C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 767-772, 1999
Théorie des groupes/*Group Theory*

Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell–Hausdorff

Michèle VERGNE

Centre de mathématiques, CNRS UMR 7640, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France
Courriel : vergne@math.polytechnique.fr

(Reçu le 25 août 1999, accepté le 14 septembre 1999)

Résumé. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, nous définissons des fonctions $F(x,y)$ et $G(x,y)$ sur $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telles que $x+y-\log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) = (\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}-1)F(x,y)+(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,y})G(x,y)$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quadratique, nous prouvons une identité pour la trace de la matrice $(\mathrm{ad}\,x)\partial_x F + (\mathrm{ad}\,y)\partial_y G$. Cette identité est conjecturée dans [4] pour toute algèbre de Lie, et démontrée si $\mathfrak{g}$ est résoluble. Elle implique (voir [4]) le prolongement naturel de l'isomorphisme de Duflo [2] aux algèbres de convolution de distributions invariantes sur le groupe G et sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The center of the enveloping algebra and the Campbell–Hausdorff formula

Abstract. *Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra. In this Note, we define $\mathfrak{g}$-valued functions $F(x,y)$ and $G(x,y)$ on $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$, such that $x+y-\log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) = (\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}-1)F(x,y)+(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,y})G(x,y)$. Furthermore, if $\mathfrak{g}$ is a quadratic Lie algebra, we prove an identity for the trace of the matrix $(\mathrm{ad}\,x)\partial_x F+(\mathrm{ad}\,y)\partial_y G$. This identity was conjectured in [4] for any Lie algebra $\mathfrak{g}$, and proved when $\mathfrak{g}$ is a solvable Lie algebra. This result implies (see [4]) that Duflo's isomorphism [2] extends naturally to convolution algebras of invariant distributions on the group G and the Lie algebra $\mathfrak{g}$.* © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit L l'algèbre de Lie libre en deux générateurs x, y et soit $\widehat{L}$ la complétion de L. Alors $x+y-\log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)$ est un élément de $\widehat{L}$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}-1\big)F(x,y)+\big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,y}\big)G(x,y).$$

Les éléments F et G de $\widehat{L}$ ne sont pas uniquement déterminés par cette propriété.

On dira qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (réelle et de dimension finie) est une algèbre de Lie quadratique si $\mathfrak{g}$ peut être munie d'une forme quadratique invariante non dégénérée. Les algèbres de Lie réductives sont des algèbres de Lie quadratiques. Voici une autre série d'exemples. Soit $\mathfrak{d}$ une algèbre de Lie

Note présentée par Michèle VERGNE.

et soit $\mathfrak{d}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{d}$. Alors le produit semi-direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{d}^*$, où $\mathfrak{d}^*$ est considéré comme un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, est une algèbre quadratique avec forme quadratique $X + f \mapsto \langle f, X\rangle$ ($X \in \mathfrak{d}$, $f \in \mathfrak{d}^*$).

Dans cette Note, nous démontrons que, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quadratique, la conjecture sur l'existence de F et G satisfaisant à une identité remarquable, énoncée dans [4], est vraie. Notre outil est l'existence d'une certaine 2-forme équivariante fermée pour l'action diagonale de G sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, construite par L. Jeffrey [3]. Le travail d'Alekseev–Meinrenken ([1]), en particulier leur démonstration de l'isomorphisme de Duflo étendu aux distributions invariantes, nous a convaincu de l'importance de cette 2-forme dans ce problème.

Nous redémontrons ici les propriétés utilisées de cette 2-forme. Le lemme de Poincaré pour la cohomologie équivariante d'un espace vectoriel conduit naturellement à une écriture particulière pour $\log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) - (x + y)$ sous la forme $[x, U(x,y)] + [y, V(x,y)]$, où $U(x,y)$ et $V(x,y)$ sont déterminés par une équation différentielle. On pose alors

$$F(x,y) = -\frac{\operatorname{ad} x}{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} - 1}\, U(x,y), \qquad G(x,y) = -\frac{\operatorname{ad} y}{1 - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y}}\, V(x,y).$$

Le calcul de $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)\partial_x F + (\operatorname{ad} y)\partial_y G\big)$ s'avère sans difficulté dans le cas quadratique. Nous espérons évidemment que les éléments F et G, construits dans cette Note, satisfont la propriété (c) du théorème ci-dessous, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, mais dans notre démonstration, nous utiliserons de manière essentielle que, dans une algèbre de Lie quadratique, $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} A^{2n} \operatorname{ad} U) = 0$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout $A, U \in \mathfrak{g}$.

Nous renvoyons à [4] pour les corollaires du théorème ci-dessous. Un des corollaires importants a été prouvé pour le cas réductif par T. Levasseur et J.T. Stafford [5].

THÉORÈME. – *On peut trouver des éléments $F(x,y)$ et $G(x,y)$ dans $\widehat{L}$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

(a) $$x + y - \log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) = \big(\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} - 1\big)F(x,y) + \big(1 - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y}\big)G(x,y)\,;$$

(b) *pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie, les éléments $F(x,y)$ et $G(x,y)$ sont des séries convergentes en $(x,y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$;*

(c) *pour toute algèbre de Lie quadratique $\mathfrak{g}$, alors*

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)(\partial_x F) + (\operatorname{ad} y)(\partial_y G)\big) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\operatorname{ad} x}{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} - 1} + \frac{\operatorname{ad} y}{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} y} - 1} - \frac{\operatorname{ad} z}{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} z} - 1} - \mathrm{I}\right),$$

avec $z = \log \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$.

Remarque. – Dans la conjecture initiale, z est remplacé par $\tilde{z} = \log \mathrm{e}^y\mathrm{e}^x$. Mais, comme $\operatorname{ad}\tilde{z} = \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y}(\operatorname{ad} z)\mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y}$, on a $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\operatorname{ad} z}{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} z} - 1}\right) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\operatorname{ad} \tilde{z}}{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} \tilde{z}} - 1}\right)$.

1. Définition des fonctions F et G

On considérera, dans la suite, les fonctions analytiques d'une variable :

$$\Theta(\lambda) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}, \qquad R(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} - 2\lambda}{\lambda^2} = \frac{\Theta(\lambda) + \Theta(-\lambda) - 2}{\lambda}.$$

La fonction $R(\lambda)$ est impaire.

L'algèbre de Lie $L = \bigoplus_n L_n$ est graduée. On note $\mathcal{R}$ la dérivation de l'algèbre $\widehat{L}$ telle que $\mathcal{R}|_{L_n} = n\,\mathrm{Id}|_{L_n}$. Si $z = \log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)$, alors

$$\mathcal{R}\cdot z = \Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y.$$

On définit $U \in \widehat{L}$, $V \in \widehat{L}$ par les équations différentielles :

$$(\mathcal{R}+1)U(x,y) = -\frac{1}{2}\,\Theta(\mathrm{ad}\,x)\,\Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}\,R(\mathrm{ad}\,z)\big(\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y\big) + \frac{1}{2}\,\Theta(-\mathrm{ad}\,x)y.$$

$$(\mathcal{R}+1)V(x,y) = -\frac{1}{2}\,\Theta(-\mathrm{ad}\,y)\,\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}\,R(\mathrm{ad}\,z)\big(\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y\big) - \frac{1}{2}\,\Theta(\mathrm{ad}\,y)x.$$

LEMME. – *On a* $U(x,y) = V(-y,-x)$ *et*

$$z-(x+y) = [x, U(x,y)] + [y, V(x,y)].$$

La propriété de symétrie est évidente. Pour la deuxième égalité, on calcule

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\cdot\big([x,U]+[y,V]\big) &= (\mathrm{ad}\,x)\,(\mathcal{R}+1)\,U + (\mathrm{ad}\,y)\,(\mathcal{R}+1)\,V = \\ &-\frac{1}{2}\,\big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,x}\big)\,\Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}R(\mathrm{ad}\,z)\big(\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y\big) + \frac{1}{2}\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}-1\big)y \\ &-\frac{1}{2}\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,y}-1\big)\,\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}R(\mathrm{ad}\,z)\big(\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y\big) - \frac{1}{2}\,\big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,y}\big)x.\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{gathered}\big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,x}\big)\Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1} + \big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,y}-1\big)\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1} = \mathrm{ad}\,z,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}y = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,z}y, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,y}x = \mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,z}x.\end{gathered}$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\cdot\big([x,U]+[y,V]\big) &= -\frac{1}{2}\,\big((\mathrm{ad}\,z)\,R(\mathrm{ad}\,z)\big(\Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,z}-1\big)y - \frac{1}{2}\,\big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,z}\big)x, \\ &= \Theta(-\mathrm{ad}\,z)^{-1}x + \Theta(\mathrm{ad}\,z)^{-1}y - (x+y) = \mathcal{R}(z-(x+y)),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Posons $F(x,y) = -\Theta(-\mathrm{ad}\,x)^{-1}\,U(x,y)$, $G(x,y) = -\Theta(\mathrm{ad}\,y)^{-1}V(x,y)$.
On a donc : $x+y-\log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) = \big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,x}-1\big)F(x,y) + \big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,y}\big)G(x,y)$.

On note $\mathcal{A}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_k \mathcal{A}^k(\mathfrak{g})$ l'algèbre graduée des formes différentielles sur $\mathfrak{g}$. Si ξ est un champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{L}(\xi)$ la dérivation de Lie, et $\iota(\xi)$ la contraction. Si $a(x)$ est une fonction sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, on note $\langle a(x), \partial_x\rangle$ le champ de vecteurs correspondant. Soient θ, $\theta' \in \mathcal{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{g}$ les formes différentielles définies par $\theta = \Theta(\mathrm{ad}\,x)\,\mathrm{d}x$, $\theta' = \Theta(-\mathrm{ad}\,x)\,\mathrm{d}x$. Ce sont les formes de Maurer–Cartan invariantes à gauche et à droite en coordonnées exponentielles. On a donc

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\,[\theta,\theta], \qquad \mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}\,[\theta',\theta']. \tag{1}$$

Soit $\nu \in \mathcal{A}^k(\mathfrak{g})$ une forme fermée sur $\mathfrak{g}$. Si $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathfrak{g})$ est telle que $\mathcal{L}(\mathcal{R})\beta = \iota(\mathcal{R})\nu$, la relation de Cartan, $\mathcal{L}(\mathcal{R}) = \mathrm{d}\,\iota(\mathcal{R}) + \iota(\mathcal{R})\,\mathrm{d}$, implique $\mathrm{d}\beta = \nu$.

On note (x, y) l'élément courant de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Si $H(x, y)$ est une fonction sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, vérifiant $H(gx, gy) = g \cdot H(x, y)$ pour tous x, $y \in \mathfrak{g}$ et g dans le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$, on a

$$(\operatorname{ad} x)\partial_x H + (\operatorname{ad} y)\partial_y H = -\operatorname{ad} H(x, y). \tag{2}$$

Soient $(p_1, p_2) : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ les projections sur le premier ou deuxième facteur. Notons z l'application de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ définie, au voisinage de $0 \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, par $z(x, y) = \log(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y)$. On a

$$\mathrm{d}z = \Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(-\operatorname{ad} x)\,\mathrm{d}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(\operatorname{ad} y)\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

et donc

$$z^*\theta = \Theta(\operatorname{ad} z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y} p_1^*\theta + p_2^*\theta. \tag{4}$$

2. Le cas d'une algèbre de Lie quadratique

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique. Choisissons une forme bilinéaire symétrique invariante $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$. L'endomorphisme $(\operatorname{ad} x)^n$ est symétrique si n est pair, antisymétrique si n est impair. La matrice transposée $\Theta(\operatorname{ad} x)^{\mathrm{t}}$ de $\Theta(\operatorname{ad} x)$ est donc $\Theta(-\operatorname{ad} x)$. Une fonction $A(x)$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans les endomorphismes antisymétriques de $\mathfrak{g}$ permet de construire la 2-forme $\langle A(x)\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}x\rangle$ sur $\mathfrak{g}$. De même, une fonction $K(x)$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ permet de construire la 1-forme $\langle K(x),\, \mathrm{d}x\rangle$ sur $\mathfrak{g}$. On note ϖ la 2-forme sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\varpi = \big\langle R(\operatorname{ad} x)\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}x\big\rangle.$$

La 3-forme $\langle[\theta, \theta], \theta\rangle$ est fermée sur $\mathfrak{g}$. On a $3\mathcal{L}(\mathcal{R})\varpi = \iota(\mathcal{R})\langle[\theta, \theta], \theta\rangle$ comme on le vérifie facilement, et donc

$$\mathrm{d}\varpi = \frac{1}{3}\big\langle[\theta, \theta], \theta\big\rangle. \tag{5}$$

Considérons les trois applications p_1, p_2, z de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

Proposition 1 (Jeffrey). – *La 2-forme définie par*

$$f = \frac{1}{4}\left(p_1^*\varpi + p_2^*\varpi - z^*\varpi\right) - \frac{1}{2}\left\langle p_1^*\theta, p_2^*\theta'\right\rangle,$$

est une 2-forme fermée sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$.

En effet, on montre que

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{4}\left(p_1^*\mathrm{d}\varpi + p_2^*\mathrm{d}\varpi - z^*\mathrm{d}\varpi\right) - \frac{1}{2}\left\langle p_1^*\mathrm{d}\theta, p_2^*\theta'\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle p_1^*\theta, p_2^*\mathrm{d}\theta'\right\rangle = 0$$

en utilisant les relations (1), (4), (5).

On a

$$f = \frac{1}{4}\big\langle R(\operatorname{ad} x)\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}x\big\rangle + \frac{1}{4}\big\langle R(\operatorname{ad} y)\,\mathrm{d}y,\, \mathrm{d}y\big\rangle - \frac{1}{4}\big\langle R(\operatorname{ad} z)\,\mathrm{d}z,\, \mathrm{d}z\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle \Theta(\operatorname{ad} x)\,\mathrm{d}x, \Theta(-\operatorname{ad} y)\,\mathrm{d}y\big\rangle.$$

Soient $U(x, y)$ et $V(x, y)$ comme dans § 1. On considère la 1-forme

$$\beta = \langle U(x, y),\, \mathrm{d}x\rangle + \langle V(x, y),\, \mathrm{d}y\rangle.$$

Comme on le vérifie facilement :

$$\mathcal{L}(\mathcal{R})\beta = \langle(\mathcal{R}+1)\,U(x,y),\,\mathrm{d}x\rangle + \langle(\mathcal{R}+1)\,V(x,y),\,\mathrm{d}y\rangle = \iota(\mathcal{R})f$$

et donc, comme f est *fermée*, on a $\mathrm{d}\beta = f$.

Nous vérifions maintenant la propriété (c). L'équation $\mathrm{d}\beta = f$ implique la connaissance de la partie antisymétrique des matrices $\partial_x U$ et $\partial_y V$. En utilisant la formule (3) pour $\mathrm{d}z$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\partial_x U - (\partial_x U)^{\mathrm{t}}\right) = \frac{1}{4}\,R(\operatorname{ad}x) - \frac{1}{4}\,\Theta(\operatorname{ad}x)\,\Theta(\operatorname{ad}z)^{-1}\,R(\operatorname{ad}z)\Theta(-\operatorname{ad}z)^{-1}\Theta(-\operatorname{ad}x), \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_y V - (\partial_y V)^{\mathrm{t}}\right) = \frac{1}{4}\,R(\operatorname{ad}y) - \frac{1}{4}\,\Theta(-\operatorname{ad}y)\Theta(-\operatorname{ad}z)^{-1}\,R(\operatorname{ad}z)\,\Theta(\operatorname{ad}z)^{-1}\Theta(\operatorname{ad}y). \quad (7)$$

On calcule

$$-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x F + (\operatorname{ad}y)\partial_y G\big) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x\big(\Theta(-\operatorname{ad}x)^{-1}U(x,y)\big)\big) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}y)\partial_y\big(\Theta(\operatorname{ad}y)^{-1}V(x,y)\big)\big).$$

On a $\Theta(\lambda)^{-1} = S(\lambda) + \frac{1}{2}\,\lambda$, où S est une fonction paire. On écrit

$$-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x F + (\operatorname{ad}y)\partial_y G\big) = A + B$$

avec

$$A = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x(S(\operatorname{ad}x)U(x,y))\big) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}y)\partial_y(S(\operatorname{ad}y)V(x,y))\big),$$

$$B = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x([x,U(x,y)])\big) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}y)\partial_y([y,V(x,y)])\big).$$

Nous calculons d'abord B en utilisant (2), le fait que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\operatorname{ad}H = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{g}$, que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(uv) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(vu)$ et que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\Theta(\operatorname{ad}z)^{-1} = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\Theta(-\operatorname{ad}z)^{-1}$.
On obtient

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x([x,U(x,y)] + [y,V(x,y)])\big) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}y)\partial_y([x,U(x,y)] + [y,V(x,y)])\big)\\
&= -\frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x(z-(x+y))\big) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}y)\partial_y(z-(x+y))\big)\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\Theta(\operatorname{ad}z)^{-1}\big) - \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\Theta(-\operatorname{ad}z)^{-1}\mathrm{e}^{\operatorname{ad}x} + \Theta(\operatorname{ad}z)^{-1}\mathrm{e}^{-\operatorname{ad}y}\big)\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\Theta(\operatorname{ad}z)^{-1}\big) - \frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\Theta(-\operatorname{ad}z)^{-1}(\mathrm{e}^{\operatorname{ad}x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad}y}) + \Theta(\operatorname{ad}z)^{-1}(\mathrm{e}^{-\operatorname{ad}y} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x})\big)
\end{aligned}$$

en sommant avec la transposée.

Nous calculons maintenant A. En utilisant le lemme 5.2 de [4], on a

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)\partial_x(S(\operatorname{ad}x)U(x,y))\big) = -\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((S(\operatorname{ad}x)-1)\operatorname{ad}U(x,y)\big) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)S(\operatorname{ad}x)\partial_x U(x,y)\big).$$

On a $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad}x)^{2k}\operatorname{ad}U) = 0$ car $\mathfrak{g}$ est quadratique. Comme $S(\operatorname{ad}x)$ est somme de puissances paires de $\operatorname{ad}x$, on a $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((S(\operatorname{ad}x)-1)\operatorname{ad}U(x,y)) = 0$ tandis que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad}x)S(\operatorname{ad}x)\partial_x U(x,y)\big) =$

$\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)S(\operatorname{ad} x)(\partial_x U(x,y) - \partial_x U(x,y)^{\mathrm{t}})\big)$ ne dépend que de la partie antisymétrique de la matrice $\partial_x U$. Les formules (6), (7) montrent que

$$A = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)S(\operatorname{ad} x)\partial_x U(x,y)\big) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} y)S(\operatorname{ad} y)\partial_y V(x,y)\big) = (A_1 - A_2)$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)S(\operatorname{ad} x)R(\operatorname{ad} x) + (\operatorname{ad} y)S(\operatorname{ad} y)R(\operatorname{ad} y)\big),\\
A_2 &= \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)S(\operatorname{ad} x)\Theta(\operatorname{ad} x)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(-\operatorname{ad} x)\big)\\
&\quad + \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} y)S(\operatorname{ad} y)\Theta(-\operatorname{ad} y)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(\operatorname{ad} y)\big)\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} x)S(\operatorname{ad} x)\Theta(-\operatorname{ad} x)\Theta(\operatorname{ad} x)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}\big)\\
&\quad + \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\operatorname{ad} y)S(\operatorname{ad} y)\Theta(-\operatorname{ad} y)\Theta(\operatorname{ad} y)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}\big).
\end{aligned}$$

On obtient

$$A_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{I} - (\Theta(\operatorname{ad} x)^{-1} + \Theta(\operatorname{ad} y)^{-1})\big) + \frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y}\big)$$

et

$$A_2 = \frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big((\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y} - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y})\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}R(z)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}\big).$$

On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y} - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y} &= (\mathrm{e}^{\operatorname{ad} z} - 1)\mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} x}(\mathrm{e}^{\operatorname{ad} z} - 1)\\
&= (1 - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} z})\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y}(1 - \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} z}).
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$A_2 = \frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y}\big) - \frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}(\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} y}) + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}(\mathrm{e}^{-\operatorname{ad} y} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad} x})\big)$$

En additionnant $A_1 - A_2$ et B, on obtient donc le théorème annoncé.

Références bibliographiques

[1] Alekseev A., Meinrenken E., The non-commutative Weil algebra, Invent. Math. (à paraître).

[2] Duflo M., Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 10 (1977) 267–288.

[3] Jeffrey L., Symplectic forms on moduli spaces of flat connections on 2-manifolds, AMS/IP, Stud. Adv. Math. 2 (1997) 268–281.

[4] Kashiwara M., Vergne M., The Campbell–Haussdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. 47 (1978) 249–272.

[5] Levasseur T., Stafford J.T., The kernel of an homomorphism of Harish-Chandra, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 29 (1996) 385–397.