

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RUDOLF RENTSCHLER

MICHÈLE VERGNE

Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 6, n^o 3 (1973), p. 389-405.

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_3_389_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE SEMI-CENTRE DU CORPS ENVELOPPANT D'UNE ALGÈBRE DE LIE

PAR RUDOLF RENTSCHLER ET MICHÈLE VERGNE

RÉSUMÉ. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0. On établit un isomorphisme canonique du semi-centre du corps enveloppant (resp. de l'algèbre enveloppante) de \mathfrak{g} sur l'anneau engendré par les fonctions rationnelles (resp. polynômiales) semi-invariantes sur le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} .

INTRODUCTION. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0. Soient $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique qu'on identifie à l'algèbre des polynômes sur \mathfrak{g}^* , espace vectoriel dual de \mathfrak{g} . Soit Γ le groupe adjoint algébrique de \mathfrak{g} , Γ est le plus petit sous-groupe algébrique de $\text{Aut } \mathfrak{g}$ dont l'algèbre de Lie contienne $\text{ad } (\mathfrak{g})$.

Soit Z le centre de $U(\mathfrak{g})$, alors on sait qu'il y a un isomorphisme canonique entre Z et l'algèbre des polynômes invariants par Γ . Dans le cas semi-simple, cet isomorphisme est l'isomorphisme d'Harish-Chandra (voir [5], chap. 7) dans le cas nilpotent, cet isomorphisme, établi par Dixmier, est fourni par la symétrisation. Dans le cas général d'une algèbre de Lie, cet isomorphisme, conjecturé par Dixmier, a été établi par Duflo. Pour établir cet isomorphisme, M. Duflo démontre des résultats sur les représentations d'une algèbre de Lie quelconque, qui étayent la philosophie de la « méthode des orbites », méthode qui avait été auparavant surtout efficace dans le cadre des représentations des groupes et algèbres de Lie résolubles (Kirillov, Bernat, Dixmier, Auslander-Kostant, voir par exemple [2]). Il construit pour un ensemble dense $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ de \mathfrak{g}^* une famille de représentations irréductibles $\rho_f^{\mathfrak{h}}$ dépendant de $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ et d'une polarisation \mathfrak{h} au point f , dont le noyau ne dépend que de f , et c'est cette application $(f, \mathfrak{h}) \mapsto \rho_f^{\mathfrak{h}}$ qui est fondamentale (on rappelle les résultats précis au paragraphe 2). Par exemple si $u \in Z$, u agit dans la représentation $\rho_f^{\mathfrak{h}}$ par multiplication par un scalaire $\hat{u}(f)$, et $u \mapsto \hat{u}$ sera l'isomorphisme cherché.

Cependant, pour certaines algèbres de Lie (par exemple, l'algèbre de Lie non commutative de dimension 2), le centre Z de $U(\mathfrak{g})$ peut être réduit aux scalaires. De plus, comme en général le corps des fractions rationnelles invariantes par Γ n'est pas égal au corps des quotients des polynômes invariants, les polynômes Γ -invariants de $S(\mathfrak{g})$ ne suffisent pas (en général) à séparer génériquement les Γ -orbites de Γ dans \mathfrak{g}^* .

Par contre toute fonction rationnelle invariante est quotient de deux polynômes semi-invariants [i. e. un polynôme P tel que $\gamma.P = \chi(\gamma)P$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, χ étant un caractère de Γ], et on sait d'autre part que le semi-centre de $U(\mathfrak{g})$ [c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les semi-invariants de $U(\mathfrak{g})$] est une sous-algèbre commutative qui n'est jamais réduite aux scalaires [4].

On montrera alors que l'isomorphisme de Duflo peut s'étendre au semi-centre et qu'on obtient ainsi un isomorphisme du corps engendré par les semi-invariants de $U(\mathfrak{g})$, avec le corps engendré par les semi-invariants de $S(\mathfrak{g})$. On montrera d'autre part que le semi-centre du corps enveloppant est contenu dans le corps des fractions du semi-centre de l'algèbre enveloppante. En particulier on a un isomorphisme du centre du corps enveloppant de $U(\mathfrak{g})$ avec le corps des fonctions rationnelles invariantes sur \mathfrak{g}^* qui avait été précédemment obtenu dans [10] pour le cas résoluble.

Il serait intéressant de chercher plus généralement s'il est possible d'étendre cet isomorphisme à des sous-corps commutatifs maximaux du corps enveloppant. On apporte un résultat très limité sur ce sujet dans le paragraphe 6, le corps des quotients de l'algèbre $U^0(\mathfrak{g}, s)$ introduite ayant peu de chance d'être commutatif maximal en dehors du cas résoluble.

Nous remercions W. Borho pour nous avoir communiqué ses résultats sur le semi-centre [1]. Nous renvoyons au livre de J. Dixmier [5] pour les concepts généraux utilisés et nous le remercions de nous avoir communiqué son manuscrit, ainsi que de son aide pour la démonstration du lemme 1.1.

1. QUELQUES LEMMES PRÉLIMINAIRES. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0, $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de \mathfrak{g} et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} munie de sa filtration $U_n(\mathfrak{g})$. On note $K(\mathfrak{g})$ le corps des quotients de $U(\mathfrak{g})$ et $R(\mathfrak{g})$ le corps des quotients de $S(\mathfrak{g})$ qu'on identifie au corps des fonctions rationnelles sur \mathfrak{g}^* (espace vectoriel dual de \mathfrak{g}). Soit Γ le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de \mathfrak{g} tel que $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \text{Lie } \Gamma \subset \text{Der } \mathfrak{g}$. On dit que Γ est le groupe algébrique adjoint de \mathfrak{g} . L'opération adjointe

de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} se prolonge sur $K(\mathfrak{g})$ et $R(\mathfrak{g})$ en opération par dérivations encore notées ad . Le groupe $\text{Aut } \mathfrak{g}$ et donc Γ opère dans \mathfrak{g} et aussi dans \mathfrak{g}^* par la représentation contragrédiente et aussi dans $K(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})$.

Si χ est un caractère algébrique de Γ , la différentielle de χ est un caractère de Lie Γ et se note $d\chi$. Dans la suite caractère voudra dire caractère algébrique et les lettres λ, μ désignent des caractères de \mathfrak{g} et χ des caractères de Γ .

Si A est un sous-espace de $K(\mathfrak{g})$ ou $R(\mathfrak{g})$, χ un caractère de Γ , et μ un caractère de \mathfrak{g} on note :

$$\begin{aligned} A^\Gamma &= \{ a \in A \mid \forall \gamma \in \Gamma, \gamma.a = a \}, \\ A^\mathfrak{g} &= \{ a \in A \mid \forall X \in \mathfrak{g}, \text{ad } X.a = 0 \}, \\ A^\chi &= \{ a \in A \mid \forall \gamma \in \Gamma, \gamma.a = \chi(\gamma) a \}, \\ A^\mu &= \{ a \in A \mid \forall X \in \mathfrak{g}, \text{ad } X.a = \mu(X) a \}. \end{aligned}$$

1.1. LEMME. — Soit χ un caractère de Γ et soit $\mu = d\chi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ qu'on identifie à un caractère de \mathfrak{g} , alors $K(\mathfrak{g})^\chi = K(\mathfrak{g})^\mu$. Réciproquement si μ est un caractère de \mathfrak{g} tel que $K(\mathfrak{g})^\mu \neq \{0\}$, alors il existe un caractère χ de Γ tel que $\mu = d\chi$ et on a $K(\mathfrak{g})^\mu = K(\mathfrak{g})^\chi$.

Démonstration. — Soit x un élément de $K(\mathfrak{g})$, écrivons $x = uw^{-1} = w^{-1}r$ avec u, w, r dans $U(\mathfrak{g})$. Soit g un élément de $\text{Aut } \mathfrak{g}$, alors $g.x = \alpha x$ avec $\alpha \in k$, si et seulement si $(g.u)(g.v)^{-1} = \alpha w^{-1}r$, ou encore si et seulement si $w(g.u) = \alpha r(g.v)$; comme les éléments u, v, w, r sont dans un même sous-espace $U_n(\mathfrak{g})$ de dimension finie de $U(\mathfrak{g})$, on voit que le sous-groupe des éléments de $\text{Aut } \mathfrak{g}$ laissant stable le sous-espace vectoriel kx de $K(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe algébrique de $\text{Aut } \mathfrak{g}$. Soit $w \in K(\mathfrak{g})^\chi$, on a donc :

$$(1) \quad w(g.u) = \chi(g)r(g.v) \quad \text{pour tout } g \in \Gamma.$$

D'autre part si $X \in \mathfrak{g}$ on a $X.x = \mu(X)x$ si et seulement si

$$(\text{ad } X.u)v^{-1} - uw^{-1}(\text{ad } X.v) = \mu(X)w^{-1}r,$$

ou encore

$$(2) \quad w(\text{ad } X.u) = \mu(X)rv + vr(\text{ad } X.v).$$

Donc en différenciant la relation (1) dans $U_n(\mathfrak{g})$ on voit que $x \in K(\mathfrak{g})^\mu$ avec $\mu = d\chi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$.

Prouvons la réciproque : D'après ce qui précède il suffit de montrer que si $x \in K(\mathfrak{g})^\mu$, alors Γ laisse stable le sous-espace vectoriel kx [le caractère χ sera algébrique d'après (1)] et pour cela il suffit de montrer que si Γ_1 est le sous-groupe algébrique de $\text{Aut } \mathfrak{g}$ laissant stable kx , alors $\text{Lie } \Gamma_1 \supset \text{ad } \mathfrak{g}$.

Soit donc $X \in \mathfrak{g}$. On a $\text{ad } X.x = \mu x$ avec $\mu = \mu(X) \in k$. On peut choisir une décomposition $x = u' v'^{-1}$ avec $u', v' \in U_n(\mathfrak{g})$ et avec $\text{ad } X.u' = (\mu + \lambda) u'$, $\text{ad } X.v' = \lambda v'$: en effet le sous-espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de $U_n(\mathfrak{g}) \times U_n(\mathfrak{g})$ formé des couples (a, b) tels que $a.x = b$ est stable par l'endomorphisme

$$\sigma(X) : (a, b) \mapsto (\text{ad } X.a + \mu a, \text{ad } X.b)$$

et il suffit de choisir (v', u') vecteur propre non nul de E pour l'endomorphisme $\sigma(X)$.

Le plus petit sous-groupe algébrique de $\text{Aut } \mathfrak{g}$ dont l'algèbre de Lie contient $k \text{ ad } X$ laisse alors stable ku' et kv' et donc kx .

Remarquons que l'assertion analogue pour $R(\mathfrak{g})^\lambda$ et $R(\mathfrak{g})^\mu$ se démontre de la même manière.

1.2 LEMME (Chevalley). — Si $a \in R(\mathfrak{g})^\lambda$, il existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $a_1 \in S(\mathfrak{g})^{\lambda+\mu}$ et $a_2 \in S(\mathfrak{g})^\mu$ tels que $a = a_1 a_2^{-1}$.

Démonstration. — Écrivons $a = a_1 a_2^{-1}$ avec $a_1, a_2 \in S(\mathfrak{g})$ et a_1 et a_2 sans facteurs communs. On a alors

$$\lambda(X) a_1 a_2^{-1} = (\text{ad } X.a_1) a_2^{-1} - a_1 (\text{ad } X.a_2) a_2^{-2},$$

ou encore

$$a_1 (\text{ad } X.a_2) = a_2 ((\text{ad } X.a_1) - \lambda(x) a_1),$$

donc a_2 divise $\text{ad } X.a_2$, mais comme le degré de $(\text{ad } X.a_2)$ est inférieur ou égal à celui de a_2 on en déduit que $\text{ad } X.a_2 \in k a_2$ c'est-à-dire $\text{ad } X.a_2 = \mu(x) a_2$ avec $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et donc $a_1 \in S(\mathfrak{g})^{\lambda+\mu}$.

Soit λ un caractère de \mathfrak{g} , on peut alors définir un automorphisme τ_λ de $U(\mathfrak{g})$ tel que $\tau_\lambda(X) = X + \lambda(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On prolonge cet automorphisme τ_λ en un automorphisme de $K(\mathfrak{g})$.

1.3. LEMME. — Soit $\mathfrak{g}' = \ker \lambda$ et soit $x \in K(\mathfrak{g})$, on a $\tau_\lambda(x) = x$, si et seulement si $x \in K(\mathfrak{g}')$.

Démonstration. — Si $\lambda = 0$ il n'y a rien à démontrer, sinon on écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus kX$ avec $\lambda(X) = 1$. On peut écrire tout élément de $U(\mathfrak{g})$ sous la forme unique $u = \sum X^n v_n$ avec $v_n \in U(\mathfrak{g}')$ et alors on peut définir le degré de u par rapport à X . Il est clair sur cette écriture que si $u \in U(\mathfrak{g})$ et si $\tau_\lambda(u) = u$ alors $u \in U(\mathfrak{g}')$ et que pour tout u dans $U(\mathfrak{g})$ le degré de $\tau_\lambda(u) - u$ en X est strictement plus petit que le degré u .

Soit $x \in K(\mathfrak{g})$ tel que $\tau_\lambda x = x$; écrivons $x = uw^{-1} = w^{-1}r$ et supposons que (degré de u + degré de v) soit minimum.

On a

$$\tau_\lambda(u) \tau_\lambda(v)^{-1} = x = uv^{-1} = w^{-1}r,$$

donc

$$\begin{aligned} w \tau_\lambda(u) &= r \tau_\lambda(v), \\ wu &= rv, \end{aligned}$$

donc

$$w(\tau_\lambda(u) - u) = r(\tau_\lambda(v) - v).$$

Si donc $\tau_\lambda(u) - u$ ou $\tau_\lambda(v) - v$ étaient non nuls, on obtiendrait un couple u', v' avec $u' = \tau_\lambda(u) - u$, $v' = \tau_\lambda(v) - v$ tel que $x = u'v'^{-1}$ avec $\deg u' + \deg v' < \deg u + \deg v$ ce qui est impossible. Donc u et $v \in U(\mathfrak{g}')$ et $x \in K(\mathfrak{g}')$.

1.4. COROLLAIRE. — Si (\mathfrak{g}_i) sont des idéaux de \mathfrak{g} contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, alors

$$\bigcap K(\mathfrak{g}_i) = K(\bigcap \mathfrak{g}_i).$$

Démonstration. — En effet on peut choisir des caractères (λ_i) de \mathfrak{g} tels que $\mathfrak{g}_i = \text{Ker } \lambda_i$ si donc $x \in \bigcap K(\mathfrak{g}_i)$, on a $\tau_{\lambda_i}x = x$ pour chacune des translations τ_{λ_i} donc $x \in K(\bigcap \mathfrak{g}_i)$.

2. RAPPELS SUR L'ISOMORPHISME DE DUFLO. — (Tous les résultats de ce paragraphe sont dus à Duflo : ([7], [8]) ou voir [5], chap. 10, excepté 2.2).

Soit \mathfrak{g}^* l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si $f \in \mathfrak{g}^*$ on note B_f la forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} définie par

$$B_f(X, Y) = f([X, Y]).$$

Si w est un sous-espace de \mathfrak{g} , on note w^\perp l'orthogonal de w pour B_f . Une sous-algèbre \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est dite subordonnée à f si $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. On appelle polarisation de \mathfrak{g} en f une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} subordonnée à f et de dimension $(1/2)(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}')$.

On note $SR(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres résolubles subordonnées à f et $PR(f; \mathfrak{g})$ ou $PR(f)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés, l'ensemble des polarisations résolubles de \mathfrak{g} en f et $P(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des polarisations. On notera $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\dim \mathfrak{g}'$ soit minimum; si $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, on dit que f est régulier.

On sait que $PR(f) \neq \emptyset$ si $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ (voir [5], 1.12.16).

Si \mathfrak{h} est une sous-algèbre subordonnée à f , on note $\text{ind}^\sim(f; \mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ ou $\text{ind}^\sim(f; \mathfrak{h})$ la représentation induite (tordue) par le caractère $f|_{\mathfrak{h}}$ de $U(\mathfrak{h})$. Si $J^0(f; \mathfrak{h})$ est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par

$$\left\{ X - f(X) - \frac{1}{2} \text{Trace}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \text{ad } X; X \in \mathfrak{h} \right\},$$

la représentation $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h})$ se réalise dans le module

$$M(f; \mathfrak{h}) = U(\mathfrak{g})/J^0(f; \mathfrak{h}).$$

Le noyau $J(f; \mathfrak{h})$ de la représentation $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h})$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans $J^0(f; \mathfrak{h})$, on a donc aussi $J(f; \mathfrak{h}) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot J^0(f; \mathfrak{h})$.

On rappelle que si \mathfrak{h}_1 et $\mathfrak{h}_2 \in \text{PR}(f)$ alors $J(f; \mathfrak{h}_1) = J(f; \mathfrak{h}_2)$ et que pour tout $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, il existe $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f)$ tel que $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h})$ soit irréductible.

On note $J : \mathfrak{g}_{\text{reg}}^* \mapsto \text{Priv}(U(\mathfrak{g}))$ [espace des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ muni de la topologie de Jacobson] l'application de Dixmier-Duflo qui associe à tout $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ l'idéal primitif $J(f; \mathfrak{h}) = J(f)$, avec $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f)$.

Cette application est continue pour la topologie de Zariski sur \mathfrak{g}^* et on a $\bigcap_{f \in W} J(f) = 0$ pour tout ouvert non vide W de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$.

Enfin si $\gamma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, il est clair que $\gamma \cdot J(f) = J(\gamma \cdot f)$.

Si ρ est une représentation irréductible de $U(\mathfrak{g})$ on sait que le commutant de ρ est réduit aux scalaires (lemme de Quillen).

Si donc $u \in Z(\mathfrak{g}) = \text{centre de } U(\mathfrak{g})$, pour tout $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ il existe un nombre $\hat{u}(f) \in k$ tel que $u - \hat{u}(f) \in J(f)$.

2.1. La fonction \hat{u} définie sur l'ouvert $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ peut alors se prolonger en une fonction polynomiale sur \mathfrak{g}^* invariante par Γ et l'application $u \mapsto \hat{u}$ définit un isomorphisme que nous noterons $\psi_{\mathfrak{g}}^0$ (notation dont la complication s'expliquera par la suite), entre $Z(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})^{\Gamma}$ et il est clair que si $\gamma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, alors $\psi_{\mathfrak{g}}^0(\gamma \cdot u) = \gamma \cdot \psi_{\mathfrak{g}}^0(u)$. On aura besoin aussi du résultat suivant :

2.2. Soit \mathfrak{g}' un idéal de \mathfrak{g} et soit $u \in Z(\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g}')$, alors

$$\psi_{\mathfrak{g}}^0(u) = \psi_{\mathfrak{g}'}^0(u).$$

Pour cela il suffit de prouver que sur l'ouvert des $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ tel que $f|_{\mathfrak{g}'} \in \mathfrak{g}'_{\text{reg}}^*$, alors

$$2.3 \quad J(f) \cap U(\mathfrak{g}') \subset J(f') \quad (\text{où } f' = f|_{\mathfrak{g}'})$$

et pour cela il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, il existe $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f; \mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' \in \text{PR}(f'; \mathfrak{g}')$; en effet on aura alors $J^0(f'; \mathfrak{h}) = J^0(f; \mathfrak{h}) \cap U(\mathfrak{g}')$, et donc le résultat voulu sur les idéaux $J(f)$ en nous restreignant à l'ouvert des $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ tel que $f' \in \mathfrak{g}'_{\text{reg}}^*$.

Nous allons démontrer un lemme un peu plus général mais qui nous sera utile ensuite.

Soit $s = (\mathfrak{g}_i)$ une suite croissante d'idéaux de \mathfrak{g} et pour tout i soit $f_i = f|_{\mathfrak{g}_i}$.

2.4. LEMME. — Soit $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ alors il existe $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f; \mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \in \text{PR}(f_i; \mathfrak{g}_i)$ pour tout i et tel que les représentations $\text{ind}^{\sim}(f_i; \mathfrak{h}_i; \mathfrak{g}_i)$ soient toutes irréductibles.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g} et on suit de près la démonstration de Duflo.

Soit $\mathfrak{g}_1 \supsetneq 0$ le premier idéal de la suite s et soit \mathfrak{u} le radical nilpotent de \mathfrak{g}_1 ; \mathfrak{u} est un idéal de \mathfrak{g} et soit \mathfrak{s} l'orthogonal de \mathfrak{u} dans \mathfrak{g} par rapport à B_f ; \mathfrak{s} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} .

A. Si $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$, on a alors $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{u}]) = 0$ et donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} \cap \text{Ker } f$ est un idéal de \mathfrak{g} sur lequel f s'annule. Si $\mathfrak{a} \neq \{0\}$, f fournit un élément régulier de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^*$ et on applique l'hypothèse de récurrence.

Si $\mathfrak{a} = 0$, alors ou bien $\mathfrak{u} = 0$ et alors \mathfrak{g}_1 est un idéal semi-simple de \mathfrak{g} . L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est alors produit direct de deux algèbres \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}' et chacun des idéaux $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}'_i$. Les restrictions f_i et f'_i de f à \mathfrak{g}_1 et à \mathfrak{g}'_i sont des éléments réguliers et on applique l'hypothèse de récurrence à \mathfrak{g}_1 et à \mathfrak{g}'_i , pour obtenir

$$\mathfrak{h}_1 \in \text{PR}(f_i; \mathfrak{g}_1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}'_i \in \text{PR}(f'_i; \mathfrak{g}'_i);$$

il est clair que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}'_i$ vérifie les conditions souhaitées.

Si $\mathfrak{u} \neq \{0\}$, alors $\mathfrak{u} = kZ$ et $f(Z) \neq 0$, comme par conséquent \mathfrak{g}_1 est réductive et $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus kZ$, alors $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \mathfrak{g}'$, et on raisonne comme précédemment.

B. Supposons maintenant $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{g}$. On note g la restriction de f à \mathfrak{s} et f_0 la restriction de f à \mathfrak{u} .

Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{u} \cap \text{Ker } f$, alors \mathfrak{a} est un idéal nilpotent de \mathfrak{s} sur lequel f s'annule. Prouvons que la forme \tilde{g} obtenue sur $\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}/\mathfrak{a}$ par passage au quotient est un élément régulier de $\tilde{\mathfrak{s}}^*$. En effet soit \tilde{l} un élément régulier de $\tilde{\mathfrak{s}}^*$ et l l'élément de $\tilde{\mathfrak{s}}^*$ correspondant, il s'agit de démontrer que $\dim \tilde{\mathfrak{s}}^{\tilde{l}} \leq \dim \tilde{\mathfrak{s}}^l$.

On peut supposer que si $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{u}/\mathfrak{a} \neq \{0\}$ alors \tilde{l} n'est pas nul sur cet idéal. En multipliant \tilde{l} par un scalaire non nul convenable, on peut supposer que l coïncide avec f_0 sur $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{u}$. Considérons alors f_i un prolongement de l à \mathfrak{g} qui coïncide avec l sur \mathfrak{s} et f_0 sur \mathfrak{u} .

On a alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}^i &= \mathfrak{u}^{f_0} + \mathfrak{g}^{f_i}, \\ \mathfrak{s}^{\tilde{l}} &= \mathfrak{u}^{f_0} + \mathfrak{g}^{\tilde{l}} \end{aligned}$$

(voir par exemple [5], 1.12.4).

Or $\mathfrak{g}^{f_1} \cap \mathfrak{n}^{f_0} = \mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{n}^{f_0} = \{x \in \mathfrak{n}, f_0([X, \mathfrak{g}]) = 0\}$.

Puisque f est régulier, on a donc $\dim \mathfrak{s}^g \leq \dim \mathfrak{s}'$.

Considérons alors la suite $s' = (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{s}_i)$ d'idéaux de \mathfrak{s} et appliquons l'hypothèse de récurrence à \tilde{g} , $\tilde{\mathfrak{s}}/\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{s}}' = (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}_i/\mathfrak{a})$. Il existe donc une polarisation résoluble \mathfrak{h}_1 (résoluble car \mathfrak{a} est nilpotent) au point g de \mathfrak{s}^* telle que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{s}_i \in \text{PR}(g_i; \mathfrak{s}_i)$ et telle que les représentations $\text{ind}^{\sim}(g_i; \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{s}_i; \mathfrak{s}_i)$ soient irréductibles.

Soit d'autre part \mathfrak{h}_0 une polarisation au point f_0 de \mathfrak{n}^* stable par \mathfrak{h}_1 . Montrons que l'algèbre $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$ vérifie toutes les conditions du lemme.

Il est clair que $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f)$ et il résulte du corollaire 6.2 de [7] que $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est irréductible puisque $\text{ind}^{\sim}(g; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{s})$ l'est. Mais d'autre part on a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_i$ et comme $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{s}$ on a $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{s}_i$ or $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}_i$ est l'orthogonal de \mathfrak{n} dans \mathfrak{g}_i par rapport à f_i donc comme $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{s}_i \in \text{PR}(f_i; \mathfrak{g}_i)$ et que $\text{ind}^{\sim}(g_i; \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{s}_i; \mathfrak{s}_i)$ est irréductible, on a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \in \text{PR}(f_i; \mathfrak{g}_i)$ et il résulte du même corollaire que $\text{ind}^{\sim}(f_i; \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i; \mathfrak{g}_i)$ est irréductible.

3. LE CENTRE DU CORPS ENVELOPPANT. — On note $C(\mathfrak{g})$ le centre de $K(\mathfrak{g})$. C'est un sous-corps commutatif de $K(\mathfrak{g})$. Il contient le corps des fractions de $Z(\mathfrak{g})$, mais il est en général strictement plus grand.

Si $u \in C(\mathfrak{g})$ et si $u = u_1 u_2^{-1}$ avec $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g})$ on a alors

$$(u_1 u_2^{-1})(u_2 w u_2) = (u_2 w u_2)(u_1 u_2^{-1}) = u_2 w (u_1 u_2^{-1}).u_2$$

pour tout $w \in U(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire $u_1 w u_2 = u_2 w u_1$ pour tout $w \in U(\mathfrak{g})$, en particulier u_1 et u_2 commutent.

On désigne par

$$V_u = \{f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^* \mid \exists u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g}) \text{ avec } u = u_1 u_2^{-1} \text{ et } u_2 \notin J(f)\}.$$

Comme l'application $f \mapsto J(f)$ est continue et que $\bigcap_{f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*} J(f) = 0$, V_u est

un ouvert non vide de \mathfrak{g}^* qui est Γ -stable.

En suivant une méthode très analogue à celle de N. Conze, M. Duflo [3] on va démontrer la :

3.1 PROPOSITION. — Soit $u \in C(\mathfrak{g})$, il existe une fonction rationnelle \hat{u} et une seule qui est partout définie sur V_u et telle que pour toute décomposition $u = u_1 u_2^{-1}$ [$u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g})$] et pour tout $f \in V_u$ on ait $u_1 - \hat{u}(f) u_2 \in J(f)$.

Démonstration. — Tout d'abord montrons que si $u \in C(\mathfrak{g})$ et si $f \in V_u$ il existe un $\alpha \in k$ et un seul tel que $u_1 - \alpha u_2 \in J(f)$ pour toute décompo-

sition $u = u_1 u_2^{-1}$ de u . En effet soit $u = u_1 u_2^{-1}$ tel que $u \in C(\mathfrak{g})$, alors dans toute représentation ρ on a

$$\rho(u_1) \circ \rho(w) \circ \rho(u_2) = \rho(u_2) \circ \rho(w) \circ \rho(u_1)$$

pour tout $w \in U(\mathfrak{g})$. Si ρ est irréductible, on en déduit que

$$\rho(u_1) \circ s \circ \rho(u_2) = \rho(u_2) \circ s \circ \rho(u_1)$$

pour tout s dans $\text{End}_k M$, M espace de ρ , en utilisant le lemme de Quillen et le théorème de densité. Par conséquent si $\rho(u_2) \neq 0$ il existe un scalaire α tel que $\rho(u_1) = \alpha \rho(u_2)$ [9].

Donc si $f \in V_u$ et si $u = u_1 u_2^{-1}$ avec $u_2 \notin J(f)$ il existe α tel que $u_1 - \alpha u_2 \in J(f)$; si $u = u_1 u_2^{-1} = v_1 v_2^{-1} = v_2^{-1} v_1$ montrons aussi que $v_1 - \alpha v_2 \in J(f)$; comme u appartient au centre on a, pour tout $w \in U(\mathfrak{g})$, $v_1 w u_2 = v_2 w u_1$ donc $v_2 w (u_1 - \alpha u_2) = (v_1 - \alpha v_2) w u_2 \in J(f)$, pour tout $w \in U(\mathfrak{g})$; comme $u_2 \notin J(f)$ et que l'idéal $J(f)$ est premier, ceci entraîne que $v_1 - \alpha v_2 \in J(f)$. Notons $\hat{u}(f)$ l'unique scalaire ainsi défini.

[N. Conze vient de nous signaler que $J(f)$ est complètement premier].

Soit alors $u \in C(\mathfrak{g})$ et soit $u = u_1 u_2^{-1}$ une décomposition de u ; soit $W_{u_2} = \{f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^* \text{ tel que } u_2 \notin J(f)\}$; on a $W_{u_2} \subset V_u$ et on va montrer que \hat{u} est une fonction rationnelle partout définie (= régulière algébrique) sur W_{u_2} . Comme les W_{u_2} pour les différentes décompositions possibles de u forment un recouvrement de V , la proposition en découlera.

Soit p un entier. On note Gr_p la variété grassmannienne des sous-espaces de dimension p de \mathfrak{g} et on note

$$T_p = \{(f, \mathfrak{h}) \in \mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p \text{ tels que } \mathfrak{h} \in \text{SR}(f)\}.$$

On voit facilement que T_p est un fermé de $\mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p$.

3.2 LEMME :

(1) Si u_1 et $u_2 \in U(\mathfrak{g})$, alors l'ensemble F_{u_2} des $(f, \mathfrak{h}) \in T_p$ tels que $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(u_2) = 0$ et l'ensemble F_{u_1, u_2} des (f, \mathfrak{h}) de T_p tels que $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(u_1)$ et $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(u_2)$ soient linéairement dépendants sur k sont des fermés de T_p .

(2) Si pour $(f, \mathfrak{h}) \in F_{u_1, u_2} - F_{u_2}$, nous notons $\varphi_{u_1, u_2}(f, \mathfrak{h})$ l'élément φ de k tel que $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(u_1) = \varphi \text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(u_2)$ alors φ_{u_1, u_2} est une fonction rationnelle partout définie sur $F_{u_1, u_2} - F_{u_2}$.

Démonstration. — (1) Si \mathfrak{a} est un sous-espace de dimension $n - p$ de \mathfrak{g} on note $\text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}$ l'ouvert de Gr_p formé des sous-espaces \mathfrak{w} de \mathfrak{g} tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{w}$. L'ensemble des $\text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}$ est un recouvrement ouvert de Gr_p .

Pour démontrer (1) il suffit donc de définir, pour tout \mathfrak{a} , des fermés $Y(u_2)$ et $Y(u_1, u_2)$ de $\mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}$ tels que

$$F_{u_2} \cap (\mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}) = Y(u_2) \cap T_p$$

et

$$F_{u_1, u_2} \cap (\mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}) = Y(u_1, u_2) \cap T_p.$$

Soit \mathfrak{a} fixe, et soient X_1, X_2, \dots, X_{n-p} une base de \mathfrak{a} et Y_1, Y_2, \dots, Y_p une base d'un supplémentaire de \mathfrak{a} . Remarquons qu'on a un isomorphisme α de variétés entre \mathfrak{a}^p et $\text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}$ par

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_p) \in \mathfrak{a}^p \mapsto \alpha(A) = \sum_{i=1}^p k(Y_i - A_i),$$

si $n = (n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbf{N}^r$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_r) \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})^r$ on écrit v^n pour $v_1^{n_1} v_2^{n_2} \dots v_r^{n_r}$, avec cette notation on a

$$u_1 X^l = \sum P_{l, m, n}(A) X^m (Y - A)^n,$$

$$u_2 X^l = \sum Q_{l, m, n}(A) X^m (Y - A)^n,$$

où

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_l), \quad l = (l_1, l_2, \dots, l_{n-p}) \in \mathbf{N}^{n-p}$$

et

$$(Y - A) = (Y_1 - A_1, Y_2 - A_2, \dots, Y_p - A_p),$$

où les $P_{l, m, n}$ et $Q_{l, m, n}$ sont des fonctions polynomiales sur \mathfrak{a}^p .

Si $\mathfrak{h} \in \text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}$ et si $X \in \mathfrak{h}$, on pose

$$f_{\mathfrak{h}}(X) = f(X) + \frac{1}{2} \text{Trace}(\text{pr}_1 \circ \text{ad } X | \mathfrak{a}),$$

où $\text{ad } X | \mathfrak{a}$ désigne la restriction à \mathfrak{a} de l'application $\text{ad } X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ et pr_1 désigne la projection de $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ sur le premier facteur \mathfrak{a} .

Sur $\mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}$, on définit les fonctions polynomiales

$$c_{l, m}(f, \mathfrak{h}) = \sum_n P_{l, m, n}(A) (f_{\mathfrak{h}}(Y_1 - A_1))^{n_1} \dots (f_{\mathfrak{h}}(Y_p - A_p))^{n_p},$$

$$d_{l, m}(f, \mathfrak{h}) = \sum_n Q_{l, m, n}(A) (f_{\mathfrak{h}}(Y_1 - A_1))^{n_1} \dots (f_{\mathfrak{h}}(Y_p - A_p))^{n_p},$$

où A_i est l'élément unique de \mathfrak{a} tel que $Y_i - A_i \in \mathfrak{h}$ et $A = (A_1, A_2, \dots, A_p)$. Alors si on pose

$$Y(u_2) = \{ (f, \mathfrak{h}) \in \mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p^{\mathfrak{a}}; d_{l, m}(f, \mathfrak{h}) = 0 \text{ pour tout } l, m \in \mathbf{N}^{(n-p)} \}$$

et

$$Y(u_1, u_2) = \{ (f, \mathfrak{h}) \in \mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p, \text{ tels que pour tout } (i, j), (l, m), \\ c_{i,j}(f, \mathfrak{h}) d_{l,m}(f, \mathfrak{h}) - c_{l,m}(f, \mathfrak{h}) d_{i,j}(f, \mathfrak{h}) = 0 \},$$

on voit facilement que les fermés $Y(u_2)$ et $Y(u_1, u_2)$ vérifient les propriétés voulues.

(2) Soit $(f, \mathfrak{h}) \in F_{u_1, u_2} \cap (\mathfrak{g}^* \times \text{Gr}_p^n)$.

Si $(f, \mathfrak{h}) \notin F_{u_2}$, il existe $(l, m) \in \mathbb{N}^{n-p}$ tel que $d_{l,m}(f, \mathfrak{h}) \neq 0$, alors

$$\varphi_{u_1, u_2}(f, \mathfrak{h}) = c_{l,m}(f, \mathfrak{h}) d_{l,m}(f, \mathfrak{h})^{-1}$$

et on voit que tout point $(f, \mathfrak{h}) \in F_{u_1, u_2} - F_{u_2}$ possède un voisinage où φ_{u_1, u_2} est régulière algébrique. Le lemme est donc démontré.

On termine la démonstration de la proposition 3.1 de la manière suivante. On choisit $p = \dim \mathfrak{h}$ pour $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f)$, f régulier. Considérons le graphe $\Gamma(\hat{u})$ de \hat{u} :

$$\Gamma(\hat{u}) = \{ f, \hat{u}(f) \} \quad \text{pour } f \in W_{u_2};$$

il suffit de démontrer que $\Gamma(\hat{u})$ est une sous-variété de $W_{u_2} \times k$; en effet s'il en est ainsi, la projection p_1 de $\Gamma(\hat{u})$ sur W_{u_2} est un morphisme bijectif. Comme W_{u_2} ouvert d'une variété normale est normale et que la caractéristique de k est nulle, on saura que p_1 est un isomorphisme d'après le « main-theorem » de Zariski; comme $\hat{u} = p_2 \circ p_1^{-1}$ cela démontre le théorème.

Considérons l'adhérence $\hat{\Gamma}$ dans $F_{u_1, u_2} \times k$ du graphe de φ_{u_1, u_2} . Alors $\hat{\Gamma}$ est une sous-variété fermée de $F_{u_1, u_2} \times k$; comme $F_{u_1, u_2} \subset \text{Gr}_p \times \mathfrak{g}^* \times k$ et que Gr_p est une variété complète, la projection de $\hat{\Gamma}$ est une variété fermée Γ de $\mathfrak{g}^* \times k$; montrons que $\Gamma \cap (W_{u_2} \times k) = \Gamma(\hat{u})$; en effet si $f \in W_{u_2}$, alors pour tout point (f, \mathfrak{h}) de T_p on a $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h})(u_1) = \hat{u}(f) \text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h})(u_2)$, puisque le noyau de $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h})$ est $J(f)$, car $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f)$ et donc si $f \in W_{u_2}$ et \mathfrak{h} est tel que $(f, \mathfrak{g}) \in T_p$ (et un tel \mathfrak{h} existe) alors le point $(f, \hat{u}(f))$ est la projection du point $((f, \mathfrak{h}), \varphi_{u_1, u_2}(f))$ sur $\mathfrak{g}^* \times k$ et ceci termine la démonstration.

La fonction \hat{u} définie sur V_u représente un élément du corps $R(\mathfrak{g})$ des fonctions rationnelles sur \mathfrak{g}^* que l'on note encore \hat{u} .

3.3 PROPOSITION :

(1) Si γ est un automorphisme de \mathfrak{g} , on a $\widehat{\gamma \cdot u} = \gamma \cdot \hat{u}$.

(2) L'application $u \mapsto \hat{u}$ définit un homomorphisme de $C(\mathfrak{g})$ dans $R(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — Le (1) est clair.

(2) Si u et $v \in C(\mathfrak{g})$ et si $u = u_1 u_1^{-1}$, $v = v_1 v_2^{-1}$ ou $u_1, u_2, v_1, v_2 \in U(\mathfrak{g})$ on a, en utilisant que u appartient au centre de $K(\mathfrak{g})$:

$$u = v_2 u_1 u_2^{-1} v_2^{-1} \quad \text{et} \quad v = v_1 u_2 u_2^{-1} v_2^{-1},$$

d'où

$$u + v = (v_2 u_1 + v_1 u_2) (u_2^{-1} v_2^{-1}), \quad uv = u_1 u_2^{-1} v_1 v_2^{-1} = v_1 u_1 u_2^{-1} v_2^{-1}$$

et on voit immédiatement que

$$v_1 u_1 - \hat{u}(f) \hat{v}(f) v_2 u_2 \in J(f) \quad \text{si} \quad f \in V_u \cap V_v$$

et

$$(v_2 u_1 + v_1 u_2) - (\hat{u}(f) + \hat{v}(f)) (v_2 u_2) \in J(f)$$

donc $\widehat{uv} = \widehat{u}\widehat{v}$ et $\widehat{u+v} = \widehat{u} + \widehat{v}$.

D'autre part si $\gamma \in \Gamma$, on a alors $\gamma.u = u$ d'où $\gamma.\hat{u} = \hat{u}$ et $\hat{u} \in R(\mathfrak{g})^\Gamma$. Il est clair que l'application $u \mapsto \hat{u}$ prolonge l'application $u \mapsto \psi_{\mathfrak{g}}^0(u)$ définie en 2 pour $u \in Z(\mathfrak{g})$. On la notera aussi $\psi_{\mathfrak{g}}^0$.

3.4. Soit \mathfrak{g}' un idéal de \mathfrak{g} , il suit immédiatement de 2.3 que si $u \in C(\mathfrak{g}) \cap C(\mathfrak{g}')$ alors $\psi_{\mathfrak{g}}^0(u) = \psi_{\mathfrak{g}'}^0(u)$.

4. LE SEMI-CENTRE DU CORPS ENVELOPPANT. — Le lemme suivant généralise un lemme de Borho [1].

4.1. LEMME. — Soit $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $\lambda \neq 0$ tel que $K(\mathfrak{g})^\lambda \neq 0$; soit $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \lambda$, alors $K(\mathfrak{g})^\mu \subset K(\mathfrak{g}')$ pour tout $\mu \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soit $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{g}'$; alors la dérivation $D : u \mapsto \text{ad } X.u$ n'est pas intérieure. En effet sinon il existerait $\alpha \in K(\mathfrak{g}')$ tel que $[X + \alpha, u] = 0$ pour tout $u \in K(\mathfrak{g}')$. Comme $[X + \alpha, X + \alpha] = 0$ on voit que $[X + \alpha, X] = 0$ et $X + \alpha$ serait un élément du centre de $K(\mathfrak{g})$. Mais comme les éléments non nuls de $K(\mathfrak{g})^\lambda$ commutent à $K(\mathfrak{g}')$ mais non à X , on aboutit à une contradiction. Donc l'algèbre $S = K(\mathfrak{g}') [X]$ est une algèbre simple (voir [5], 4.4.9). Soit $u \in K(\mathfrak{g})^\mu$ on a alors $Y.u = u Y + \mu(Y) u$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, d'où $vu = u \tau_\mu(v)$ pour tout $v \in K(\mathfrak{g})$. L'automorphisme τ_μ laisse stable S . Pour tout $u \in K(\mathfrak{g})^\mu$ on a donc $Su = uS$ et donc si $u \neq 0$, les idéaux bilatères $S \cap Su$ et $S \cap Su^{-1}$ de S sont égaux à S , donc u et $u^{-1} \in S$ et par conséquent $u \in K(\mathfrak{g}')$.

4.2 COROLLAIRE. — Soit $\mathfrak{g}_\lambda = \bigcap \text{Ker } \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $K(\mathfrak{g})^\lambda \neq 0$ alors $K(\mathfrak{g})^\mu \subset \text{centre de } K(\mathfrak{g}_\lambda)$ pour tout $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

En effet ceci découle immédiatement de 4.1 et 1.4. On considère alors le sous-espace $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} K(\mathfrak{g})^\lambda$; c'est une sous-algèbre de $K(\mathfrak{g})$, puisque

$K(\mathfrak{g})^\lambda \cdot K(\mathfrak{g})^\mu \subset K(\mathfrak{g})^{\lambda+\mu}$ et de plus comme $\bigoplus K(\mathfrak{g})^\lambda \subset$ centre de $K(\mathfrak{g}_\lambda)$, cette sous-algèbre est une sous-algèbre commutative de $K(\mathfrak{g})$. On l'appellera le semi-centre de $K(\mathfrak{g})$.

4.3 DÉFINITION. — Si $\lambda \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ est tel que $K(\mathfrak{g})^\lambda \neq \{0\}$, on définit $\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda : K(\mathfrak{g})^\lambda \rightarrow R(\mathfrak{g})$ par $\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda(u) = \psi_{\mathfrak{g}'}^0(u)$ où $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \lambda$ pour tout $u \in K(\mathfrak{g})^\lambda \subset C(\mathfrak{g}')$.

Comme $\psi_{\mathfrak{g}}^0$ commute à l'action de Γ , on voit en appliquant 1.1 que $\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda$ applique $K(\mathfrak{g})^\lambda$ dans $R(\mathfrak{g})^\lambda$. De plus si \mathfrak{g}_1 est un idéal de \mathfrak{g} contenu dans \mathfrak{g}' et si $u \in K(\mathfrak{g})^\lambda$, on a $\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda(u) = \psi_{\mathfrak{g}'}^0(u)$ (voir 3.4).

4.4 THÉORÈME. — (a) Tout élément de $K(\mathfrak{g})^\lambda$ peut s'écrire uw^{-1} avec $u \in U(\mathfrak{g})^{\lambda+\mu}$ et $v \in U(\mathfrak{g})^\mu$.

(b) L'application $\psi_{\mathfrak{g}} = \bigoplus \psi_{\mathfrak{g}}^\lambda : \bigoplus K(\mathfrak{g})^\lambda \rightarrow \bigoplus R(\mathfrak{g})^\lambda$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Il est clair que l'application $\psi_{\mathfrak{g}} = \bigoplus \psi_{\mathfrak{g}}^\lambda$ est un homomorphisme injectif puisque $\bigoplus K(\mathfrak{g})^\lambda \subset C(\mathfrak{g}_\lambda)$ et que $\psi_{\mathfrak{g}_\lambda}^0$ est un homomorphisme injectif.

D'autre part, $\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda$ est surjectif de $U(\mathfrak{g})^\lambda$ sur $S(\mathfrak{g})^\lambda$; en effet, on voit par exemple grâce à la symétrisation que $S(\mathfrak{g})^\lambda \subset S(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}'}$ où $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \lambda$ et comme l'isomorphisme $\psi_{\mathfrak{g}'}^0$ est compatible avec l'action de Γ et que $\psi_{\mathfrak{g}'}^0$ est surjectif de $Z(\mathfrak{g}')$ sur $S(\mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}'}$ on en déduit que $\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda(U(\mathfrak{g})^\lambda) = S(\mathfrak{g})^\lambda$.

Enfin soit $a \in R(\mathfrak{g})^\lambda$, on sait (1.2) que $a = a_1 a_2^{-1}$ avec $a_1 \in S(\mathfrak{g})^{\lambda+\mu}$ et $a_2 \in S(\mathfrak{g})^\mu$; soit donc $u_1 \in U(\mathfrak{g})^{\lambda+\mu}$ et $u_2 \in U(\mathfrak{g})^\mu$ tels que $\psi_{\mathfrak{g}}(u_1) = a_1$, $\psi_{\mathfrak{g}}(u_2) = a_2$. Il est clair que $\psi_{\mathfrak{g}}(u_1 u_2^{-1}) = a_1 a_2^{-1}$ donc $\psi_{\mathfrak{g}}$ est surjectif. On obtient en particulier le résultat suivant qui était démontré dans [10] pour les algèbres de Lie résolubles.

4.5 COROLLAIRE. — L'application $\psi_{\mathfrak{g}}^0 : C(\mathfrak{g}) \rightarrow R(\mathfrak{g})^\Gamma$ est un isomorphisme.

4.6. On peut alors énoncer un certain nombre de résultats pour la structure du corps $C(\mathfrak{g})$. Par exemple :

(1) $C(\mathfrak{g})$ est engendré par un nombre fini d'éléments. En effet $R(\mathfrak{g})^\Gamma$ l'est, puisque $k \subset R(\mathfrak{g})^\Gamma \subset k(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

(2) Le degré de transcendance de $C(\mathfrak{g})$ est égal à $\dim \mathfrak{g}$ — dimension générale des orbites de Γ dans \mathfrak{g}^* ; si \mathfrak{g} est ad-algébrique ce degré sera donc égal à $\min \dim \mathfrak{g}'$ pour $f \in \mathfrak{g}^*$. [On aimerait prouver que $C(\mathfrak{g})$ est une extension transcendante pure, mais ce résultat n'est pas connu pour $R(\mathfrak{g})^\Gamma$.]

(3) Enfin, d'après 4.4 (a) si le radical de \mathfrak{g} est nilpotent, le semi-centre de l'algèbre enveloppante est égal au centre, et $C(\mathfrak{g})$ est le corps de fractions de $Z(\mathfrak{g})$.

4.7. 4.4 (a) entraîne que si on considère

$$\Lambda_U = \{ \lambda \in \mathfrak{g}^* \text{ tels que } U(\mathfrak{g})^\lambda \neq \{0\} \}$$

alors

$$\Lambda_K = \{ \lambda; K(\mathfrak{g})^\lambda \neq \{0\} \}$$

est le groupe additif de \mathfrak{g}^* engendré par le semi-groupe Λ_U , on a donc

$$\mathfrak{g}_\Lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_U} \ker \lambda.$$

4.8. M. Duflo a établi une formule pour l'isomorphisme $\psi_{\mathfrak{g}}^0 : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})^\Gamma$ qui est valable si \mathfrak{g} est résoluble ou semi-simple [6]. Rappelons cette formule : soit $X \in \mathfrak{g}$, on considère la série formelle

$$q_{\mathfrak{g}} = \left(\det \left(\frac{\text{Sh}((1/2) \text{ ad } X)}{(1/2) \text{ ad } X} \right) \right)^{1/2}.$$

L'élément $q_{\mathfrak{g}}$ de $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ définit un opérateur différentiel $D(q_{\mathfrak{g}})$ (d'ordre infini) sur $S(\mathfrak{g})$ (voir [6]); ($q_{\mathfrak{g}} = 1$ si \mathfrak{g} est nilpotent).

Soit β la symétrisation, alors si $p \in S(\mathfrak{g})^\Gamma$, $(\psi_{\mathfrak{g}}^0)^{-1}(p) = \beta(D(q_{\mathfrak{g}}).p)$. Si \mathfrak{g}' est un idéal de \mathfrak{g} , on voit facilement que si $p \in S(\mathfrak{g}') \subset S(\mathfrak{g})$, alors $D(q_{\mathfrak{g}}).p = D(q_{\mathfrak{g}'})p$. Par conséquent si \mathfrak{g} est résoluble et si $p \in S(\mathfrak{g})^\lambda$ on a encore $(\psi_{\mathfrak{g}}^\lambda)^{-1}(p) = \beta(D(q_{\mathfrak{g}}).p)$.

5. ACTION DES SEMI-INVARIANTS DANS CERTAINES REPRÉSENTATIONS INDUITES. — Soient $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ et $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \lambda$, soient $f \in \mathfrak{g}^*$ et \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{g}' telle que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. L'automorphisme τ_λ de $U(\mathfrak{g})$ laisse stable $J^0(f; \mathfrak{h})$ et permet donc de définir par passage au quotient un automorphisme $\bar{\tau}_\lambda$ de $M(f; \mathfrak{h}) = U(\mathfrak{g})/J^0(f; \mathfrak{h})$.

5.1 PROPOSITION. — Soit $u \in U(\mathfrak{g})^\lambda$, $u \neq 0$, soit $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \lambda$, soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et supposons que $f' = f|_{\mathfrak{g}'}$ soit un élément régulier de \mathfrak{g}'^* . Soit $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f'; \mathfrak{g}')$ alors $\text{ind}^{\sim}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})(u) = \psi_{\mathfrak{g}}(u)(f) \cdot \bar{\tau}_{-\lambda}$.

Démonstration. — Si $v \in U(\mathfrak{g})$, notons \bar{v} l'image de v modulo $J^0(f; \mathfrak{h})$. On a

$$J^0(f'; \mathfrak{h}) = J^0(f; \mathfrak{h}) \cap U(\mathfrak{g}').$$

Comme $u \in U(\mathfrak{g}')$ et que $u - \psi_{\mathfrak{g}}(u)(f) \in J(f') \subset J^0(f'; \mathfrak{h})$ on a

$$\bar{u} = \psi_{\mathfrak{g}}(u)(f) \cdot \bar{1}$$

et donc pour tout $v \in U(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} \bar{uv} &= \overline{\tau_{-\lambda}(v) \cdot u} \quad \text{car} \quad uv = \tau_{-\lambda}(v)u \quad [\text{car } u \in U(\mathfrak{g})^\lambda] \\ &= \psi_{\mathfrak{g}}(u)(f) \overline{\tau_{-\lambda}(v)}, \\ u \cdot \bar{v} &= \psi_{\mathfrak{g}}(u)(f) \bar{\tau}_{-\lambda}(\bar{v}). \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a :

5.2 PROPOSITION. — Soit $a \in S(\mathfrak{g})^\lambda$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et $\mathfrak{g}' = \text{Ker } \lambda$ alors $P(f'; \mathfrak{g}') \subset P(f; \mathfrak{g})$ pour tous les $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $a(f) \neq 0$.

Démonstration. — Si $a \in S(\mathfrak{g})^\lambda$ avec $\lambda \neq 0$, alors $a(0) = 0$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que $a(f) \neq 0$ et $X \in \mathfrak{g}(f)$, alors

$$\lambda(X) a(f) = (\text{ad } X. a)(f) = a(0) = 0,$$

donc $X \in \mathfrak{g}'$ ceci implique que le rang de $B_f = \text{rang de } B_{f'} + 2$ d'où $P(f'; \mathfrak{g}') \subset P(f; \mathfrak{g})$.

5.3 COROLLAIRE. — Si f est « assez » régulier, alors

$$P(f_\Lambda; \mathfrak{g}_\Lambda) \subset P(f; \mathfrak{g}) \quad (\text{où } f_\Lambda = f|_{\mathfrak{g}_\Lambda}).$$

6. UNE SOUS-ALGÈBRE COMMUTATIVE DE $U(\mathfrak{g})$. — Soit $s = (\mathfrak{g}_i)$ une suite croissante d'idéaux de \mathfrak{g} . On a vu que si $u \in Z(\mathfrak{g}_i) \cap Z(\mathfrak{g}_j)$, alors $\psi_{\mathfrak{g}_i}^0(u) = \psi_{\mathfrak{g}_j}^0(u)$. Ceci suggère d'étendre $\psi_{\mathfrak{g}}$ à la sous-algèbre engendrée par les centres $Z(\mathfrak{g}_i)$ des sous-algèbres $U(\mathfrak{g}_i)$ de $U(\mathfrak{g})$. On note cette algèbre $U^0(\mathfrak{g}; s)$. De même on note $S^0(\mathfrak{g}; s)$ la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$ engendrée par les invariants $S(\mathfrak{g}_i)^{\mathfrak{g}_i}$ de $S(\mathfrak{g}_i)$.

En particulier, si \mathfrak{g}_Λ est un des idéaux de la suite s , l'algèbre $U^0(\mathfrak{g}; s)$ contient comme sous-algèbre le semi-centre de $U(\mathfrak{g})$. Il est clair que $U^0(\mathfrak{g}; s)$ est une sous-algèbre commutative de $U(\mathfrak{g})$. On sait d'autre part que si \mathfrak{g} est nilpotente et si s est une suite de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} , alors le corps de fraction de $U^0(\mathfrak{g}; s)$ est un sous-corps commutatif maximal de $K(\mathfrak{g})$ [12].

Soit $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$; on dira que \mathfrak{h} est une polarisation admissible pour la suite si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ est une polarisation au point $f_i = f|_{\mathfrak{g}_i}$ de \mathfrak{g}_i^* . On a vu que si $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, il existe toujours une polarisation résoluble \mathfrak{h} admissible pour s .

On considère l'ouvert $\mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*$ des éléments $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que chacune des restrictions f_i de f à \mathfrak{g}_i soient régulières. Enfin si $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f)$, on note $1_{f, \mathfrak{h}} = \bar{1}$ le générateur canonique de $M(f, \mathfrak{h})$.

6.1 PROPOSITION. — Soit $u \in U^0(\mathfrak{g}; s)$, $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*$ et $\mathfrak{h} \in \text{PR}(f; \mathfrak{g})$ une polarisation admissible pour la suite s . Alors $u.1_{f, \mathfrak{h}} \in k.1_{f, \mathfrak{h}}$. De plus la fonction sur $\mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*$ définie par $u.1_{f, \mathfrak{h}} = \hat{u}(f; \mathfrak{h}).1_{f, \mathfrak{h}}$ ne dépend pas de \mathfrak{h} vérifiant les propriétés ci-dessus et l'application $u \mapsto \hat{u}$ définit un isomorphisme des algèbres $U^0(\mathfrak{g}; s)$ et $S^0(\mathfrak{g}; s)$.

Démonstration. — Soit $u = \sum u_{i_1} \dots u_{i_n}$ avec $u_i \in Z(\mathfrak{g}_i)$. Pour démontrer que $u.1_{f, \mathfrak{h}} = \hat{u}(f).1_{f, \mathfrak{h}}$ il suffit de le démontrer pour chaque $u_i \in Z(\mathfrak{g}_i)$.

Or, comme $J^0(f; \mathfrak{h}) \cap U(\mathfrak{g}_i) = J^0(f_i; \mathfrak{h}_i)$ le $U(\mathfrak{g}_i)$ -module engendré par $1_{f, \mathfrak{h}}$ est isomorphe à $M(f_i; \mathfrak{h}_i)$ donc $u_i \cdot 1_{f, \mathfrak{h}} = \hat{u}_i(f) \cdot 1_{f, \mathfrak{h}}$ car $u_i \in Z(\mathfrak{g}_i)$. Par conséquent on a $\hat{u}(f; \mathfrak{h}) = \sum \hat{u}_{i_1}(f) \hat{u}_{i_2}(f) \dots \hat{u}_{i_n}(f)$. Ceci prouve que l'application $\hat{u}(f; \mathfrak{h})$ ne dépend pas de \mathfrak{h} et que $\hat{u}(f; \mathfrak{h}) = \hat{u}(f)$ est un polynôme de $S(\mathfrak{g})$ appartenant à $S^0(\mathfrak{g}; s)$. L'application $u \mapsto \hat{u}$ est clairement surjective puisque sur chacun des $S(\mathfrak{g}_i)^{\mathfrak{g}_i}$ elle l'est. D'autre part si $\gamma \in \Gamma$, et $f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*$ on a $\gamma \cdot f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*$ et $\gamma \cdot \mathfrak{h}$ est admissible pour s . Donc si $\hat{u} = 0$, on a que $\forall f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*$ et \mathfrak{h} admissible pour s ,

$$u \in \cap J^0(f; \mathfrak{h}) = \bigcap_{\substack{f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^* \\ \mathfrak{h} \in \text{PR}(f) \\ \text{admissible pour } s}} \cap J^0(\gamma \cdot f, \gamma \cdot \mathfrak{h}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{g}_{\text{reg}, s}^*} J(f) = \{0\}.$$

7. QUESTION D'INJECTIVITÉ POUR L'APPLICATION FACTORISÉE DE DIXMIER-DUFLO.

7.1 THÉORÈME. — *Il existe un ouvert non vide Γ -stable W de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, tel que si $J(f_1) = J(f_2)$, avec $f_1, f_2 \in W$, alors $f_1 \in \Gamma \cdot f_2$.*

Démonstration. — Comme sous-corps de $R(\mathfrak{g})$, le corps $R(\mathfrak{g})^\Gamma$ est engendré sur k par un nombre fini d'éléments a_1, a_2, \dots, a_l et il existe un ouvert Γ -stable tel que $R(\mathfrak{g})^\Gamma$ sépare les Γ -orbites de W . En effet on sait qu'il existe un ouvert Γ -stable de \mathfrak{g}^* qui possède « une bonne variété quotient » pour l'action de Γ [11] (ou voir [1]). Soit alors $\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(a_i) = u_i v_i^{-1}$ avec $u_i, v_i \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_i}$; on peut supposer en restreignant au besoin l'ouvert W que pour tout $f \in W$ et pour $i = 1, 2, \dots, l$ alors $v_i \notin J(f)$; $a_i(f)$ est l'unique scalaire tel que $u_i - a_i(f) v_i \in J(f)$. Si donc $J(f_1) = J(f_2)$, on a $a_i(f_1) = a_i(f_2)$ et donc $\Gamma \cdot f_1 = \Gamma \cdot f_2$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BORHO, P. GABRIEL et R. RENTSCHLER, *Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren (Lecture Notes in Mathematics, 357, Springer-Verlag), 1973.*
- [2] BERNAT et coll., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris, 1972.
- [3] N. CONZE et M. DUFLO, *Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble (Bull. Sc. math. Fr., t. 94, 1970, p. 201-208).*
- [4] J. DIXMIER, *Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 265, série A, 1967, p. 408-410).*
- [5] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris (à paraître).
- [6] M. DUFLO, *Caractères des groupes et algèbres de Lie résolubles (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 3, 1970, p. 23-74).*
- [7] M. DUFLO, *Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 5, 1972, p. 71-120).*

- [8] M. DUFLO, *Construction of primitive ideals in an envelopping algebra* *Congres Budapest* (août 1971), Editor Gelfand (à paraître).
- [9] M. RAÏS, *Sur les idéaux primitifs des algèbres enveloppantes* (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 272, série A, 1971, p. 989-991).
- [10] R. RENTSCHLER, *Sur le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble* (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 276, série A, 1973, p. 21-24).
- [11] M. ROSENLIGHT, *A remark on quotient Spaces* (*Anais Acad. Brasil. Ciencias*, t. 35, 1963, p. 487-489).
- [12] M. VERGNE, *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 100, 1972, p. 301-335).

(Manuscrit reçu le 15 juin 1973.)

R. RENTSCHLER,
16, rue du Champ de Mars,
75007 Paris.

M^{me} M. VERGNE,
11, rue Quatrefages,
75005 Paris.

