontré le 1° et ceci prouve, en particulier, que

$$\dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h}_0$$

et que

$$\operatorname{Tr} \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} H_0 = -\operatorname{Tr} \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \operatorname{ad} H_0 \quad \text{si} \quad H_0 \in \mathfrak{h}_0.$$

Montrons que $\mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g})$ ; il est clair que $\mathfrak{h}' \in S(f; \mathfrak{g})$.

D'autre part,

$$\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}_0 + \dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a}.$$

Or, comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^f$,

$$\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

Il vient donc

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g}).$$

Il reste à prouver 2°.

Les $\mathfrak{h}_0$-modules $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}/\mathfrak{h}_0 \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ sont canoniquement isomorphes. On a donc

$$\operatorname{Tr} \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} H_0 = \operatorname{Tr} \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \operatorname{ad} H_0 = -\operatorname{Tr} \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} H_0,$$

or

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} H_0 &= \operatorname{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h} \operatorname{ad} H_0 + \operatorname{Tr} \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} H_0 \\ &= \operatorname{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h}' \operatorname{ad} H_0 + \operatorname{Tr} \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} H_0. \end{aligned}$$

Par soustraction, on obtient l'égalité cherchée.

Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. On note $i(f; \mathfrak{g})$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme $B_f$. Si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on se permettra de noter $i(f; \mathfrak{k})$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour la restriction de la forme $B_f$ à $\mathfrak{k}$.

LEMME 1. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$, *alors*

$$i(f;\,\mathfrak{g}) = i(f;\,\mathfrak{a}^f).$$

En effet, soit W un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme $B_f$ restreinte à $\mathfrak{a}^f$.

On a $\mathfrak{a} \subset W$, car $\mathfrak{a} + W$ est un sous-espace totalement isotrope. Il s'agit de prouver que W est un sous-espace totalement isotrope maximal dans $\mathfrak{g}$. Or ceci est évident, car si $x \in W^f$, alors $x \in \mathfrak{a}^f$ et donc $x \in W$.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. G opère dans $\mathfrak{g}^\star$ au moyen de la représentation coadjointe. Si $g \in G$ et $f \in \mathfrak{g}^\star$, on notera $g.f$ le transformé de $f$ par $g$ et on notera $O(f)$ l'orbite de $f$ sous G. La différentielle de l'application $g \to g.f$ de G dans $\mathfrak{g}^\star$ est l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^\star$ défini par $X \to X.f$.

Si $\mathfrak{h} \in S(f;\,\mathfrak{g})$ et si H est le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, il est clair que $H.f \subset f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 2. — *Soit* $\mathfrak{h} \in M(f;\,\mathfrak{g})$, *alors* $H.f$ *est un ouvert de* $f + \mathfrak{h}^\perp$.

*Démonstration.* — Comme l'espace affine $f + \mathfrak{h}^\perp$ est stable sous l'action de H, il suffit de démontrer que $H.f$ contient un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$. Considérons l'application différentielle à l'origine de l'application $a \to a.f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$, c'est l'application $H \to H.f$. L'image $\mathfrak{h}.f$ de $\mathfrak{h}$ par cette application est égale à $(\mathfrak{h}^f)^\perp$ [formule (*e*)], donc à $\mathfrak{h}^\perp$. Par conséquent, $H.f$ contient un voisinage de $f$ dans $f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathfrak{h} \in S(f;\,\mathfrak{g})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;

(2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset O(f)$ *et* $\mathfrak{h} \in M(f;\,\mathfrak{g})$;

(3) *Quel que soit* $\varphi$ *appartenant à* $\mathfrak{h}^\perp$, *alors* $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi;\,\mathfrak{g})$.

*Démonstration* (Duflo). (Cette proposition avait été démontrée par Pukanszky [9] dans le cas où $\mathfrak{g}$ était une algèbre résoluble exponentielle.)

(1) $\Rightarrow$ (2) : Il est clair que (1) entraîne la première assertion de (2). Il suffit donc de démontrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^f$. Considérons l'application $a \to a.f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Elle est surjective par hypothèse. Il existe donc au moins un point $h_0$ de H tel que la différentielle de cette application au point $h_0$ soit surjective (théorème de Sard, *voir* [3]). L'application $X \to X.(h_0.f)$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}^\perp$ est donc surjective. Or $\mathfrak{h}.(h_0.f) = (\mathfrak{h}^{h_0.f})^\perp$ [formule (*e*)]. On a donc $\mathfrak{h}^{h_0.f} = \mathfrak{h}$; et $\mathfrak{h}$ étant stable par $h_0$ on obtient $\mathfrak{h}^f = \mathfrak{h}$.

(2)$\Rightarrow$(3) : En effet, soit $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$, alors $\mathfrak{h} \in S(f+\varphi; \mathfrak{g})$. Il suffit donc de démontrer que $\dim \mathfrak{g}(f+\varphi) = \dim \mathfrak{g}(f)$. Or $f+\varphi = g.f$, avec $g \in G$, on a donc

$$\mathfrak{g}(f+\varphi) = g.\mathfrak{g}(f) \qquad \text{et} \qquad \dim \mathfrak{g}(f+\varphi) = \dim \mathfrak{g}(f).$$

(3)$\Rightarrow$(1) : En effet, si (3) est vérifiée, d'après la proposition 2 toutes les orbites du plan $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ par le groupe H sont ouvertes dans $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ et donc $H.f$ est à la fois ouvert et fermé dans $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ et donc égal à $f+\mathfrak{h}^{\perp}$.

Proposition 4. — *Soit* $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. *Notons* $U(f; \mathfrak{h})$ *l'ensemble des orbites* O *de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$ *qui rencontrent* $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ *suivant un ouvert non vide de* $f+\mathfrak{h}^{\perp}$, *et notons* $V(f; \mathfrak{h})$ *l'ensemble des orbites* O *de la forme* $O = O(f+\varphi)$, *où* $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ *et* $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi; \mathfrak{g})$.

*Alors* $U(f; \mathfrak{h}) = V(f; \mathfrak{g})$.

*D'autre part, si* $O \in U(f; \mathfrak{h})$ *et si* $f+\varphi (\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp})$ *est un point de* $O \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$, *alors la composante connexe de* $O \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$ *contenant* $f+\varphi$ *est égale à* $H.(f+\varphi)$.

Démonstration (Duflo). Montrons que $V(f; \mathfrak{h}) \subset U(f; \mathfrak{h})$. Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ tel que $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi; \mathfrak{g})$. Alors

$$f+\varphi \in O(f+\varphi) \cap f+\mathfrak{h}^{\perp},$$

donc $E = O(f+\varphi) \cap f+\mathfrak{h}^{\perp}$ est non vide, il s'agit de montrer que E est ouvert dans $f+\mathfrak{h}^{\perp}$. Soit $f+\varphi' \in E$, donc $\varphi' \in \mathfrak{h}^{\perp}$ et $f+\varphi' \in O(f+\varphi)$; par suite,

$$\mathfrak{h} \in S(f+\varphi'; \mathfrak{g}) \qquad \text{et} \qquad \dim \mathfrak{g}(f+\varphi') = \dim \mathfrak{g}(f+\varphi),$$

par conséquent, $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi'; \mathfrak{g})$. Donc, d'après la proposition 2, $H.(f+\varphi') \subset E$ est ouvert dans $f+\mathfrak{h}^{\perp}$, d'où l'inclusion souhaitée.

Montrons que $U(f; \mathfrak{h}) \subset V(f; \mathfrak{h})$.

Soit $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et soit

$$U_1 = \{ \varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}, \text{ telles que } \dim \mathfrak{g}(f+\varphi) = \dim \mathfrak{g}(f) \}.$$

La dimension de $\mathfrak{g}(f)$ est égale à la dimension minimale des dimensions de $\mathfrak{g}(f+\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ car $\mathfrak{h} \in S(f+\varphi; \mathfrak{g})$ quel que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$. Donc $U_1$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{h}^{\perp}$ non vide et par conséquent dense dans $\mathfrak{h}^{\perp}$. Il s'ensuit que l'ensemble $f+U_1$ rencontre $O \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$ en au moins un point $f+\varphi_1$, et donc $O = O(f+\varphi_1)$ appartient à $V(f; \mathfrak{h})$.

Enfin, soient $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et $f+\varphi$ un point $(\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp})$ un point de $O \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$. Soit C la composante connexe de l'ouvert $O \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$ contenant $f+\varphi$. C est stable sous l'action de H et pour tout point $f+\varphi'$ de C, $H.(f+\varphi')$ est un ouvert connexe de $O \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$, donc de C. Alors $H.(f+\varphi)$ est un ouvert de C, dont le complémentaire dans C est réunion de H-orbites ouvertes. Par conséquent, $H.(f+\varphi)$ est ouvert et fermé dans C et, par suite, égal à C.

PROPOSITION 5. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$, *alors* $f+(\mathfrak{a}^f)^\perp \subset O(f)$.

*Démonstration.* — Comme $\mathfrak{a}$ est abélien, si $A \in \mathfrak{a}$, on a $\exp A.f = f + A.f$. Donc

$$\exp \mathfrak{a}.f = f + \mathfrak{a}.f = f + (\mathfrak{a}^f)^\perp.$$

## II. — Sous-algèbres subordonnées dans une algèbre résoluble exponentielle.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle et V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie; $V^{\mathbf{C}}$ est alors complètement réductible en tant que $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$-module. Soit

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \ldots \subset V_n = V^{\mathbf{C}},$$

avec $\dim_{\mathbf{C}} V_i = i$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$-module $V^{\mathbf{C}}$. A chaque quotient irréductible de dimension 1, $V_{i+1}/V_i$, correspond une forme linéaire $\lambda_i$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs complexes. Ces formes linéaires $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbf{C}$ sont indépendantes à l'ordre près de la suite de Jordan-Hölder choisie et sont appelées les poids de $\mathfrak{g}$ dans V. On appelle racines de $\mathfrak{g}$ les poids de la représentation adjointe.

DÉFINITION 1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble et* $\rho$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans* V. *On dit que* V *est un* $\mathfrak{g}$*-module de type exponentiel, si quel que soit* $X \in V$, $\rho(X)$ *n'a jamais de valeurs propres imaginaires pures non nulles.*

Il est clair que si V est un $\mathfrak{g}$-module de type exponentiel et si $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est un poids de $\mathfrak{g}$ dans V la partie imaginaire $\mu_2$ de $\mu$ doit être proportionnelle à la partie réelle $\mu_1$. Il revient donc au même de dire que V est un $\mathfrak{g}$-module de type exponentiel si et seulement si les poids de $\mathfrak{g}$ dans V sont de la forme $(1+i\alpha)\psi$, où $\psi$ est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$.

DÉFINITION 2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble. On dit que* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre résoluble exponentielle si la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *est de type exponentiel ou encore si les racines de* $\mathfrak{g}$ *sont de la forme* $\lambda(1+i\alpha)$, *où* $\lambda$ *est une forme linéaire réelle sur* $\mathfrak{g}$ *et* $\alpha$ *un nombre réel.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\exp : \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle.

PROPOSITION 6 (Dixmier [4]). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{g}$ *est une algèbre résoluble exponentielle;*

(2) exp *est un difféomorphisme.*

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on sait que le sous-groupe analytique H de G correspondant à $\mathfrak{h}$ est fermé et simplement connexe [5].

D'autre part, il est clair que si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre d'une algèbre résoluble exponentielle, $\mathfrak{h}$ est une algèbre exponentielle. On obtient donc la :

PROPOSITION 7. — *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre d'une algèbre exponentielle* $\mathfrak{g}$. *Alors* exp *est un difféomorphisme de* $\mathfrak{h}$ *sur* H.

LEMME 2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Si* A *et* $B \in \mathfrak{g}$, *il existe* C *et* C' *appartenant à* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *tels que*

$$\exp A \exp B = \exp(A + B) \exp C = \exp C' \exp(A + B).$$

*Démonstration.* — Le groupe [G, G] des commutateurs de G est un groupe analytique d'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'après la proposition 7, on a donc

$$[G, G] = \exp([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]).$$

Soient $\pi : G \to G/[G, G]$ et $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ les morphismes canoniques. Ils commutent à l'application exponentielle, et donc, le groupe G/[G, G] étant commutatif,

$$\pi(\exp(A + B)) = \exp(pA + pB) = \exp pA \exp pB = \pi(\exp A \exp B),$$

donc

$$\exp A \exp B \exp(-(A + B)) \in [G, G] = \exp[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et (M, $\rho$) un $\mathfrak{g}$-module de type exponentiel irréductible. Alors $\dim M \leq 2$.

Si $\dim M = 2$, il existe un vecteur A de $M^{\mathbf{C}}$, une forme linéaire $\lambda$ réelle non nulle sur $\mathfrak{g}$ et un nombre réel $\alpha$ non nul tels que

$$M^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}A \oplus \mathbf{C}\bar{A} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \rho(X)A &= (1 + i\alpha)\lambda(X)A \quad \text{si} \quad X \in \mathfrak{g}. \\ \rho(X)\bar{A} &= (1 - i\alpha)\lambda(X)\bar{A} \end{aligned}$$

Le noyau de la représentation $\rho$ est donc égal au noyau de la forme réelle $\lambda$, il est donc de codimension 1.

LEMME 3. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble*, (M, $\rho$) *un* $\mathfrak{g}$*-module de type exponentiel irréductible et* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, *alors la restriction de* $\rho$ *à* $\mathfrak{h}$ *est, soit triviale, soit irréductible et son noyau est de codimension* $\leq 1$.

En effet, si $\dim M = 1$, le lemme est évident. Si $\dim M = 2$ et si $\lambda | \mathfrak{h} = 0$, $\rho | \mathfrak{h}$ est triviale, sinon $\rho | \mathfrak{h}$ est irréductible.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, on dit qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est central si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$, ou encore si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$.

LEMME 4. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble exponentielle,* $\mathfrak{a}$ *un idéal non central minimal parmi les idéaux non centraux de* $\mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{a}$ *est abélien et* $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \leqq 2$.

*Démonstration.* — Le $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$ est irréductible. Donc

$$\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \leqq 2 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}.$$

Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} = 1$, le lemme est évident. Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{a}^{\mathbf{C}}$ est engendré sur $(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a})^{\mathbf{C}}$ par deux vecteurs A et $\overline{\mathrm{A}}$ et il existe une forme linéaire $\lambda$ non nulle et un nombre réel $\alpha$ non nul tel que, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}[] [\mathrm{X}, \mathrm{A}] &= (1 + i\alpha)\,\lambda(\mathrm{X})\,\mathrm{A} + \mathrm{U}, \\ [\mathrm{X}, \overline{\mathrm{A}}] &= (1 - i\alpha)\,\lambda(\mathrm{X})\,\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{U}} \end{aligned} \quad \text{où} \quad \mathrm{U} \in (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a})^{\mathbf{C}},$$

il s'agit de montrer que $[\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}] = 0$. Soit $\mathrm{X}_0 \in \mathfrak{g}$ tel que $\lambda(\mathrm{X}_0) = 1$. On a alors

$$0 = [\mathrm{X}_0, [\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}]] = (1 + i\alpha)\,[\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}] + (1 - i\alpha)\,[\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}] = 2([\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}]).$$

Désormais dans ce chapitre II $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

LEMME 5. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$. *Alors*

$$\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \leqq 2 \quad \text{et si} \quad \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 2, \quad \textit{alors} \quad \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$$

*et la représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ *est irréductible.*

Si $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$, $\mathfrak{h}$ contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. On a donc $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \supset \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$. Or $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \leqq 2$ et donc $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \leqq 2$, l'égalité n'étant possible que si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$.

PROPOSITION 8. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$. *Soient* $\sigma$ *la représentation de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{j}$ *son noyau et soit* $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f$. *Alors :*

(*a*) *la représentation* $\sigma$ *est triviale ou irréductible;*

(*b*) $\mathfrak{j}$ *et* $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0$ *sont des idéaux de* $\mathfrak{h}$;

(*c*) $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$ *ou* $\mathfrak{h}_0$, *cette dernière éventualité étant exclue si* $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 2$;

(*d*) $[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$.

*Démonstration.* — On a $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \leqq 2$. Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$, (*a*) est clair. Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 2$, (*a*) résulte des lemmes 5 et 3.

Dans tous les cas $\mathfrak{j}$ est de codimension $\leqq 1$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{j}$, ce qui montre (*b*).

Montrons (*c*). Si $\mathfrak{h}_0 \not\subset \mathfrak{j}$, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Si $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{j}$ et si $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 1$, on a $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$ ou $\mathfrak{h}$. Reste le cas $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{j}$ et $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 2$. Alors $\mathfrak{h}_0 \neq \mathfrak{j}$ puisque $\mathfrak{j}$ est de codimension $\leqq 1$, et il s'agit de prouver que $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}$. Supposons donc $\mathfrak{j} \neq \mathfrak{h}$, $\sigma$ est alors irréductible d'après (*a*). Rappelons (prop. 1) que B met $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ en dualité.

L'orthogonal pour B de $\mathfrak{j}/\mathfrak{h}_0$ est l'image dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ du sous-espace $\mathfrak{a}(\mathfrak{j}) = \{ A \in \mathfrak{a}, f([A, \mathfrak{j}]) = 0 \}$ et $\mathfrak{h}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{j} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{h}$ implique par dualité $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{a}(\mathfrak{j}) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{a}$. Il suffit dès lors de montrer que $\mathfrak{a}(\mathfrak{j})$ est un $\mathfrak{h}$-module pour obtenir la contradiction cherchée.

Soient donc $A \in \mathfrak{a}(\mathfrak{j})$, $J \in \mathfrak{j}$ et $H \in \mathfrak{h}_0$, on a

$$f([J, [H, A]]) = f[[J, H], A] + f[H, [J, A]],$$

or $[J, H] \in \mathfrak{j}$ et le 1^er^ terme du 2^e^ membre est donc nul, car $A \in \mathfrak{a}(\mathfrak{j})$.

D'autre part, $[J, A] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ car $\mathfrak{j}$ est le noyau de la représentation $\sigma$ le 2^e^ terme est donc nul aussi, puisque $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Montrons (*d*). Il suffit de démontrer que $[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{a}$, or

$$[[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}], \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{j}, [\mathfrak{j}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{j}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}],$$

on a donc $f[[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}], \mathfrak{a}] = 0$.

## III. — Comparaison de représentations induites par des sous-algèbres subordonnées à une forme *f*.

Soit G un groupe de Lie; désignons par $dg$ une mesure de Haar à gauche sur G et par $\Delta_G$ la fonction module de G de sorte que l'on a

$$\int_G f(gx^{-1})\, dg = \Delta_G(x) \int_G f(g)\, dg$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$ espace des fonctions numériques continues à support compact sur G et pour tout $x \in G$.

Soit H un sous-groupe fermé de G. On désigne par $\Delta_{H,G}$ le caractère de H à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ défini par $\Delta_{H,G}(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h)$.

Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, on a $\Delta_{H;G}(\exp X) = e^{\operatorname{Tr} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \operatorname{ad} X}$.

Soit $\mathcal{K}(H, G)$ l'espace des fonctions numériques continues sur G à support compact modulo H et qui vérifient

$$\Phi(gh) = \Delta_{H,G}(h)\, \Phi(g) \qquad (g \in G,\ h \in H), \tag{R.1}$$

G agit dans cet espace par translation à gauche.

On sait [2] qu'il existe sur $\mathcal{K}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ une forme linéaire positive G-invariante et une seule (à un scalaire près). On la note $\nu_{\mathrm{H},\mathrm{G}}$ et on posera

$$\nu_{\mathrm{H},\mathrm{G}}(\mathrm{F}) = \oint_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \mathrm{F}(g)\, d\nu_{\mathrm{H},\mathrm{G}}(g).$$

Dans le cas où $\Delta_{\mathrm{H}}$ et $\Delta_{\mathrm{G}}$ coïncident sur H (par exemple si H est distingué dans G), l'espace $\mathcal{K}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ s'identifie à $\mathcal{K}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ et il existe alors une mesure G-invariante sur l'espace homogène G/H qu'on notera parfois $d\dot{g}$.

Soit U une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit F une fonction continue de G à valeurs dans $\mathcal{H}$ à support compact modulo H et vérifiant

$$\text{(R.2)} \qquad \mathrm{F}(gh) = \mathrm{U}(h)^{-1} (\Delta_{\mathrm{H},\mathrm{G}}(h))^{\frac{1}{2}} \mathrm{F}(g) \qquad (g \in \mathrm{G},\ h \in \mathrm{H}).$$

Alors la fonction $g \to \| \mathrm{F}(g) \|^2$ appartient à $\mathcal{K}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ et on pose

$$\| \mathrm{F} \|^2 = \oint_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \| \mathrm{F}(g) \|^2 \, d\nu_{\mathrm{H},\mathrm{G}}(g).$$

On réalisera la représentation unitaire $\mathrm{Ind}\overset{\mathrm{G}}{\underset{\mathrm{H}}{\uparrow}} \mathrm{U}$ induite à G de la représentation unitaire U du groupe H dans l'espace de Hilbert complété de l'espace des fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathcal{H}$ à support compact modulo H vérifiant (R. 2) et muni de la norme définie ci-dessus. La représentation unitaire de G dans cet espace s'effectue par translation à gauche.

Désormais dans ce chapitre et le suivant $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie résoluble exponentielle, et G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$ et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre subordonnée à $f$. On notera $\chi_{f,\mathfrak{h}}$ le caractère unitaire du groupe $\mathrm{H} = \exp \mathfrak{h}$ défini par $\chi_{f,\mathfrak{h}}(\exp \mathrm{X}) = e^{if(\mathrm{X}}$ pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$ et on notera $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation $\mathrm{Ind}\overset{\mathrm{G}}{\underset{\mathrm{H}}{\uparrow}} \chi_{f,\mathfrak{h}}$ du groupe G. Elle se réalise donc par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ complété de l'espace des fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathbf{C}$ à support compact modulo H et vérifiant

$$\text{(R.3)} \qquad f(gh) = \chi_{f,\mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{\mathrm{H},\mathrm{G}}(h)^{\frac{1}{2}} f(g) \qquad (g \in \mathrm{G},\ h \in \mathrm{H}).$$

Si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre subordonnée à $f$ contenue dans $\mathfrak{k}$, on se permettra de noter $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ la représentation $\mathrm{Ind}\overset{\mathrm{K}}{\underset{\mathrm{H}}{\uparrow}} \chi_{f,\mathfrak{h}}$.

Il s'agira dans la suite de comparer aux représentations $\rho(f; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}_2; \mathfrak{g})$, où $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2 \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$ et pour cela de fabriquer un opérateur $\mathrm{T}_{\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_1}$ d'entrelacement de ces représentations. Donnons une idée non rigoureuse de la méthode employée. Il s'agit de trouver un opérateur qui transforme une fonction vérifiant (R. 3) pour $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$ en une fonction vérifiant (R. 3) pour $H_2$. Supposons pour simplifier que tous les groupes en question soient unimodulaires. Soit $g \in G$ et $\varphi \in \mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, alors la fonction

$$h_2 \to \varphi(gh_2)\,\chi_{f,\mathfrak{h}_2}(h_2) \qquad (h_2 \in \exp \mathfrak{h}_2 = H_2)$$

est invariante à droite par le sous-groupe $H_1 \cap H_2$ de $H_2$.

Posons formellement

$$\text{(R.4)} \qquad \left(T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}\varphi\right)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \varphi(gh_2)\,\chi_{f,\mathfrak{h}_2}(h_2)\,d\dot{h}_2,$$

où $d\dot{h}_2$ désigne une mesure $H_2$-invariante sur l'espace homogène $H_2/H_1 \cap H_2$. Si cette intégrale converge quel que soit $g$, il est clair que $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}\varphi$ vérifie (R. 3) pour $H_2$ et que $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$ commute à l'action de G par translations à gauche.

Dans la situation tout à fait générale décrite plus haut on ne connaît aucun résultat sur la convergence des intégrales (R. 4). Cependant on montrera que dans des cas très particuliers d'algèbres $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$, on peut effectivement définir de cette façon un opérateur $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$.

On gardera dans la suite les notations de la proposition 8 et de la proposition 1.

Lemme 6. — *Soit* $\mathfrak{v}$ *un supplémentaire de* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{a}$. *Alors* $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ *et l'application* $(H, V) \to \exp H \exp V$ *est un difféomorphisme de* $\mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ *sur* $\exp \mathfrak{k}$.

*Démonstration.* — Soit $\varphi$ cette application; on sait qu'elle est analytique; montrons qu'elle est bijective. Notons $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$, $H = \exp \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{a}$ est un idèal abélien de $\mathfrak{k}$, on a $K = H.A$ et $A = \exp \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \exp \mathfrak{v}$. Donc $K = H \exp \mathfrak{v}$ et $\varphi$ est surjective.

Soient, par ailleurs, $(H_i, V_i) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ $(i = 1, 2)$ tels que

$$\exp H_1 \exp V_1 = \exp H_2 \exp V_2.$$

Alors $\mathfrak{a}$ étant abélien et $\mathfrak{h}$ exponentielle, il existe $H_3 \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\exp(V_2 - V_1) = \exp H_1 (\exp H_2)^{-1} = \exp H_3.$$

L'application exp étant bijective, on en déduit que

$$V_2 - V_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{v} = 0 \qquad \text{et donc que} \qquad (H_1, V_1) = (H_2, V_2).$$

Il reste à vérifier que $\varphi^{-1}$ est analytique. Posons pour $k \in K$

$$\varphi^{-1}(k) = (L(k), M(k))$$

de sorte que $k = \exp L(k) \exp M(k)$, $L(k) \in \mathfrak{h}$, $M(k) \in \mathfrak{v}$. Or l'application canonique $\pi : G \to H \backslash G$, qui est analytique s'écrit, si on identifie $H \backslash G$ à $\exp \mathfrak{v}$, $k \to \exp M(k)$. Par suite, l'application M est analytique et ceci entraîne immédiatement que L est analytique.

Lemme 7. — (*a*) *Supposons* $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ *et soit* $\mathfrak{t}$ *un supplémentaire de* $\mathfrak{h}_0$ *dans* $\mathfrak{h}$ *contenu dans* $\mathfrak{j}$. *Alors l'application* $(T, H_0) \to \exp T \exp H_0$ *est un difféomorphisme de* $\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0$ *sur* H.

(*b*) *Supposons* $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$. *Soit* $X \in \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_0$, *alors l'application*

$$(t, H_0) \to \exp tX \exp H_0$$

*est un difféomorphisme de* $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0$ *sur* H.

*Démonstration.* — Si $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{h}$ et l'assertion (*b*) est classiquement vérifiée. Supposons donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ et notons $\varphi$ l'application considérée.

On sait qu'elle est analytique et il suffit de vérifier qu'elle est bijective : le raisonnement fait au lemme 6 prouvera que $\varphi^{-1}$ est analytique.

Soit $(T_i, H_i) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0$ $(i = 1, 2)$ tels que

$$\exp T_1 \exp H_1 = \exp T_2 \exp H_2.$$

Alors, d'après le lemme 2 et le (*d*) de la proposition 8, il existe $H_3 \in \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp (T_1 - T_2) = \exp H_3.$$

Donc $T_1 - T_2 \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_0 = \{0\}$ et $\varphi$ est injective. Posons

$$H_0 = \exp \mathfrak{h}_0, \qquad J = \exp \mathfrak{j}, \qquad T = \exp \mathfrak{t}.$$

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$, que $\mathfrak{h}_0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{j}$ un idéal de $\mathfrak{h}$, on a $H = H_0 . J$. Pour démontrer que $\varphi$ est surjective, il suffit de vérifier que

$$J = \exp (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \exp \mathfrak{t}, \qquad \text{car alors} \quad H = H_0 \exp \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j} . T = H_0 . T$$

et pour cela de vérifier que $\exp(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \exp \mathfrak{t}$ qui engendre J, car $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{t}$, est un sous-groupe. Soient donc

$$(H_i, T_i) \in (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \times \mathfrak{t} \qquad (i = 1 \text{ ou } 2).$$

On a

$$\exp H_1 \exp T_1 \exp H_2 \exp T_2 = \exp H_1 \exp (\exp T_1 . H_2) \exp T_1 \exp T_2.$$

Or $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ est un idéal dans $\mathfrak{j}$ d'après le (*d*) de la proposition 8, donc $\exp T_1 . H_2 \in \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ et il existe $H_3 \in \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp H_1 \exp (\exp T_1 . H_2) = \exp H_3.$$

D'autre part, d'après le lemme 2, il existe $H_4 \in [\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp T_1 \exp T_2 = \exp H_4 \exp(T_1 + T_2).$$

Si on note $H_5$ l'élément de $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp H_5 = \exp H_3 \exp H_4,$$

on obtient que

$$\exp H_1 \exp T_1 \exp H_2 \exp T_2 = \exp H_5 \exp(T_1 + T_2)$$

et ainsi appartient à $\exp \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0 \exp \mathfrak{t}$.

Proposition 9. — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} \in M(f/\mathfrak{g})$. Supposons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{h}$ contenu dans $\mathfrak{j}$ et soit $\mathfrak{v}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$. Alors :*

(1) *la restriction $B$ de $B_f$ à $\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée;*

(2) *l'application $(T, H_0, V) \to \exp T \exp H_0 \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{v}$ sur $K$;*

(3) *les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sont équivalentes.*

Comme le sous-espace $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ s'identifie à $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ à $\mathfrak{v}$, le (1) résulte du (1) de la proposition 1.

Par ailleurs, les lemmes 6 et 7 impliquent (2) et on en déduit facilement que l'application $(H_0, V) \to \exp H_0 \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{v}$ sur $H'$.

Démontrons que les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sont équivalentes et pour cela nous allons démontrer qu'on peut construire un opérateur d'entrelacement $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ de ces deux représentations en suivant la méthode esquissée plus haut.

Soit $\psi$ une fonction continue à support compact modulo $H$ appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$. On a donc

$$\text{(R. 3)} \qquad \psi(kh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H,K}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(k) \qquad (k \in K, h \in H).$$

Soit $k \in K$ et soit $\Phi_{k, \psi}$ la fonction continue sur $H'$ définie par

$$\Phi_{k, \psi}(h') = \psi(kh') \chi_{f, \mathfrak{h}'}(h') \Delta_{H',K}(h')^{-\frac{1}{2}}.$$

Le groupe $H \cap H'$ est égal au groupe $\exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}') = \exp \mathfrak{h}_0 = H_0$ et on a

$$\begin{aligned} \Delta_{H_0, H'}(\exp X) &= e^{\operatorname{Tr} \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 \operatorname{ad} X} \qquad (X \in \mathfrak{h}_0) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h} \operatorname{ad} X - \operatorname{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h}' \operatorname{ad} X)} \\ &= (\Delta_{H,K}(\exp X))^{\frac{1}{2}} (\Delta_{H',K}(\exp X))^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après le (2) de la proposition 1.

En utilisant ce résultat et la relation (R. 3), on voit donc que la fonction $\Phi_{k,\psi}$ vérifie la relation (R. 1), c'est-à-dire

$$(\Phi_{k,\psi})(h'h_0) = \Delta_{H_0,H'}(h_0))\,\Phi_{k,\psi}(h').$$

D'autre part, comme $K = H'.H$, l'application canonique $K \to K/H$ induit une surjection $H' \to K/H$, qui fait de $K/H$ un espace homogène de $H'$, d'où un difféomorphisme $\lambda : H'/H_0 \to K/H$. Le support de $\psi$ modulo H étant compact, on voit que le support de $\Phi_{k,\psi}$ est compact modulo $H_0$. La fonction $\Phi_{k,\psi}$ appartient donc à l'espace $\mathcal{K}(H_0, H')$ et on pose

$$\left(T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}\psi\right)(k) = \nu_{H_0,H'}(\Phi_{k,\psi}) = \oint_{H'/H_0} \psi(kh')\,\chi_{f,\mathfrak{h}'}(h')\,\Delta_{H',K}(h')^{-\frac{1}{2}}\,d\nu_{H_0,H'}(h').$$

Il est clair que la fonction $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}(\psi)$ vérifiée la relation (R.3) pour (K, H') et que $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}$ commute à l'action de G par translations à gauche. Il s'agit de montrer que $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que l'opérateur $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}$ défini sur l'espace des fonctions de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ continues à support compact modulo H se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

L'espace $H'/H_0$ s'identifie à $\mathfrak{v}$ et l'espace $\mathcal{K}(H_0, H')$ s'identifie à l'espace $\mathcal{K}(\mathfrak{v})$ des fonctions continues à support compact sur $\mathfrak{v}$ par l'application $(P\Phi)(V) = \Phi(\exp V)$ et la forme $\nu_{H_0,H'}$ s'identifie à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{v}$.

D'autre part, si $h' \in \exp \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ étant un idéal de $\mathfrak{k}$ contenu dans $\mathfrak{h}'$ on a $\Delta_{H',K}(h') = 1$ et donc

$$\left(T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}\psi\right)(k) = \int_{\mathfrak{v}} \psi(k \exp V)\, e^{if(V)}\, dV.$$

L'espace K/H s'identifie à $\mathfrak{v}$, et l'application R définie par $(R\psi)(V) = \psi(\exp V)$, où $\psi$ est une fonction continue appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et V un point de $\mathfrak{v}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{v})$. De même, K/H', s'identifie à $\mathfrak{t}$ et l'application R' défini par $(R'\psi')(T) = \psi'(\exp T)$, où $\psi'$ est une fonction continue appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et T un point de $\mathfrak{t}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{t})$.

Soit donc $\Phi$ une fonction continue à support compact sur $\mathfrak{v}$. Alors $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}(R^{-1}\Phi)$ vérifiant (R.3) pour (H', K), soit $R'.T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}.R^{-1}(\Phi)$ la fonction sur $\mathfrak{t}$ définie par

$$\left(R'.T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}.R^{-1}\right)(\Phi)(T) = T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}(R^{-1}\Phi)(\exp T)$$

ou encore

$$\left(R'.T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}.R^{-1}\right)(\Phi)(T) = \int_{\mathfrak{v}} (R^{-1}\Phi)(\exp T \exp V)\, e^{if(V)}\, dV;$$

or

$$\exp T \exp V = \exp(\exp T.V) \exp T$$

et

$$\exp T.V = V + [T, V] + W \qquad \text{où} \qquad [T, V] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$$

et

$$W \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{a}, \qquad \text{car} \quad T \in \mathfrak{j} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{j}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

En utilisant les faits suivants :

$\Delta_{H,K}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{j}$ (car $[\mathfrak{j}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$), $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{t}$ sont contenus dans $\mathfrak{j}$, $\chi_{f,\mathfrak{h}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien et $R^{-1}\Phi$ vérifie la relation (R.3), il vient

$$(R^{-1}\Phi)(\exp T \exp V) = \Phi(V)\, e^{-if[T,V]}\, e^{-if(T)}.$$

et

$$\left(R'.T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}.R^{-1}\right)(\Phi)(T) = e^{-if(T)} \int_{\mathfrak{v}} \Phi(V)\, e^{if(V)}\, e^{-iB_f(T,V)}\, dV.$$

Comme la restriction B de $B_f$ à $\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée, $B_f$ définit une transformation de Fourier $\mathcal{F}_B$ de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{v})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{t})$ et on a donc

$$\left(R'.T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}.R^{-1}\right)(\Phi)(T) = e^{-if(T)}\, \mathcal{F}_B(V \to e^{i(V)}\, \Phi(V)).$$

Si $\psi = R^{-1}\Phi$, on voit donc que $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que $T_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$. Cela termine la démonstration de la proposition 9.

PROPOSITION 10. — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$.*

*Définissons $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{j}$ comme précédemment.*

*Supposons que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Dans ces conditions :*

(1) $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{h}_0$ *et* $\mathfrak{h}'$ *sont des idéaux de* $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$, *et* $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$.

(2) *Il existe des vecteurs* $H \in \mathfrak{h}_0 - \mathfrak{h}_0$ *et* $A \in \mathfrak{a} - (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$ *tels que*

$$\mathfrak{k} = \mathbf{R}H \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbf{R}A,$$

$[H, A] = A$ *et* $f(A) = 1$. *L'application* $(x, H_0, y) \to \exp xH \exp H_0 \exp yA$ *est un difféomorphisme de* $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0 \times \mathbf{R}$ *sur* K.

(3) *Si on note pour tout* $\nu \in \mathbf{R}$, $f_\nu$ *la forme linéaire sur* $\mathfrak{k}$ *définie par les conditions* $f_\nu \in f + \mathfrak{h}^\perp$ *et* $f_\nu(A) = \nu$, *alors pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\exp xH f_\nu = f_{e^{-x}\nu}$.

*En outre,* $\mathfrak{h}' \in M(f_\nu; \mathfrak{k})$ *si et seulement si* $\nu \neq 0$, *et* $\mathfrak{k} \in M(f_0; \mathfrak{k})$.

(4) *Si* $\nu_+$ *est un nombre réel strictement positif et* $\nu_-$ *un nombre réel strictement négatif, alors*

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k}) \simeq \rho(f_{\nu+}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k}) \oplus \rho(f_{\nu-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k}).$$

*Démonstration.* — Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$, d'après le (*c*) de la proposition 8, on a donc

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}, \qquad \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1.$$

Comme $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{j}$, la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ n'est pas triviale, *a fortiori* celle de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$. Elle est donc irréductible d'après le lemme 3. L'espace $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$ étant un sous-$\mathfrak{h}$-module propre de $\mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$, on a donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$. D'autre part, comme $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{h}_0$ est un idéal de $\mathfrak{h}$ et comme $[\mathfrak{j}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_0$ est un idéal de $\mathfrak{k}$. De même, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$, somme de deux idéaux est un idéal de $\mathfrak{k}$. On a donc démontré (1).

Soient alors $H_1 \in \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_0$ et $A_1 \in \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$. On a

$$[H_1, A_1] = \lambda_1 A_1 + U_1 \qquad \text{où} \quad U_1 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Il suffit alors de prendre $H = \lambda_1^{-1} H_1$ et $A = \mu(\lambda_1 A_1 + U_1)$ ($\mu \neq 0$) pour avoir $[H, A] = A$ et comme $f([H, A]) \neq 0$ (car sinon on aurait $f([H, \mathfrak{a}]) = 0$ et $H \in \mathfrak{h}_0$), on peut choisir $\mu$ de telle sorte que $f(A) = 1$.

La deuxième assertion de (2) découle du fait que $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{h}_0$ sont des idéaux de $\mathfrak{k}$.

Montrons (3). Comme $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$(\exp x H).f_\nu \in f + \mathfrak{h}^\perp,$$

donc

$$(\exp x H).f_\nu = f_{\nu'}, \qquad \text{avec} \quad \nu' = (\exp x H.f_\nu)(A) = e^{-x}\nu.$$

D'autre part,

$$\mathfrak{h}' \in S(f_\nu; \mathfrak{k}), \qquad \text{car} \quad [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] \subset [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] + [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}$$

et, par conséquent,

$$f_\nu[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = f[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = 0,$$

Si $\nu \neq 0$,

$$\mathfrak{k} \notin S(f_\nu; \mathfrak{k}), \qquad \text{car} \quad f_\nu([H, A]) = f_\nu(A) = \nu,$$

et, par conséquent, $\mathfrak{h}' \in M(f_\nu; \mathfrak{k})$.

On a

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a} \qquad \text{et donc} \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{a}].$$

Écrivons

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathbf{R}A, \qquad \text{alors} \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{h}, \mathbf{R}A] = [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \oplus \mathbf{R}A.$$

Il vient

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] + \mathbf{R}A.$$

Comme $f_0 \in f + \mathfrak{h}^\perp$, que $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et que $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$, ainsi que $f[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}]$, on en déduit que

$$f_0[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = f_0(\mathbf{R}A) = \{0\}.$$

Démontrons le (4). La représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ complété de l'espace des fonctions numériques continues à support compact modulo H et vérifiant

$$\text{(R.3)} \qquad \psi(kh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H,K}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(k) \qquad (k \in K,\ h \in H).$$

Notons que $\Delta_{H,K}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{h}_0$, car $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}$ et que $\delta(\exp H) = 1$, puisque $[H, A] = A$.

De même, la représentation $\rho(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ se réalise dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ complété de l'espace des fonctions numériques continues à support compact modulo H′ et vérifiant

$$\text{(R.3, } \nu\text{)} \qquad \psi(kh') = \chi_{f_\nu, \mathfrak{h}}(h')^{-1} \psi(k)$$

(on a $\Delta_{H', K} = 1$ puisque $\mathfrak{h}'$ est un idéal de $\mathfrak{k}$).

De façon analogue à la démonstration du (3) de la proposition 9, on considère si $k \in K$ et si $\psi$ est une fonction continue à support compact modulo H de l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ la fonction sur H′,

$$\Phi_{k,\psi}(h') = \psi(kh') \chi_{f_\nu}(h').$$

Les groupes K/H et $H'/H_0$ étant canoniquement isomorphes on en déduit que $\Phi_{k,\psi}$ est à support compact modulo $H_0$ et puisque $\Delta_{H,K}$ est trivial sur $\mathfrak{h}_0$ et que $f_\nu$ et $f$ coïncident sur $\mathfrak{h}_0$, $\Phi_{k,\psi}$ est invariante à droite par le sous-groupe distingué $H_0$ de H′. On pose alors

$$(T_\nu \psi)(k) = \int_{H'/H_0} \psi(kh') \chi_{f_\nu}(h')\, dh',$$

où $dh'$ désigne la mesure sur $H'/H_0$ invariante par les translations à gauche par H′.

Il est clair que $T_\nu$ commute aux translations à gauche par les éléments de K et que $T_\nu \psi$ vérifie la relation (R.3, $\nu$).

On se propose de montrer que $T_\nu \psi \in \mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que l'opérateur $T_\nu$ défini sur l'espace des fonctions continues à support compact modulo H appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ se prolonge en un opérateur borné de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ dans $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

L'application $(y, H_0) \to \exp yA \exp H_0$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}\times\mathfrak{h}_0$ sur H'; on a donc

$$(T_\nu\psi)(k) = \int_{\mathbf{R}} \psi(k \exp y A)\, e^{iy\nu}\, dy.$$

De même, le difféomorphisme $(y, H) \to \exp yA \exp H$ permet d'identifier $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ par l'application R, où $(R\psi)(y) = \psi(\exp yA)$, si $\psi$ est une fonction continue de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$. Pareillement, $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ s'identifie à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ par l'application R' ou $(R'\psi')(x) = \psi'(\exp x H)$.

Posons, de même,

$$R'(T_\nu\psi)(x) = (T_\nu\psi)(\exp x H),$$

on obtient alors, si $\Phi$ est une fonction continue à support compact sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} R'.T_\nu.R^{-1}(\Phi) &= \int_{\mathbf{R}} (R^{-1}\Phi)(\exp x H \exp y A)\, e^{iy\nu}\, dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} R^{-1}\Phi\,(\exp y\, e^x A)\, e^{-ixf(H)}\, e^{\frac{x}{2}}\, e^{iy\nu}\, dy \\ &= e^{\frac{x}{2}}\, e^{-ixf(H)} \int_{\mathbf{R}} e^{iy\nu}\, \Phi(y e^x)\, dy \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\, e^{-if(H)} \int_{\mathbf{R}} e^{i e^{-x}\nu y}\, \Phi(y)\, dy \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$; il vient

$$R'.T_\nu.R^{-1}(\Phi)(x) = e^{-\frac{x}{2}}\, e^{-ixf(H)}\, (\mathcal{F}\Phi)(e^{-x}\nu).$$

Ceci montre que $(R'.T_\nu.R^{-1})(\Phi) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, et donc que si $\psi = R^{-1}\Phi$, que $T_\nu\psi \in \mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

Soit $\mathcal{L}^2_+(\mathbf{R})$ [resp. $\mathcal{L}^2_-(\mathbf{R})$] l'espace formé des fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle presque partout hors de $\mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_-$), alors si $\nu$ est $> 0$ (resp. $< 0$), $|\nu|^{\frac{1}{2}} F_\nu$ réalise un isomorphisme unitaire de $\mathcal{L}^2_+(\mathbf{R})$ [resp. $\mathcal{L}^2_-(\mathbf{R})$] sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Connu $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}) = \mathcal{L}^2_+(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{L}^2_-(\mathbf{R})$ il en résulte (4) et la proposition 9 est démontrée.

Remarquons que les résultats des propositions 9 et 10 concernant la comparaison des représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et $\rho(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ ont été obtenues sans étude précise de la structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, mais en construisant directement un opérateur d'équivalence. Ce genre de raisonnement légèrement amélioré conduit à une démonstration plus rapide des résultats de la thèse de Bernat (*voir* [12]).

## IV. — Étude de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, où $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$.

On rappelle que dans tout ce chapitre $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

On note $I(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$ telles que la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ soit irréductible.

On utilisera les résultats suivants de la thèse de Bernat [1].

B.1. Quelle que soit $f \in \mathfrak{g}^\star$, on a

$$I(f; \mathfrak{g}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I(f; \mathfrak{g}) \subset M(f, \mathfrak{g}).$$

B.2. Si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2 \in I(f; \mathfrak{g})$, alors les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}_2; \mathfrak{g})$ sont équivalentes.

On notera $\rho(f; \mathfrak{g})$ la classe de représentations irréductibles associée à $f$, c'est-à-dire

$$\rho(f; \mathfrak{g}) = \rho(f, \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) \quad \text{pour} \quad \mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g}).$$

Il est clair que si $g \in G$, alors

$$\rho(g.f; \mathfrak{g}) = \rho(f; \mathfrak{g});$$

on peut donc associer à toute orbite O du groupe G dans $\mathfrak{g}^\star$ une classe de représentations unitaires irréductibles du groupe G qu'on notera $\rho(O)$ défini par

$$\rho(O) = \rho(f; \mathfrak{g}) \quad \text{si} \quad f \in O.$$

B.3. L'application $O \to \rho(O)$ est injective.

Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. On note, comme dans la proposition 4, $U(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de G dans $\mathfrak{g}^\star$ qui rencontrent $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert non vide de $(f + \mathfrak{h}^\perp)$.

D'autre part, si $\mathfrak{k}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$ et O une orbite, on note $C(O; f; \mathfrak{k})$ le nombre de composantes connexes de $O \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. *Alors :*

(1) $U(f; \mathfrak{h})$ *est un ensemble fini;*

(2) *Si* $O \in U(f; \mathfrak{h})$, $c(O; f; \mathfrak{h})$ *est un nombre fini;*

(3) $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{O \in U(f; \mathfrak{h})} C(O; f; \mathfrak{h})\, \rho(O).$

Ce théorème entraînera, en particulier, la caractérisation suivante de l'ensemble $I(f; \mathfrak{g})$.

Corollaire 1 (Critère de Pukanszky [9]). — *Soit* $f \in \mathfrak{g}^\star$ *et* $\mathfrak{h} \in \mathrm{S}(f; \mathfrak{g})$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathrm{H}.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;

(2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset \mathrm{O}(f)$ *et* $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$;

(3) *Quelle que soit* $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f + \varphi; \mathfrak{g})$;

(4) $\mathfrak{h} \in \mathrm{I}(f; \mathfrak{g})$.

*Démonstration.* — L'équivalence de (1), (2), (3) a déjà été prouvée à la proposition 3.

D'autre part, (4) $\Rightarrow$ (3), car pour tout $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(f + \varphi; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$$

et donc, d'après le résultat B.1 de Bernat, $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Enfin, si $\mathfrak{h}$ vérifie (2), la formule (3) du théorème 1 montre que $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(\mathrm{O}(f))$.

*Remarque.* — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, il est bien connu que $\mathrm{I}(f; \mathfrak{g}) = \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$ et ceci découle d'ailleurs du corollaire ci-dessus, car $\mathrm{H}.f$ orbite de $f$ par une représentation unipotente est fermée, et donc égale à $f + \mathfrak{h}^\perp$. Par contre, si $\mathfrak{g}$ est exponentielle, il est connu que $\mathrm{I}(f; \mathfrak{g})$ peut être strictement plus petit que $\mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$. Il suffit pour cela de considérer l'algèbre $\mathfrak{g}_2$ de base H et A avec la relation $[\mathrm{H}, \mathrm{A}] = \mathrm{A}$ et d'appliquer la proposition 10. On donnera, d'autre part, à la fin de cet article un exemple d'une représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, avec $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$ égale à la somme de deux fois la représentation $\rho(f)$.

Rappelons un théorème de Mackey [7].

Théorème de Mackey. — *Soit* G *un groupe de Lie et* $\mathrm{A} \subset \mathrm{G}$ *un sous-groupe abélien fermé invariant de* G. *Soit* $\chi$ *un caractère de* A *et* K *le stabilisateur de* $\chi$ *dans* G, *c'est-à-dire*

$$\mathrm{K} = \{ g \in \mathrm{G};\ \chi(gag^{-1}) = \chi(a) \text{ pour tout } a \in \mathrm{A} \}.$$

*Si* U *est une représentation unitaire irréductible de* K *dont la restriction à* A *soit un multiple de* $\chi$, *alors* $\mathrm{Ind}\underset{\mathrm{K}}{\overset{\mathrm{G}}{\uparrow}} \mathrm{U}$ *est irréductible et si* U′ *est une autre représentation irréductible de* K *dont la restriction à* A *soit un multiple de* $\chi$, *alors* $\mathrm{Ind}\underset{\mathrm{K}}{\overset{\mathrm{G}}{\uparrow}} \mathrm{U} \simeq \mathrm{Ind}\underset{\mathrm{K}}{\overset{\mathrm{G}}{\uparrow}} \mathrm{U}'$ *si et seulement si* U *est équivalente à* U′.

Lemme 8. — *Soit* $f \in \mathfrak{g}^\star$ *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$, *alors si* $\mathfrak{h} \in \mathrm{I}(f; \mathfrak{a}^f)$, *alors la restriction de la représentation* $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$ *à* $\exp \mathfrak{a}$ *est un multiple de* $\chi_{f, \mathfrak{a}}$ *et* $\mathrm{I}(f; \mathfrak{a}^f) \subset \mathrm{I}(f; \mathfrak{g})$.

*Démonstration.* — Le stabilisateur du caractère $\chi_{f,\mathfrak{a}}$ du groupe $\exp \mathfrak{a} = A$ est le groupe $A^f = \exp \mathfrak{a}^f$, car il est connexe (Pukanzky [8] ou *voir* [12]) et a évidemment comme algèbre de Lie $\mathfrak{a}^f$.

Si $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{a}^f)$, $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{a}^f)$ et, par conséquent, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ puisque

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{a}^f),$$

$\rho = \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$ se réalise donc par translation à gauche dans l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$ complété de l'espace des fonctions $\psi : A^f \to \mathbf{C}$ continues à support compact modulo H et telles que

$$\psi(gh) = \chi_{f,\mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H,A^f}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(g) \qquad (g \in A^f,\ h \in H).$$

Remarquons que la restriction de $\Delta_{H,A^f}$ à A est triviale puisque $\mathfrak{a}$ est un idéal contenu dans $\mathfrak{h}$.

Or, $\mathfrak{a}$ étant abélien, on a si $X \in \mathfrak{a}^f$ et $A \in \mathfrak{a}$,

$$(\rho(\exp A)\psi)(\exp X) = \psi(\exp - A \exp X) = \psi(\exp X \exp - (\exp - X) A)$$

et

$$(\exp - X).A = A - [X, A], \qquad \text{or} \quad f[X, A] = 0 \quad \text{puisque } X \in \mathfrak{a}^f.$$

Il vient donc

$$(\rho(\exp A)\psi)(\exp X) = \psi(\exp X \exp - A \exp[X, A]) = e^{if(A)}\psi(\exp X),$$

on a donc prouvé la 1<sup>re</sup> partie.

Donc si $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{a}^f)$ d'après le théorème de Mackey, la représentation

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}^f)$$

est irréductible et il s'ensuit que $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g})$.

Passons à la démonstration du théorème 1.

On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, compte tenu de la proposition 4, on est ramené à vérifier que :

(A) $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est somme finie de représentations irréductibles.

(B) Toute représentation intervenant effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est de la forme $\rho(f + \varphi)$, avec $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

(C) Toute représentation associée à une forme $f + \varphi$ ou $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$ intervient dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et avec une multiplicité égale à $c(O(f + \varphi), f, \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, nombre de composantes connexes de l'ouvert $O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp$.

On se trouve toujours dans l'un des deux cas suivants :

I. Il existe un idéal abélien $\neq \{o\}$ sur lequel $f$ s'annule.

II. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a}^f \neq \mathfrak{g}$;

En effet, si on n'est pas dans le cas II, alors $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) = o$ et $f$ s'annule sur l'idéal abélien non nul $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$.

I. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien $\neq \{o\}$ sur lequel $f$ s'annule, alors $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} \in S(f; \mathfrak{g})$, donc $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$. Soient $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $\pi : G \to G/A$ et $p : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ les applications canoniques, $\tilde{f}$ l'image de $f$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}^\star$ et $\tilde{\mathfrak{h}} = p(\mathfrak{h})$. Alors

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi,$$

Comme $\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{g}})$, par hypothèse de récurrence, on a

$$\rho(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}) \\ \in V(f; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})}} c(O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}); \tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})\, \rho(O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}})$$

et, par conséquent,

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}) \\ \in V(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})}} c(O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}); \tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})\, \rho(O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi,$$

ce qui démontre (A).

Posons $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$, on a

$$\rho(O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi = \rho(O(f+\varphi))$$

et si $\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f}+\tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}})$,

$$\mathfrak{h} \in M(f+\varphi; \mathfrak{g}),$$

ce qui démontre (B).

Enfin si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ est telle que $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi; \mathfrak{g})$, comme $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$, $\varphi \supset \mathfrak{a}^\perp$ et si $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathfrak{g}}^\star$ est telle que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$,

$$\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f}+\tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}}).$$

De plus, la bijection canonique $i : \mathfrak{a}^\perp \to \tilde{\mathfrak{g}}^\star$ induit un homéomorphisme entre

$$O(f+\varphi; \mathfrak{g}) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp) \quad \text{et} \quad O(\tilde{f}+\tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}}) \cap (\tilde{f}+\tilde{\mathfrak{h}}^\perp),$$

ce qui démontre (C).

II. On note $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$ et on suppose que $\mathfrak{a}^f \neq \mathfrak{g}$.

II.*a*. Supposons d'abord que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$, on a alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}^f \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{g}$.

Notons $\psi \to \bar{\psi}$ l'application de restriction $\mathfrak{g}^\star \to (\mathfrak{a}^f)^\star$.

On a évidemment

$$\mathfrak{h} \in M(\bar{f};\ \mathfrak{a}^f) \qquad \text{et} \qquad \rho(f;\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{g}) = \operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(\bar{f};\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{a}^f).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\rho(\bar{f};\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{a}^f) = \bigoplus_{\substack{O(\bar{f}+\bar{\varphi}) \\ \in V(\bar{f};\mathfrak{h};\mathfrak{a}^f)}} c(O(\bar{f}+\bar{\varphi}), \bar{f};\ \mathfrak{h},\ \mathfrak{a}^f)\, \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi});\ \mathfrak{a}^f)$$

et donc

$$\rho(f;\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(\bar{f}+\bar{\varphi}) \\ \in V(\bar{f};\mathfrak{h};\mathfrak{a}^f)}} c(O(\bar{f}+\bar{\varphi}), \bar{f}, \mathfrak{h};\ \mathfrak{a}^f) \operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi});\ \mathfrak{a}^f).$$

Soit $\varphi \in \mathfrak{g}^\star$ un prolongement de $\bar{\varphi} \in \mathfrak{h}^\perp$, alors $\varphi \in \mathfrak{a}^\perp$, donc $\mathfrak{a}^{f+\varphi} = \mathfrak{a}^f$. Du lemme 8, il résulte que

$$\operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi});\ \mathfrak{a}^f) = \rho(O(f+\varphi);\ \mathfrak{g}),$$

ce qui démontre (A).

D'autre part, d'après le lemme 1, si $\mathfrak{h} \in M(\bar{f}+\bar{\varphi};\ \mathfrak{a}^f)$, alors $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi;\ \mathfrak{g})$, ce qui démontre (B).

Enfin, soit $\varphi \in \mathfrak{g}^\star$ tel que $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi;\ \mathfrak{g})$, alors $\bar{\varphi} \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(\bar{f}+\bar{\varphi};\ \mathfrak{g})$ et, par conséquent, la représentation

$$\rho(O(f+\varphi);\ \mathfrak{g}) = \operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi});\ \mathfrak{a}^f)$$

intervient effectivement dans $\rho(f;\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{g})$. Le théorème de Mackey montre que les représentations $\operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi});\ \mathfrak{a}^f)$ sont toutes non équivalentes.

La multiplicité de la représentation $\rho(O(f+\varphi);\ \mathfrak{g})$ dans $\rho(f;\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{g})$ est donc égale à $c(O(\bar{f}+\bar{\varphi}),\ \bar{f};\ \mathfrak{h};\ \mathfrak{a}^f)$.

Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et considérons l'application de restriction $r : \mathfrak{g}^\star \to (\mathfrak{a}^f)^\star$, alors

$$r((O(f+\varphi)) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)) = O(\bar{f}+\bar{\varphi}) \cap (\bar{f}+\mathfrak{h}^\perp)$$

et $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)$ est l'image réciproque de sa projection.

En effet, soit $f+\varphi' \in (f+\mathfrak{h}^\perp) \cap O(f+\varphi)$, alors

$$\rho(O(f+\varphi')) = \rho(O(f+\varphi)) = \operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi}');\ \mathfrak{a}^f) = \operatorname{Ind}\uparrow_{A^f}^{G} \rho(O(\bar{f}+\bar{\varphi});\ \mathfrak{a}^f).$$

D'après le théorème de Mackey et le résultat B.3 de Bernat, il en résulte que $\bar{f}+\bar{\varphi}' \in O(\bar{f}+\bar{\varphi};\ \mathfrak{a}^f)$.

Réciproquement, soit $\bar{f}+\bar{\varphi}'\in(\bar{f}+\mathfrak{h}^{\perp})\cap \mathrm{O}(\bar{f}+\bar{\varphi})$ et soit $\varphi'\in\mathfrak{h}^{\perp}$ un prolongement quelconque de $\bar{\varphi}'$. On a alors

$$\operatorname{Ind}\uparrow_{\mathrm{A}^f}^{\mathrm{G}}\rho(\mathrm{O}(\bar{f}+\bar{\varphi}');\mathfrak{a}^f)=\operatorname{Ind}\uparrow_{\mathrm{A}^f}^{\mathrm{G}}\rho(\mathrm{O}(\bar{f}+\bar{\varphi});\mathfrak{a}^f)=\rho(\mathrm{O}(f+\varphi');\mathfrak{g})=\rho(\mathrm{O}(f+\varphi);\mathfrak{g}),$$

ce qui prouve que $f+\varphi'\in \mathrm{O}(f+\varphi)\cap(f+\mathfrak{h}^{\perp})$ d'après B.3.

On a donc, quelle que soit $\varphi\in\mathfrak{h}^{\perp}$ et $\mathfrak{h}\in \mathrm{M}(f+\varphi;\mathfrak{g})$,

$$c(\mathrm{O}(f+\varphi);f;\mathfrak{h};\mathfrak{g})=c(\mathrm{O}(\bar{f}+\bar{\varphi});\bar{f};\mathfrak{h};\mathfrak{a}^f),$$

ce qui prouve (C).

On suppose désormais que $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{h}$; on pose $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}^f$, $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_0+\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k}=\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ et on note $\mathfrak{j}$ le noyau de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}$. On distinguera les deux cas $\mathfrak{h}_0+\mathfrak{j}=\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_0+\mathfrak{j}\neq\mathfrak{h}$.

II. *b*. Supposons $\mathfrak{h}_0+\mathfrak{j}=\mathfrak{h}$.

Choisissons $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{v}$ comme dans la proposition 9. On a alors

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{h}_0,\qquad \mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_0\oplus\mathfrak{v},\qquad \mathfrak{k}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{h}_0\oplus\mathfrak{v}\qquad\text{et}\qquad[\mathfrak{t},\mathfrak{v}]\subset\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}.$$

De plus, $\mathrm{B}_f$ met en dualité $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{v}$ et les représentations $\rho(f;\mathfrak{h};\mathfrak{g})$ et $\rho(f;\mathfrak{h}';\mathfrak{g})$ sont équivalentes. Comme $\mathfrak{h}'\supset\mathfrak{a}$ d'après le cas *a*, on a

$$\rho(f;\mathfrak{h};\mathfrak{g})=\bigoplus_{\substack{\mathrm{O}(f+\varphi')\\ \in \mathrm{V}(f;\mathfrak{h}')}} c(\mathrm{O}(f+\varphi'),f,\mathfrak{h}';\mathfrak{g})\,\rho(\mathrm{O}(f+\varphi')).$$

Ce qui montre A

Pour montrer (B) il suffit de démontrer que quel que soit $\varphi'\in\mathfrak{h}'^{\perp}$, il existe $\varphi\in\mathfrak{h}^{\perp}$ telle que $f+\varphi\in \mathrm{O}(f+\varphi')$.

Comme $\mathrm{B}_f$ met en dualité $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{v}$, il existe un élément $\mathrm{V}(\varphi')\in\mathfrak{v}$ déterminé de manière unique par l'égalité

$$f([\mathrm{V}(\varphi'),\mathrm{T}])=\varphi'(\mathrm{T})\quad\text{pour tout } \mathrm{T}\in\mathfrak{t}.$$

Montrons que $\exp \mathrm{V}(\varphi').(f+\varphi')$ appartient à $f+\mathfrak{k}^{\perp}$. Comme $\mathrm{V}(\varphi')\in\mathfrak{h}'$, $\exp \mathrm{V}(\varphi').(f+\varphi')$ appartient à $f+\mathfrak{h}'^{\perp}$ et il suffit de démontrer que $\exp \mathrm{V}(\varphi').(f+\varphi')$ appartient à $(f+\mathfrak{t}^{\perp})$. Or $\mathfrak{a}$ étant abélien, on a puisque $\mathrm{V}(\varphi')\in\mathfrak{a}$

$$\exp-\mathrm{V}(\varphi').\mathrm{T}=\mathrm{T}-[\mathrm{V}(\varphi'),\mathrm{T}].$$

Donc

$$\exp \mathrm{V}(\varphi').(f+\varphi)(\mathrm{T})=f(\mathrm{T})+\varphi'(\mathrm{T})-f[\mathrm{V}(\varphi'),\mathrm{T}]=f(\mathrm{T}).$$

Pour montrer (C) il suffit de démontrer que si $\varphi\in\mathfrak{h}^{\perp}$ et est telle que $\mathfrak{h}\in \mathrm{M}(f+\varphi;\mathfrak{g})$, il existe $\varphi'\in\mathfrak{h}'^{\perp}$ telle que $f+\varphi'\in \mathrm{O}(f+\varphi)$ et telle que

$$c(\mathrm{O}(f+\varphi');f;\mathfrak{h}';\mathfrak{g})=c(\mathrm{O}(f+\varphi);f;\mathfrak{h};\mathfrak{g}).$$

On procède de manière analogue. Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$, il existe un élément $T(\varphi) \in \mathfrak{t}$ déterminé de manière unique par l'égalité

$$f([T(\varphi), V]) = \varphi(V) \quad \text{pour tout } V \in \mathfrak{v}.$$

Alors $(\exp T(\varphi)).(f+\varphi) \in f + \mathfrak{k}^{\perp}$. En effet, comme $T(\varphi) \in \mathfrak{h}$,

$$\exp T(\varphi).(f+\varphi) \in f + \mathfrak{h}^{\perp}.$$

D'autre part, comme $[\mathfrak{t}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h}$, on a

$$(\exp - T(\varphi)).V = V - [T(\varphi), V] + W, \qquad \text{où} \quad W \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$$

et, par conséquent,

$$(\exp T(\varphi).(f+\varphi))(V) = f(V) + \varphi(V) - f([T(\varphi), V]) = f(V).$$

Soit alors R l'application de $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ dans $f+\mathfrak{k}^{\perp}$ défini par

$$R(f+\varphi) = \exp T(\varphi).(f+\varphi)$$

et R' l'application de $f+\mathfrak{h}'^{\perp}$ dans $f+\mathfrak{k}^{\perp}$ définie par

$$R'(f+\varphi') = \exp V(\varphi').(f+\varphi').$$

Les assertions que nous allons prouver :

(1) Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ et telle que $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi; \mathfrak{g})$ et soit C une composante connexe de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$, alors R(C) est une composante connexe de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{k}^{\perp})$ et l'application $C \to R(C)$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^{\perp})$ et l'ensemble des composantes connexes de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{k}^{\perp})$.

(2) Soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^{\perp}$ et telle que $\mathfrak{h}' \in M(f+\varphi'; \mathfrak{g})$ et soit C' une composante connexe de $O(f+\varphi') \cap (f+\mathfrak{h}'^{\perp})$. Alors R'(C') est une composante connexe de $O(f+\varphi') \cap (f+\mathfrak{k}^{\perp})$ et l'application $C' \to R'(C')$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $O(f+\varphi') \cap (f+\mathfrak{h}'^{\perp})$ et l'ensemble des composantes connexes de $O(f+\varphi') \cap (f+\mathfrak{k}^{\perp})$, entraîneront alors (C).

En effet, si $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ et est telle que $\mathfrak{h} \in M(f+\varphi; \mathfrak{g})$, alors

$$R(f+\varphi) \in O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}'^{\perp}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}' \in M(R(f+\varphi), \mathfrak{g}).$$

Par conséquent, la représentation $\rho(O(f+\varphi))$ apparaît effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ avec une multiplicité égale à $c(O(f+\varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$.

(2) dit que $c(O(f+\varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$ est égal au nombre de composantes connexes de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{k}^{\perp})$.

(1) dit que $c(O(f+\varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est aussi égal au nombre de composants connexes de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{k}^{\perp})$.

On aura donc l'égalité cherchée

$$C(O(f+\varphi)\,;f;\mathfrak{h};\mathfrak{g}) = c(O(f+\varphi)\,;f;\mathfrak{h}';\mathfrak{g}).$$

Démontrons, par exemple, (1) [(2) se démontrerait exactement de la même manière].

Sur $f+\mathfrak{k}^{\perp}$, l'application R est l'identité [on a $T(\varphi) = 0$].

Si C est une composante connexe de $O(f+\varphi)\cap(f+\mathfrak{h}^{\perp})$, C est stable par le groupe H; par conséquent,

$$R(C)\subset C\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp}) \qquad \text{et donc} \qquad R(C) = C\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp})$$

est un ouvert connexe de $O(f+\varphi)\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp})$. Comme

$$O(f+\varphi)\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp}) = \bigcup C\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp}),$$
$$C\in \text{composantes connexes de } O(f+\varphi)\cap(f+\mathfrak{h}^{\perp}),$$

ceci prouve bien (1) et le cas II.$b$ est traité.

II.$c$. On suppose désormais que $\mathfrak{h}_0+\mathfrak{i}\neq\mathfrak{h}$.

On est donc dans la situation de la proposition 10 dont on reprend les notations. Rappelons que si $\nu_+$ (resp. $\nu_-$) est un nombre réel strictement positif (resp. négatif), on a

$$\rho(f;\mathfrak{h};\mathfrak{k}) = \rho(f_{\nu+};\mathfrak{h};\mathfrak{k})\oplus\rho(f_{\nu-};\mathfrak{h}';\mathfrak{k}).$$

Donc si l'on note $\tilde{f}_{\nu+}$ (resp. $\tilde{f}_{\nu-}$) une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongeant $f_{\nu+}$ (resp. $f_{\nu-}$), on a

$$\rho(f;\mathfrak{h};\mathfrak{g}) = \rho(\tilde{f}_{\nu+};\mathfrak{h}';\mathfrak{g})\oplus\rho(\tilde{f}_{\nu-};\mathfrak{h}';\mathfrak{g}).$$

Comme $\mathfrak{h}'\supset\mathfrak{a}$, on pourra se ramener à la situation du II.$a$, si on peut choisir $\nu^+$ et $\nu^-$ et $\tilde{f}_{\nu+}$ et $\tilde{f}_{\nu-}$ de sorte que $\mathfrak{h}'\in M(\tilde{f}_{\nu+};\mathfrak{g})\cap M(\tilde{f}_{\nu-};\mathfrak{g})$ (on a bien $\mathfrak{a}^{\tilde{f}_\nu}\neq 0$, si $\nu\neq 0$, car $\tilde{f}_\nu([H, A]) = \nu\neq 0$. Or un tel choix est possible. Soit, en effet, $\mathfrak{m}$ un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Identifions $\mathfrak{g}^\star$ à $\mathfrak{k}^\star\oplus\mathfrak{m}^\star$, la variété linéaire $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ s'identifie alors à $\mathbf{R}\times\mathfrak{m}^\star$ par l'application $\tilde{f}_\nu\to(\nu, \tilde{f}_\nu\,|\,\mathfrak{m})$. Comme $\mathfrak{h}'\in S(\tilde{f}_\nu;\mathfrak{g})$ quel que soit $\nu$ et $\tilde{f}_\nu$, l'ensemble des couples $(\nu,\varphi)\in\mathbf{R}\times\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathfrak{h}'\in M(f_\nu+\varphi;\mathfrak{g})$ est un ouvert de Zariski non vide car $\mathfrak{h}'\in M(f;\mathfrak{g})$, il est donc dense, ce qui établit notre assertion.

Supposons donc que $\mathfrak{h}'\in M(f_{\nu+};\mathfrak{g})\cap M(\tilde{f}_{\nu+};\mathfrak{g})$. Alors d'après II.$a$, on a

$$\rho(f;\mathfrak{h};\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f}_{\nu+}+\varphi')\\ \in V(\tilde{f}_{\nu+};\mathfrak{h}')}} c(O(\tilde{f}_{\nu+}+\varphi');\tilde{f}_{\nu+};\mathfrak{h}';\mathfrak{g})\,\rho(O(\tilde{f}_{\nu+}+\varphi'))$$
$$\oplus\bigoplus_{\substack{O(\tilde{f}_{\nu-}+\varphi')\\ \in V(\tilde{f}_{\nu-};\mathfrak{h}')}} c(O(\tilde{f}_{\nu-}+\varphi');\tilde{f}_{\nu-};\mathfrak{h}';\mathfrak{g})\rho(O(\tilde{f}_{\nu-}+\varphi'))$$

ce qui montre (A).

Pour montrer (B) il suffit de montrer que quelque soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^{\perp}$ et $\nu \neq 0$, il existe $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ tel que

$$f + \varphi \in \mathrm{O}(\tilde{f}_\nu + \varphi').$$

En effet, soit $a(\varphi')$ le nombre réel tel que

$$\tilde{f}_\nu([a(\varphi')\,\mathrm{A}, \mathrm{H}]) = \varphi'(\mathrm{H}), \qquad \text{c'est-à-dire} \quad a(\varphi') = -\frac{\varphi'(\mathrm{H})}{\nu},$$

alors

$$(\exp - a(\varphi')\,\mathrm{A}).\mathrm{H} = \mathrm{H} - [a(\varphi')\,\mathrm{A}, \mathrm{H}]$$

et

$$\exp(a(\varphi')\,\mathrm{A})\,(\tilde{f}_\nu + \varphi') \in \tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^{\perp}, \qquad \text{car} \quad \mathrm{A} \in \mathfrak{h}'$$

et

$$\exp(a(\varphi')\,\mathrm{A}\,(\tilde{f}_\nu + \varphi')\,(\mathrm{H}) = f(\mathrm{H}) + \varphi'(\mathrm{H}) - \tilde{f}_\nu[a(\varphi')\,\mathrm{A}, \mathrm{H}] = f(\mathrm{H}),$$

donc

$$\exp(a(\varphi')\,\mathrm{A})\,(\tilde{f}_\nu + \varphi') \in \tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^{\perp} \subset f + \mathfrak{h}^{\perp}.$$

On note $\mathrm{R}'_\nu$ l'application de $\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^{\perp}$ dans $\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^{\perp}$ définie par

$$(\mathrm{R}'_\nu)\,(\tilde{f}_\nu + \varphi') = \exp(a(\varphi')\,\mathrm{A})\,(\tilde{f}_\nu + \varphi')$$

et on remarque comme précédemment que si $\varphi'_0 \in \mathfrak{h}'^{\perp}$ est telle que $\mathfrak{h}' \in \mathrm{M}(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0)$, et si $\mathrm{C}'$ est une composante connexe de

$$\mathrm{O}(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^{\perp}), \qquad \text{alors} \quad \mathrm{R}'(\nu)\,(\mathrm{C}') = \mathrm{C}' \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k})$$

et que, par conséquent, $\mathrm{R}'(\nu)$ réalise une bijection entre les composantes connexes de $\mathrm{O}(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^{\perp})$ et celles de $\mathrm{O}(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^{\perp})$ et donc que

$$c(\mathrm{O}(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0), \tilde{f}_\nu; \mathfrak{h}') = c(\mathrm{O}(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0), \tilde{f}_\nu, \mathfrak{k}).$$

Démontrons (C).

Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^{\perp}$ et telle que $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors d'après la formule de la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, la multiplicité de la représentation $\rho(\mathrm{O}(f + \varphi))$ est égale à

$$c(\mathrm{O}(f + \varphi), f_{\nu+}; \mathfrak{h}') + c(\mathrm{O}(f + \varphi); \tilde{f}_{\nu-}; \mathfrak{h}').$$

Soit

$$(f + \mathfrak{h}^{\perp})^{+} = \{f + l \in f + \mathfrak{h}^{\perp} \text{ tel que } (f + l)\,(\mathrm{A}) > 0\},$$
$$(f + \mathfrak{h}^{\perp})^{-} = \{f + l \in f + \mathfrak{h}^{\perp} \text{ tel que } (f + l)\,(\mathrm{A}) < 0\},$$

alors $\mathrm{O}(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^{\perp})$ est la réunion de

$$\mathrm{O}(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^{\perp})^{+} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{O}(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^{\perp})^{-},$$

car si $f+l \in O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)$, alors

$$\mathfrak{h} \in M(f+l;\, \mathfrak{g}) \qquad \text{et donc} \qquad (f+l)(A) \neq 0,$$

d'après le (3) de la proposition 10.

Chacune des composantes connexes de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)$ est alors contenue, soit dans $(f+\mathfrak{h}^\perp)^+$, soit dans $(f+\mathfrak{h}^\perp)^-$. On notera $c^+(O(f+\varphi), f; \mathfrak{h})$ [resp. $c^-(O(f+\varphi); f; \mathfrak{h})$] le nombre de composantes connexes de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)^+$ [resp. de $O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)^-$]. Il suffit donc de montrer les égalités

$$\begin{aligned} c^+(O(f+\varphi), f; \mathfrak{h}) &= c\big(O(f+\varphi), \tilde{f}_{\nu+}; \mathfrak{h}'\big) \\ &= c\big(O(f+\varphi), \tilde{f}_{\nu+}; \mathfrak{k}\big) \end{aligned}$$

d'après le résultat précédent.

De même,

$$\begin{aligned} c^-(O(f+\varphi), f; \mathfrak{h}) &= c\big(O(f+\varphi), \tilde{f}_{\nu-}; \mathfrak{h}'\big) \\ &= c\big(O(f+\varphi), \tilde{f}_{\nu-}; \mathfrak{k}\big). \end{aligned}$$

Démontrons que $c^+(O(f+\varphi), f; \mathfrak{h}) = c\big(O(f+\varphi), \tilde{f}_{\nu+}; \mathfrak{k}\big)$.

Soit $f+l \in (f+\mathfrak{h}^\perp)^+$, il existe un nombre $x(l)$ défini de manière unique par la condition

$$\exp(x(l)\,H)\,(f+l) \in \big(\tilde{f}_{\nu+} + \mathfrak{k}^\perp\big);$$

en effet, comme $\exp(x(l)\,H)\,(f+l) \in \tilde{f}_{\nu+} + \mathfrak{h}^\perp$, il suffit que

$$\exp(x(l)\,H)\,(f+l)\,(A) = \nu^+.$$

Or ceci donne la condition $e^{-x(l)} = \dfrac{\nu^+}{(f+l)\,(A)}$.

L'application

$$R^+ : \quad (f+\mathfrak{h}^\perp)^+ \to \big(\tilde{f}_{\nu+} + \mathfrak{k}^\perp\big) \subset f+\mathfrak{h}^\perp$$

définie par $R^+(f+l) = \exp(x(l)\,H)\,(f+l)$ est telle que si $C^+$ est une composante connexe de

$$O(f+\varphi) \cap (f+\mathfrak{h}^\perp)^+, \qquad R^+(C^+) = C^+ \cap \big(\tilde{f}_{\nu+} + \mathfrak{k}^\perp\big).$$

On voit donc que

$$c^+(O(f+\varphi), f; \mathfrak{h}) = c\big(O(f+\varphi), \tilde{f}_{\nu+}; \mathfrak{k}\big)$$

ce qui démontre (C).

La démonstration du théorème 1 est donc terminée.

## V. — Un exemple.

L'exemple suivant montre que la multiplicité des représentations intervenant donc $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ peut être strictement supérieure à 1.

Considérons l'algèbre résoluble exponentielle (complètement résoluble sur $\mathbf{R}$) de dimension 5 définie sur la base $(h, x, h_0, a, z)$ par les crochets

$$[h, x] = -x, \quad [h, h_0] = 2h_0, \quad [h, a] = a,$$
$$[x, h_0] = a, \quad [x, a] = z.$$

(Les crochets non écrits étant nuls, ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation.)

Soit $f = a^* + z^*$, alors $\mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}z$.

Soit $\mathfrak{h} = \mathbf{R}h_0 + \mathbf{R}h + \mathbf{R}z$, alors $\mathfrak{h} \in \mathrm{M}(f; \mathfrak{g})$.

Le plan $f + \mathfrak{h}^\perp$ est l'ensemble des formes $\lambda a^* + z^* + \mu x^*$.

Nous allons montrer que

$$\mathrm{O}(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) = \{\lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda \neq 0\},$$

ce qui montrera que l'ouvert $\mathrm{O}(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ a deux composantes connexes et que, de plus, $\mathrm{O}(f)$ est la seule orbite rencontrant $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert.

D'après le théorème, on aura donc

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = 2\rho(\mathrm{O}(f)).$$

Notons $f_{-1}$ la forme $-a^* + z^*$, $f_1$ la forme $f$ et H le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

Remarquons que $\mathrm{O}(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \subset \{\lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda \neq 0\}$, car on a

$$\mathfrak{g}(\lambda a^* + z^* + \mu x^*) = \mathbf{R}z \quad \text{si et seulement si } \lambda \neq 0.$$

Il suffit donc de prouver que :

(a) $f_{-1} \in \mathrm{O}(f_1)$;

(b) $\mathrm{H}.f_1 = \{\lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda > 0\}$,
$\mathrm{H}.f_{-1} = \{\lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda < 0\}$.

Prouvons (a). On calcule facilement que

$$(\exp tx) f_1 = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) h_0^* + (1 + t)\, a^* + z^*,$$

par conséquent, si $t = -2$,

$$(\exp -2x) f_1 = f_{-1}.$$

Prouvons (*b*) Tout élément du groupe H peut s'écrire d'une manière et d'une seule $\exp\alpha h \exp\beta h_0 \exp\gamma z$.

Des formules

$$(\exp - \beta h_0 \exp - \alpha h)(x) = e^{\alpha}(x + \beta a),$$
$$(\exp - \beta h_0 \exp - \alpha h)(a) = e^{-\alpha} a.$$

on déduit que

$$(\exp\alpha h \exp\beta h_0 \exp\gamma z)(f_1) = \quad e^{-\alpha} a^* + z^* + \beta e^{\alpha} x^*$$

et

$$(\exp\alpha h \exp\beta h_0 \exp\gamma z) f_{-1} = - e^{-\alpha} a^* + z^* - \beta e^{\alpha} x^*,$$

d'où découle évidemment (*b*).

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] P. Bernat, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 82, 1965, p. 37-99).
[2] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann, Paris, 1963, chap. 7.
[3] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, t. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
[4] J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 113-121).
[5] G. Hochschild, *The structure of Lie Groups*, Holden-Day, Amsterdam, 1965.
[6] A. A. Kirillov, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* (*Uspekhi Math. Nauk*, t. 17, p. 57-110, en russe).
[7] G. W. Mackey, *Unitary representations of groupe extensions* (*Acta Math.*, t. 99, 1958, p. 265-311).
[8] L. Pukanszky, *On the unitary representations of exponential groups* (*J. Funct. Anal.*, t. 2, 1968, p. 73-113).
[9] L. Pukanszky, *On the theory of exponential groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 126, 1967, p. 487-507).
[10] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
[11] M. Vergne, *Sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1405-1407).
[12] *Représentations des groupes de Lie résolubles* (à paraître).


(Manuscrit reçu le 28 septembre 1970.)

Michèle Vergne,
11, rue Quatrefages,
75-Paris, 5e.