- ! - T H E S E - ! -

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

Pour l'Obtention

DU DOCTORAT 3e CYCLE

Spécialité : M A T H E M A T I Q U E S

Mention :

par : Michèle V E R G N E

(NOM PRENOM)

SUJET DE LA THESE : Variété des algèbres de Lie nilpotente

-=-=-=-=-=-=-=-=-

Soutenue le devant la Commission d'Examen

JURY : PRESIDENT

EXAMINATEURS

INVITE

INTRODUCTION

Soit $(e_1\ e_2 \dots e_n)$ la base canonique de K^n et soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie sur $\mathbb{K}^n$. On identifiera $\mathfrak{g}$ au système (C_{ijk}) de ses constantes de structure par rapport à la base $(e_1\ e_2 \dots e_n)$. On peut donc considérer l'ensemble Ln des algèbres de lie sur K^n comme un sous ensemble de K^{n^3} par cette identification.

On supposera dans tout ce travail que K est un corps algébriquement clos et de caractéristique O. On voit immédiatement que Ln est fermé dans K^{n^3} pour la topologie de Zariski. Ln est donc muni d'une structure de variété algébrique.

Nous nous intéresserons dans ce travail plus particulièrement à l'ensemble N_n des algèbre de lie nilpotentes sur K^n. On voit facilement que N_n est fermé dans Ln, donc N_n est muni d'une structure de variété algébrique. Nous établirons principalement dans ce travail que N_n est réductible pour n assez grand.

Le chapitre 1 rappelle des résultats connus sur les algèbres de lie et les algèbres de lie nilpotentes. L'un des résultats intéressants pour ce travail sera l'existence d'une suite exacte reliant les groupes de cohomologie de $\mathfrak{g}_n$ et de $\mathfrak{g}_{n-1}$ si $\mathfrak{g}_n$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}_{n-1}$ par k

(suite de Hochschild-Serre)

Au chapitre 2, on étudiera quelques propriétés topologiques de Nn ; on verra que la dimension des espaces $\mathcal{E}^i(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$ $B^p(\mathfrak{g}, k)$ diminue par spécialisation, tandis que la dimension des espaces $\mathcal{E}_i\, \mathfrak{g}$, $Z_p(\mathfrak{g}, k)$ augmente.

Au chapitre 3, on étudiera un ouvert particulier de Nn; l'ouvert des algèbres filiformes. On montrera qu'il existe en dimension 7 une infinité d'algèbres filiformes non isomorphes.

Au chapitre 4, on donnera une classification des algèbres de lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 6 - en effet il n'y a qu'un nombre fini de types d'algèbres non isomorphes en dimension inférieure ou égale à 6.
Types qu'on énumérera.
On montrera que N_n est irréductible si n $\leqslant$ 6.

Au chapitre 5 enfin, on montrera qu'il existe une composante irréductible de N_n de dimension inférieure à n^2. On montrera d'autre part qu'il existe un ensemble irréductible de N_n dont la dimension est de l'ordre de $\frac{2n^3}{27}$ - Ceci montrera que N_n est réductible pour n grand. Une démonstration indépendante prouvant que N_7 est réductible, semble montrer que N_n est réductible dès que n $\geqslant$ 7

CONVENTION

Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ une base de V. Pour définir une structure d'algèbre de lie sur un espace vectoriel V il faut se donner une application bilinéaire alternée de V x V dans V vérifiant les équations de Jacobi.

Donc pour décrire une structure d'algèbre de lie sur un espace vectoriel V, on se donnera la valeur du crochet sur tous les couples $(x_i\ x_j)$ $i<j$ en faisant la convention suivante, les crochets $[x_i, x_j]$ non écrits seront nuls.

CHAPITRE 1 -

RAPPELS sur les ALGEBRES de LIE.-
NOTATIONS. -

I.- SUITES CENTRALES ascendantes et descendantes d'une algébre de Lie.-

a.- Notations.

soit $\mathcal{G}$ une algébre de Lie sur un espace vectoriel V

on notera $\mathcal{C}^i\mathcal{G}$ les termes de la suite centrale descendante de l'algébre de Lie $\mathcal{G}$

par définition $\mathcal{C}^0\mathcal{G} = V$

$$i > 0 \quad \mathcal{C}^i\mathcal{G} = [V, \mathcal{C}^{i-1}\mathcal{G}]$$

on notera $\mathcal{C}_j\mathcal{G}$ les termes de la suite centrale ascendante de l'algébre de Lie $\mathcal{G}$

par définition $\mathcal{C}_0\mathcal{G} = \{0\}$

$$\mathcal{C}_j\mathcal{G} = \{x \text{ tels que } [x, V] \subset \mathcal{C}_{j-1}\mathcal{G}$$

on notera $\mathcal{D}^r\mathcal{G}$ les termes de la suite des algébres dérivées de l'algébre de Lie $\mathcal{G}$

par définition $\mathcal{D}^0\mathcal{G} = V$

$$r > 0 \quad \mathcal{D}^r\mathcal{G} = [\mathcal{D}^{r-1}\mathcal{G}, \mathcal{D}^{r-1}\mathcal{G}]$$

=======

b.- propriétés élémentaires.

si f est une homomorphisme surjectif de l'algébre de Lie $\mathcal{G}$ sur l'algébre de Lie $\mathcal{G}'$

on a

$$f(\mathcal{C}^i\mathcal{G}) = \mathcal{C}^i\mathcal{G}'$$
$$f(\mathcal{D}^r\mathcal{G}) = \mathcal{D}^r\mathcal{G}'$$

- Si $\{0\} = \mathcal{C}_0 \mathfrak{g} \subset \mathcal{C}_1 \mathfrak{g} \subset \mathcal{C}_2 \mathfrak{g} \subset \cdots \subset V$ est la suite centrale ascendante de l'algébre de Lie $\mathfrak{g}$ la suite ascendante de l'algébre $\dfrac{\mathfrak{g}}{\mathcal{C}_i \mathfrak{g}}$ définie par passage au quotient est ;

$$\{0\} = \frac{\mathcal{C}_i \mathfrak{g}}{\mathcal{C}_i \mathfrak{g}} \subset \frac{\mathcal{C}_{i+1} \mathfrak{g}}{\mathcal{C}_i \mathfrak{g}} \subset \cdots \subset \frac{V}{\mathcal{C}_i \mathfrak{g}}$$

c'est à dire :

$$\mathcal{C}_p (\mathfrak{g} / \mathcal{C}_i \mathfrak{g}) = \mathcal{C}_{p+i} \mathfrak{g} / \mathcal{C}_i \mathfrak{g}$$

- On a la formule suivante :

$$[\mathcal{C}^i \mathfrak{g}, \mathcal{C}^j \mathfrak{g}] = \mathcal{C}^{i+j+1} \mathfrak{g}$$

(démonstration par récurrence sur $i + j = p$)

================

2.- COHOMOLOGIE d'une algébre de Lie - DEFINITIONS.

a.- définitions.

soit $\mathfrak{g}$ une algébre de Lie sur un corps K- et soit U ($\mathfrak{g}$) l'algébre enveloppante de $\mathfrak{g}$. On sait qu' il y a équivalence entre la notion de K-module où $\mathfrak{g}$ opère et la notion de U ($\mathfrak{g}$)-module.

soit K le corps de base de $\mathfrak{g}$ -muni de la représentation triviale de $\mathfrak{g}$ dans K, K est un $U(\mathfrak{g})$-module.

On cherche à construire les satellites du foncteur exact à gauche, défini sur la catégorie des U ($\mathfrak{g}$)-modules , $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}$ (K, ?)

Si M est un U ($\mathfrak{g}$)-module, $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(K, M)$ s'identifie à l'espace des invariants de M par $\mathfrak{g}$ qu'on notera $M^{\mathfrak{g}}$

Pour construire ces satellites , on est amené à construire une résolution projective exacte de K dans la catégorie des U ($\mathfrak{g}$)-modules,- Nous renverrons pour cette construction à (2) - (exposé n° 3)

Si M est un $U(\mathfrak{g})$-module, le n iéme groupe de cohomologie $H^n(\mathfrak{g}, M)$ sera donc le n iéme groupe de cohomologie du complexe

$$0 \to C^0(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{g}, M) \to \cdots \to C^p(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{d^p} C^{p+1}(\mathfrak{g}, M) \to \cdots$$

où $C^p(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p \mathfrak{g}, M)$

= espace des applications linéaires alternées de $\Lambda^p \mathfrak{g}$ dans M - (linéaires sur K)

et où l'opérateur d^p est défini par

$$(d^p f)(x_0\, x_1 \ldots x_p) = \sum (-1)^i x_i \cdot f(x_0 \ldots \hat{x}_i \ldots x_p)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i\, x_j], x_0 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_p)$$

on posera

$B^p(\mathfrak{g}, M)$ = espace des cobords de dimension p $= \mathrm{Im}\, d^{p-1}$

$Z^p(\mathfrak{g}, M)$ = espace des cocycles de dimension p $= \ker d^p$

on a alors $H^p(\mathfrak{g}, M) = Z^p(\mathfrak{g}, M) / B^p(\mathfrak{g}, M)$

Si on identifie $C^0(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Hom}(K, M)$ à M, l'application d^0 est l'application de M dans $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, M)$ définie par $d^0(m)(g) = g \cdot m$.

On retrouve bien ainsi que $\underline{\underline{H^0(\mathfrak{g}, M)}} = \mathrm{Ker}\, d^0 = M^{\mathfrak{g}}$

b.- <u>cohomologie à valeurs dans K.</u>
<u>interprétation des premiers groupes.</u>

On considère K comme un $U(\mathfrak{g})$- module trivial.

$$0 \to C^0(\mathfrak{g}, K) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{g}, K) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathfrak{g}, K) \xrightarrow{d^2}$$

l'application d^0 est nulle puisque K est trivial comme $\mathfrak{g}$ - module. On a donc simplement $H^1(\mathfrak{g}, K) = \mathrm{Ker}\, d^1$

Or si f est une application K- linéaire de dans K, on a $(d^1 f)(x,y) = (f([x,y])$

$H^1(\mathfrak{g}, K)$ est donc ~~dans~~ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{g}$ dans K nulles sur $\mathcal{D}\mathfrak{g}$

$H^1(\mathfrak{g}, K)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_K\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathcal{D}\mathfrak{g}} ; K\right)$

on a $\boxed{\dim H^1(\mathfrak{g} ; K) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathcal{D}\mathfrak{g}}$

- $H^2(\mathfrak{g}, K)$

On sait que $H^2(\mathfrak{g}, K)$ s'identifie à l'ensemble des classes $\mathfrak{h}$ d'extensions centrales de $\mathfrak{g}$ par K :
(2 ; exposé n° 4)

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

2 extensions $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ étant équivalentes s'il existe une application K linéaire $u : \mathfrak{h}_1 \longrightarrow \mathfrak{h}_2$
telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & & \mathfrak{h}_1 \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "p_1"] & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \mathfrak{h}_2 \arrow[r, "p_2"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>La correspondance est définie de la manière suivante</u>:
soient $\mathfrak{g}$ définie ~~par~~ sur un espace vectoriel V , de dimension n et β un cocycle de dimension 2 de $\mathfrak{g}$
β est une application bilinéaire alternée de $\mathfrak{g}$ dans K,
telle que $\beta([x\,y], z) + \beta([y\,z], x) + \beta([z\,x], y) = 0$

quelques soient x y z dans V

Considérons l'espace vectoriel $V_{n+1} = V + K x_{n+1}$
avec les applications canoniques $0 \longrightarrow K x_{n+1} \xrightarrow{i} V_{n+1} \underset{\sigma}{\overset{j}{\rightleftarrows}} V \longrightarrow 0$
définissons sur V_{n+1} l'application bilinéaire alternée suivante :

$$[x, y] = \sigma[jx, jy]_{\mathfrak{g}} + \beta(jx, jy)\, x_{n+1}$$

β étant un cocycle, on vérifie que les identités de ~~Jacobie~~ Jacobi sont satisfaites.
On obtient donc une structure $\mathfrak{h}$ d'algèbre de Lie sur $V_{n+1} = V + K x_{n+1}$
telle que x_{n+1} appartienne au centre de $\mathfrak{h}$
identifiant V à $V_{n+1} / K x_{n+1}$ ~~est définie par la formule~~ on a

$$\mathfrak{h} / K x_{n+1} = \mathfrak{g}$$

On vérifie que 2 cocycles équivalentes donne 2 extensions équivalentes si et seulement si leur différence est un cobord

$\dim H^2(\mathcal{G}, K) = \dim Z^2(\mathcal{G}, K) - \dim B^2(\mathcal{G}, K))$, or $B^2(\mathcal{G}, K) = \operatorname{Im} d^1$

donc $B^2(\mathcal{G}, K)$ est isomorphe à $C^1(\mathcal{G}, K) / Z^1(\mathcal{G}, K)$

$\dim Z^1(\mathcal{G}, K) = \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{D}\mathcal{G}$

on a donc $\dim B^2(\mathcal{G}, K) = \dim \mathcal{G} - (\dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{D}\mathcal{G}) = \dim \mathcal{D}\mathcal{G}$

et $\underline{\dim. H^2(\mathcal{G}, K) = \dim. Z^2(\mathcal{G}, K) - \dim \mathcal{D}\mathcal{G}}$

c .- <u>Cohomologie à valeur dans $\mathcal{G}$</u>.

$\mathcal{G}$ muni de la représentation adjointe, reste un $U(\mathcal{G})$-module,

$$0 \to C^0(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \to \qquad . \; C^0(\mathcal{G}, \mathcal{G})$$

est isomorphe à $\mathcal{G}$ - l'application d^0 étant l'application qui à x fait correspondre l'application linéaire $ad\, x$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$

Montrons par $Z^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est l'espace des dérivations de $\mathcal{G}$; En effet pour qu'une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ soit un cocycle, il faut et il suffit que

$$-[x, \varphi(y)] + [\varphi(x), y] - \varphi[x, y] = 0$$

c'est à dire que φ soit une dérivation.

<u>On voit donc que $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ s'identifie à l'espace quotient de l'espace des dérivations de $\mathcal{G}$ par l'espace des dérivations intérieures.</u>

d.- <u>une suite exacte</u>.

soit $\mathcal{G}_n$ une extension centrale de $\mathcal{G}_{n-1}$ par K et supposons choisie une section s de $\mathcal{G}_{n-1}$ dans $\mathcal{G}_n$

$$0 \to K x_n \to \mathcal{G}_n \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathcal{G}_{n-1} \to 0$$

Cette extension définit un élément β de $H^2(\mathfrak{g}_{n-1}, k)$

$\cancel{(\mathfrak{g}_{n-1}, K)}$ Un cocycle b représentant de β sera défini par

$b(x,y) \cdot x_n = [s\,x, s\,y] - s([x\,y])$

pour $x, y \in \mathfrak{g}_{n-1}$

Alors on a la suite exacte ([6] page)

$$\boxed{0 \longrightarrow K\beta \xrightarrow{\ i\ } H^2(\mathfrak{g}_{n-1}, K) \xrightarrow{\ p^*\ } H^2(\mathfrak{g}_n, K) \xrightarrow{\ \rho\ } H^1(\mathfrak{g}_{n-1}, K) \xrightarrow{\ h\ } H^3(\mathfrak{g}_{n-1}, K)}$$

- où l'application i est l'injection de $K\beta$ dans $H^2(\mathfrak{g}_{n-1}, K)$

- l'application $p^* : H^2(\mathfrak{g}_{n-1}, K) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}_n, K)$ est l'application des groupes de cohomologie déduite de $p : \mathfrak{g}_n \longrightarrow \mathfrak{g}_{n-1}$

- l'application $\rho : H^2(\mathfrak{g}_n, K) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}_{n-1}, K)$ se définit ainsi,

si θ est un cocyle de dimension 2 de

on pose

$$\rho(\theta)\, y = \theta(x_n, s\,y)$$

(On notera de la même manière l'application définie sur les cocycles et l'application déduite sur les groupes de cohomologie.)

$\rho(\theta)$ est donc une application linéaire de $\mathfrak{g}_{n-1}$ dans K,

Montrons que $\rho(\theta) \in Z^1(\mathfrak{g}_{n-1}, K)$

c'est à dire que $\rho(\theta)([x, y]) = 0$

on a $\rho(\theta)([x, y]) = \theta(x_n, s[x\,y]) = \theta(x_n, [sx, s\,y])$ car $\theta(x_n, x_n) = 0$

Or comme θ est un cocycle de $\mathfrak{g}_n$

on a $\theta(x_n, [sx, sy]) + \theta(sx, [sy, x_n]) + \theta(sy, [x_n, sx]) = 0$

comme x_n appartient au centre de $\mathfrak{g}_n$ on trouve simplement : $\theta(x_n, [sx, sy]) = 0$

c'est à dire $\rho(\theta)([x\,y]) = 0$.

D'autre part, si θ est un cobord $\rho(\theta)$ est nul; en effet si θ est un cobord il existe φ telle que $\theta(x, y) = \varphi([x\ y])$
donc $\rho(\theta)\, y = \theta(x_n, s\, y) = \varphi[x_n, sy] = 0$
car x_n appartient au centre.

L'application ρ définit donc par passage au quotient une application encore notée ρ
de $H^2(\mathcal{G}_n, K)$, dans $H^1(\mathcal{G}_{n-1}, K)$

Il reste à définir l'application h de $H^1(\mathcal{G}_{n-1}, K)$ dans $H^3(\mathcal{G}_{n-1}, K)$ - elle est définie
en effectuant le cup produit d'un élément de $H^1(\mathcal{G}_{n-1}, K)$ par l'élément β de $H^2(\mathcal{G}_{n-1}, K)$ défini par l'extension $\mathcal{G}_n$

Définissons explicitement l'application sur les cocycles, soit b le cocycle représentant β et soit $\varphi \in H^1(\mathcal{G}_{n-1}, K)$

un représentant du cup produit $\varphi \cup \beta$, sera l'application tri linéaire altérnée suivante :

$$f(x\,y\,z) = b(x\,y)\ \varphi(3) + b(y\,z)\ \varphi(x) + b(z,x)\ \varphi(y).$$

Nous avons défini toutes les applications qui figurent dans la suite.
Démontrons maintenant l'exactitude.

Exactitude en $H^2(\mathcal{G}_{n-1}, K)$

Montrons d'abord que $p^* \circ i = 0$
il faut montrer que le cocycle θ de $\mathcal{G}_n$ défini par :
$\theta(x,y) = b(p\,x, p\,y)$ est un cobord,

mais si on considère l'application l de projection sur $K\,x_n$ définie par la section s, $x \longrightarrow (x - sp\,x) = l(x)\,x_n$
on a $b(p\,x, p\,y) = l([x, y])$ qui ne dépend que de $[x\ y]$; donc $p^*(\beta)$ est nul.

soit maintenant θ un cocycle de $\mathcal{G}_{n-1}$
tel que $p^*(\theta)$ soit un cobord de $\mathcal{G}_n$. montrons qu'alors $\theta = b$ modulo un cobord de $\mathcal{G}_{n-1}$
On suppose donc que $\theta(p\,x, py) = \varphi([x\ y])$ $\quad \varphi : \mathcal{G}_n \to K$

or $[x, y]_{\mathcal{G}_n} = s\,[p\,x, p\,y]_{\mathcal{G}_{n-1}} + b(px, py)\ x_n$

on a donc $\theta(x, y) = \varphi\, s([x\, y]) + b(x,y).\ \varphi(x_n)$
$\forall\ x, y \in \mathcal{G}_{n-1}$

donc $\theta(x, y) = b(x, y)\ \varphi(x_n)$ modulo le cobord défini par l'application $\varphi \circ s$ de $\mathcal{G}_{n-1}$ dans K.

• <u>exactitude en $H^2(\mathcal{G}_n, K)$</u>

Montrons d'abord que $\varphi \circ p^* = 0$
soit θ un cocycle de $\mathcal{G}_{n-1}$
$((\varphi \circ \overset{*}{p})(\theta))(y) = (p^* \theta)(x_n, sy) =$
$\theta(\overset{n}{p}\, x_n, p\, s\, y) = 0$

soit maintenant θ un cocycle de dimension 2 de $\mathcal{G}_n$
tel que $\theta(x_n, sy) = 0 \quad \forall\ y \in \mathcal{G}_{n-1}$
on a alors $\theta(x_n, y) = 0 \quad (\forall\ y \in \mathcal{G}_{n-1})$
puisque $\theta(x_n, x_n) = 0$

soit alors θ' défini sur $\mathcal{G}_{n-1}$ par
$\theta'(x, y) = \theta(sx, sy)$. - c'est un cocycle, en effet
on a $\theta'([x\, y], z) = \theta(s\,[x\, y], s\, z) =$
$\theta([s\, x, s\, y], s\, z)$
puisque θ est nul si une variable appartient à $K\ x_n$ et
on a $p^* \theta' = \theta$ car $p^* \theta'(x,y) =$
$\theta(s\, p\, x, s\, p\, y) = \theta(x, y)$
puisque θ est nul si une variable appartient à $K\ x_n$

•• <u>Exactitude en $H^1(\mathcal{G}_{n-1}, K)$</u>

Montrons que $h \circ \rho = 0$
soit θ un cocycle de dimension 2 de $\mathcal{G}_n$ $(h \circ \rho)(\theta)$
est le cocycle de dimension 3 de $\mathcal{G}_{n-1}$ défini par

$f(x\, y\, z) = b(x\, y)\ \theta(x_n, s\, z)$
$+ b(y\, z)\ \theta(x_n, s\, x) + b(z, x)\ \theta(x_n, s\, y)$

$f(x\, y\, z) = -\theta(b(x\, y)\, x_n, sz) + \theta(b(y\, z)\, x_n, s\, x)$
$+ \theta(b(z\, x)\, x_n, s\, y) = \theta([s\, x, sy]_{\mathcal{G}_n} - s([x\, y]_{\mathcal{G}_{n-1}}), sz)$
$+ \theta([sz, sx]_{\mathcal{G}_n} - s\,[z,x]_{\mathcal{G}_{n-1}}, s\, y) + \theta([sy, sz]_{\mathcal{G}_n} - s\,[y\, z]_{\mathcal{G}_{n-1}}, sx)$
Comme θ est un cocycle on obtient simplement :
$f(x\, y\, z) = -\big(\theta(s\,[x\, y], s\, z) + \theta(s\,[z\, x], s\, y)$
$+ \theta(s\,[y\, z], s\, x)\big)$

Si on considère alors le cocycle de dimension 2 de $\mathcal{G}_{n-1}$ défini par $g(x,y) = \theta(sx, sy)$

on voit que $f = dg$, donc f est un cobord de dimension 3 et $h \circ \rho = 0$

- soit maintenant φ une application linéaire de $\mathcal{G}_{n-1}$ dans K nulle sur $\mathcal{D}\mathcal{G}_{n-1}$ et telle que $\varphi \cup \beta$ soit nul, c'est à dire,
supposons qu'il existe un cocycle θ de dimension 2 de $\mathcal{G}_{n-1}$ tel que :

$$b(x\,y)\,\varphi(z) + b(y\,z)\,\varphi(x) + b(z\,x)\,\varphi(y) = \theta([x\,y], z) + \theta([y\,z], x) + \theta([z\,x], y)$$

- Montrons alors qu'il existe un cocycle θ' de dimension 2 de $\mathcal{G}_n$ tel que :

$$\varphi(x) = \theta'(x_n, s\,x)$$

on pose $\theta'(x,y) = (x - s\,p\,x)\,\varphi(p\,y) - (y - s\,p\,y)\,\varphi(p\,x) - \theta(p\,x, p\,y)$

Montrons que c'est un cocycle. On a $\theta'(x, x) = 0$

$$\theta'([x\,y], z) = ([x\,y] - s\,p[x\,y])\,\varphi(p\,z) - (z - spz)\,\varphi(p\,[x\,y]) - \theta([px, py], pz)$$
$$= b(p\,x, p\,y)\,\varphi(p\,z) - \theta([px, py], p\,z)$$

car φ est nulle sur $\mathcal{D}\mathcal{G}_{n-1}$

On a donc :

$$\theta'([x\,y], z) + \theta'([y\,z], x) + \theta'([z\,x], y)$$
$$= b(px, py)\,\varphi(p\,z) - \theta([p\,x, p\,y], p\,z)$$
$$+ b(p\,y, p\,z)\,\varphi(p\,x) - \theta([p\,y, p\,z], p\,x)$$
$$+ b(p\,z, p\,x)\,\varphi(p\,y) - \theta([p\,z, p\,x], p\,y)$$
$$= 0$$

donc θ' est un cocycle de $\mathcal{G}_n$ -
et on a $\theta'(x_n, s\,x) = (x_n - s\,p\,x_n)\,\varphi(p\,s\,x) - (sx - spsx)\,\varphi(p\,x_n) - \theta(p\,x_n, p\,s\,x) = \varphi(x)$

==========

3.- ALGEBRES de LIE NILPOTENTES.-

a.- définition -

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est milpotente s'il existe un entier p tel que $\mathcal{C}^p \mathfrak{g} = \{0\}$

b.- propriétés.

. Toute algèbre quotient, toute sous algèbre d'une algèbre de Lie milpotente est milpotente.

.. Toute algèbre de Lie extension centrale d'une algèbre de Lie milpotente est milpotente.

. Toute algèbre de Lie milpotente $\neq \{0\}$ a un centre non nul.

non nul.

Du théorème d'Engel, on déduit les 2 propositions suivantes :

. soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie milpotente sur l'espace vectoriel V,- il existe une base de V telle que quelque soit $x \in V$ ad x admette une matrice strictement triangulaire par rapport à cette base.

. soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie milpotente et S un idéal $\neq \{0\}$ de $\mathfrak{g}$; on a alors $S \cap \mathcal{C}_1(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$

4\. Résultats sur les dimensions des termes des suites centrales ascendantes, descendantes, dérivées des algèbres de Lie milpotentes.

soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie milpotente sur un espace vectoriel V de dimension n

a.- si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie milpotente, si i est un entier positif ou nul, si $\mathcal{D}^i \mathfrak{g}$ est non abélienne, on a

$$\dim \frac{\mathcal{D}^i \mathfrak{g}}{\mathcal{D}^{i+1} \mathfrak{g}} \geq 2^i + 1 \quad - \quad \text{(voir (3))}$$

en particulier on a $\dim \mathcal{C}^1 \mathfrak{g} \leq n-2$, si $n \geq 2$

b.- Si $\dim C_p \mathfrak{g} = n-2$
alors $C_{p+1} \mathfrak{g} = V$

en effet on a $\dim C_{p+1} \mathfrak{g} \geqslant n-1$

on peut trouver une base $x_1 , x_2 , \ldots x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n$

telle que $(x_1 \ldots x_{n-2})$ forment une base de $C_p \mathfrak{g}$
et $[x_{n-1}, x_n] = 0$
donc $x_n \in C_{p+1} \mathfrak{g}$

c.- soit p le plus petit entier tel que $C^{n} \mathfrak{g} = 0$
q le plus petit entier tel que $C_q \mathfrak{g} = V$

On a alors $p = q$
et $C_i \mathfrak{g} \subset C^{p-i} \mathfrak{g}$

démonstration. On démontre par récurrence les 2 formules

$$\mathcal{C}_i \mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^{p-i} \mathfrak{g}$$
$$\mathcal{C}_{q-i} \mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^{i} \mathfrak{g}$$

dont le nombre de termes distincts de la suite centrale ascendante est égal au nombre de termes distincts de la suite centrale descendante.

=====

5.- <u>Résultats sur les dimensions des groupes de cohomologie d'une algèbre de Lie nilpotente.</u> -

Proposition : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et soit M un $\mathfrak{g}$-module.- S'il existe un $\mathfrak{g}$-module trivial non nul contenu dans M, on a :

$$\dim H^0(\mathfrak{g}, M) \geqslant 1$$
$$\dim H^n(\mathfrak{g}, M) \geqslant 1$$
$$\dim H^i(\mathfrak{g}, M) \geqslant 2 \quad \text{pour } 1 < i < n$$

voir (4)

===============

Chapitre II

Quelques résultats de topologie sur L_n et N_n

1 - Définition de L_n

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n. La donnée d'une base e_1 e_2 e_n de V définit une bijection $\varphi_{e_1 e_2 \dots e_n}$ de l'ensemble des applications bilinéaires de V x V dans V sur K^{n^3} par $B \longmapsto (c_{ijk})$

$$\text{si} \quad B[e_i, e_j] = \sum c_{ijk} e_k$$

On considérera K^n comme un espace vectoriel de dimension n nous aurons ainsi grâce à la base canonique de K^n une bijection canonique de l'ensemble des applications bilinéaires de K^n x K^n dans K^n sur K^{n^3}

Considérons l'ensemble $L_n \subset K^{n^3}$ des algèbres de lie sur K^n (une algèbre de lie étant identifiée au système de ses constantes de structure), cet ensemble est fermé dans K^{n^3} pour la topologie de Zariski de K^{n^3} en effet pour qu'une application bilinéaire δ sur K^n soit une algèbre de lie, il faut et il suffit que la loi vérifie :

$$\cdot\ \delta(x, x) = 0$$

$$\cdot\ \delta(z, \delta(x, y)) + \delta(x, \delta(y, z)) + \delta(y, \delta(z, x)) = 0$$

ce qui se traduit par les relations polynômiales

$$c_{iik} = 0 \quad \forall\, i, k$$

$$c_{ijk} = - c_{jik}$$

$$\sum_{p=1}^{n} c_{ipm} c_{jkp} + c_{jpm} c_{kip} + c_{kpm} c_{ijp} = 0 \quad \forall\, i,j,k,m$$

L'ensemble L_n sous ensemble fermé de K^{n^3} pour la topologie de Zariski est donc muni d'une structure de variété algébrique.

2 - Isomorphisme de deux algèbres. Orbite d'une algèbre.

Soient δ et δ' deux algèbres sur K^n

δ et δ' sont isomorphes s'il existe un automorphisme φ de K^n tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^n \times K^n & \xrightarrow{\delta} & K^n \\ \downarrow {\scriptstyle \varphi \times \varphi} & & \downarrow {\scriptstyle \varphi} \\ K^n \times K^n & \xrightarrow{\delta'} & K^n \end{array} \qquad \delta'(x,y) = \varphi\,\delta(\varphi^{-1}x, \varphi^{-1}y)$$

le groupe $GL(K^n)$ opère sur L_n

par $(\varphi, \delta) \longmapsto \varphi * \delta \quad (\varphi * \delta)(x,y) = \varphi(\delta(\varphi^{-1}x, \varphi^{-1}y))$

on a $(\varphi_1 \circ \varphi_2) * \delta = \varphi_1 * (\varphi_2 * \delta)$

$Id * \delta = \delta$

Soit $e_1\ e_2 \dots e_n$ la base canonique de K^n

et soit $\delta(e_i\ e_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}^{\delta}\ e_k$

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j\ e_j$$

$$\varphi^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_i^j\ e_j$$

alors $\varphi * \delta(e_i, e_j) = \sum c_{ijk}^{\varphi*\delta} e_k$ avec $\boxed{c_{ijk}^{\varphi*\delta} = \sum_{l,p,h} b_i^l\, b_j^h\, a_p^k\, c_{lph}^{\delta}}$

on sait que les coéfficient b_i^j s'expriment comme des fonctions rationelles des a_i^j ; fonctions de dénominateur det (a_i^j)

On voit donc que l'application $(\varphi, \delta) \longmapsto \varphi * \delta$

est un morphisme de $GL(K^n) \times L_n$ sur L_n

on notera dans la suite ce morphisme R

Remarque : soit $\varphi \in GL(K^n)$ $(\varphi^{-1}e_1, \varphi^{-1}e_2, \dots \varphi^{-1}e_n)$ forme une base de K_n qui définit une bijection $\psi_{\varphi^{-1}e_1, \dots, \varphi^{-1}e_n}$ de L_n sur L_n

on a $\psi_{\varphi^{-1}e_1, \dots \varphi^{-1}(e_n)}(\delta) = \varphi * \delta$

Ce qui veut dire que les coordonnées de $\varphi*\delta$ s'obtiennent en écrivant les coordonnées de δ par rapport à la base $\varphi^{-1}e_1 \dots \varphi^{-1}e_n$

Orbite d'une algèbre

On appellera orbite. d'une algèbre $\mathcal{G}$ l'ensemble des algèbres isomorphes à $\mathcal{G}$ on la notera $\mathcal{O}(\mathcal{G})$

C'est un ensemble irréductible de Ln car c'est l'image par R de l'ensemble irréductible $GL(K^n) \times \{\mathcal{G}\}$

De même si I est un ensemble irréductible dans K^{n^3}

la réunion des orbites de tous les points de I est irréductible, car c'est même l'image par R de l'ensemble

$$GL(K^n) \times I \subset GL(K^n) \times L_n$$

irréductible comme produit d'ensembles irréductibles.

3 - Définition de N_n

On appellera N_n l'ensemble des algèbres de lie nilpotentes sur K^n , on a $N_n \subset L_n$

L'ensemble N_n est un sous enpemble fermé de L_n

en effet pour qu'un algèbre de lie $\mathcal{G}$ sur K^n soit nilpotente il faut et il suffit que $\mathcal{C}^n \mathcal{G} = \{0\}$

Or il existe des polynomes P_i^n en n^3 indéterminées tels que pour tout $\mathcal{G} \in L_n$, $\mathcal{C}^n \mathcal{G}$ soit engendré par

$$\text{les } y_i = \sum_{r=1}^{n} P_i^r (c_{ijk})\, e_r$$

donc l'ensemble N_n est l'ensemble des (cijk) $\in L_n$ tels que $P_i^n(cijk) = 0$

N_n est fermé. L'ensemble N_n est donc muni d'une structure de variété algébrique.

4 - Quelques ouverts dans N_n

Lemme 1

Soit X une variété et V et W deux espaces vectoriels de dimension finie sur K . $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ est alors un espace vectoriel de dimension finie sur K. Supposons donné un morphisme λ de X dans $\mathrm{Hom}_k(V,W)$.

Pour tout x dans X, $\lambda(x)$ est une application linéaire de V dans W. On dit alors que $\lambda(x)$ dépend algébriquement de x alors

1) l'ensemble des x de X tels que dim Im $\lambda(x) \leqslant p$ es un fermé de X (p entier $\geqslant 0$)

2) l'ensemble des x de X tels que dim $\ker \lambda(x) \geqslant q$ est un fermé de X (q entier $\geqslant 0$)

Démonstration

Soit e_1 e_2 ... e_k une base de V et ε_1 ε_2 ... ε_n une base de W

On peut écrire $\lambda(x) \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} u_i^j(x)\ \varepsilon_j$

où les u_i^j sont des morphismes de X dans K.

La condition dim Im $\lambda(x) \leqslant p$ s'exprime donc par la nullité de tous les déterminants d'ordre p + 1 extraits de la matrice $u_i^j(x)$. L'ensemble des x tels que ~~dim Im~~ dim Im $\lambda(x) \leqslant p$ est donc l'ensemble des points de X où un certain nombre de morphismes prennent la valeur 0.

Il est donc fermé.

D'autre part la condition dim Ker $\lambda(x) \geqslant q$ est équivalente à la condition dim Im $\lambda(x) \leqslant k - q$ où $k = \dim V$

L'ensemble des points où dim ker $\lambda(x) \geqslant q$ est donc fermé d'après ce qui précède.

Corollaires

1) l'ensemble des points $\mathcal{G}$ de L_n tels que dim $\mathcal{C}^i \mathcal{G} \leqslant p$ est un fermé de L_n
2) l'ensemble des points $\mathcal{G}$ de L_n tels que dim $\mathcal{D}^i \mathcal{G} \leqslant q$ est un fermé de L_n
3) l'ensemble des points $\mathcal{G}$ de L_n tels que dim $\mathcal{C}_k \mathcal{G} \geqslant r$ est un fermé de L_n
4) l'ensemble U_1^n des points $\mathcal{G}$ de N_n tels que dim $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 1$ est un ouvert non vide de N_n
5) l'ensemble U_n des points $\mathcal{G}$ de N_n tels que dim $\mathcal{C}_i \mathcal{G} = i$ est un ouvert non vide de N_n $1 \leqslant i \leqslant n$

Démonstration des corollaires. soit $e_1\ e_2 \dots e_n$ la base canonique de K^n

Corollaire 1

On remarque qu'il existe des polynômes P_i^j en n^3 variables tels que l'espace vectoriel $\mathcal{C}^i \mathcal{G}$ soit engendré par les vecteurs

$$y_r = \sum_{j=1}^{n} P_r^j (c_{ijk})\, e_j$$

On voit donc que $\mathcal{C}^i \mathcal{G}$ est l'image de K^N par l'application linéaire λ telle que $\lambda(e_r) = \sum_{j=1}^{n} P_r^j(c_{ijk})\, e_j$

les P_i^j étant des polynômes, les fonctions p_r^j de L_n dans K définis par $cijk \longmapsto p_r^j(cijk)$ sont des morphismes de L_n dans K

l'application λ dépend donc algébriquement de L_n et d'après le lemme :

l'ensemble des $\mathcal{G}$ de L_n tels que dim $\mathcal{C}^i \mathcal{G} \leq p$ est un fermé de L_n

Corollaire 2

Démonstration analogue à la démonstration du corollaire 1.

Corollaire 3

Montrons tout d'abord que pour tout $i \geq 0$ il existe des polynômes P_r^k en n^3 variables $1 \leq k \leq n$, $1 \leq r \leq N$

tels que si $x = \sum x^k e_k$

$$x \in \mathcal{C}_i \mathcal{G} \iff \sum_{k=1}^{n} P_r^k(c_{ijk})\, x^k = 0$$

alors $\mathcal{C}_i \mathcal{G}$ sera le noyau de l'application linéaire

$\lambda : \mathbb{K}^n \longrightarrow K^N$ définie par

$$\lambda(e_k) = \sum_{r=1}^{N} P_r^k(c_{ijk})\, e_r$$

application linéaire qui dépend algébriquement de L_n et le corollaire 3 sera établi.

Soit donc $x = \sum x^i e_i$

dire que $x \in \mathcal{C}_1 \mathcal{G}$ c'est dire que

$[x, e_j] = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$

donc c'est dire que $\sum_{i=1}^{n} x^i c_{ijp} = 0 \qquad \forall j, p$

Supposons donc démontré qu'il existe des polynômes en n^3 variables tels que

$x = \sum x^i e_i \in \mathcal{C}_i \mathcal{G} \Leftrightarrow \sum x^k Q_r^k (c_{ijk}) = 0 \quad \forall r$

soit $x = \sum x^i e_i$

pour que x appartienne à $\mathcal{C}_{i+1} \mathcal{G}$ il faut et il suffit que

$[x, e_j] \in \mathcal{C}_i \mathcal{G} \quad \forall j$

c'est-à-dire que $\sum x^i c_{ijp} e_p \in \mathcal{C}_i \mathcal{G} \quad \forall j$

ou encore que

$$\sum_p \left(\sum_i x^i c_{ijp} \right) Q_r^p (c_{ijk}) = 0 \qquad \forall r, j, p$$

ce qui montre le résultat.

Corollaire 4

On sait que sur N_n on a toujours dim $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} \geqslant 1$

l'ensemble des points de N_n tels que dim $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 1$

est donc ouvert dans N_n ; il est non vide car l'algèbre

définie par $[e_1, e_i] = e_{i+1} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-1$

appartient à cet ouvert.

Corollaire 5

On sait que sur N_n on a dim $\mathcal{C}_i \mathcal{G} \geqslant i$

pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$

et si dim $\mathcal{C}_{n-2}\,\mathcal{G} = n-2$ on a nécéssairement
dim $\mathcal{C}_i\,\mathcal{G} = i$

$1 \leq i \leq n-2$

L'ensemble U_n est donc le complémentaire dans N_n de l'ensemble des $\mathcal{G}$ tels que dim $\mathcal{C}_{n-2}\,\mathcal{G} \geq n-1$
Il est donc ouvert. Il est non vide car l'algèbre décrite plus haut appartient à cet ouvert.

5 - Notion de représentation dépendant algébriquement de $\mathcal{G}$

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de lie sur K^n et M un k -module de dimension finie- Une représentation de $\mathcal{G}$ dans M est un élément $\rho \in Hom_K(K^n, End\,M)$ tel que :

$$\forall x, y \in k^n \qquad \rho(x)\circ\rho(y) - \rho(y)\circ\rho(x) = \rho\left([x,y]_{\mathcal{G}}\right)$$

Si $\mathcal{G}$ varie dans une sous variété A de L^n on peut définir la notion d'une représentation dépendant algébriquement de $\mathcal{G}$

Définition :

Soit A une sous variété de L^n et une application $\mathcal{G} \to \rho(\mathcal{G})$ qui associe à tout $\mathcal{G}$ de A une représentation de $\mathcal{G}$ d'espace $M_{\mathcal{G}}$
On dit que $\rho(\mathcal{G})$ dépend algébriquement de $\mathcal{G}$ si on peut choisir des isomorphismes $M_{\mathcal{G}} \xrightarrow{i_{\mathcal{G}}} M$ où M est un espace vectoriel fixe, tels que l'application

$$\psi : A \longrightarrow Hom_K\left(K^n, End\,M\right)$$

définie par $\mathcal{G} \longmapsto \psi(\mathcal{G})$ où $\psi(\mathcal{G})$ est la représentation de $\mathcal{G}$ dans M transportée de la représentation $\rho(\mathcal{G})$ dans $M_{\mathcal{G}}$ par l'isomorphisme $i_{\mathcal{G}}$

soit un morphisme de A dans l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_K(K^n, \mathcal{E}nd\, M)$

on a alors pour tout $\mathfrak{g}$ de A une structure de $\mathfrak{g}$-module sur M, cette structure variant "algébriquement" avec $\mathfrak{g}$

Exemples :

1 - Exemple trivial

M $\mathfrak{g}$-module trivial pour tout $\mathfrak{g}$ de L_n

2 - soit $M = K^n$ définissons Ad : $L_n \dashrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^n, \mathcal{E}nd\, K^n)$

par $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \cdot x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x \qquad \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x \in \mathcal{E}nd\, K^n$

L'application Ad est un morphisme, en effet si

$(e_1\ e_2 \ldots e_n)$ est la base canonique de K^n, on

$\mathrm{Hom}_K(K^n, \mathcal{E}nd\, K^n)$ a comme base canonique la famille des éléments $\mathcal{E}ijk$ définis par $\mathcal{E}ijk(e_i) \cdot e_j = e_k$

et si $\mathfrak{g} = (cijk) \in L_n$ on voit que

$\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = \sum cijk\, \mathcal{E}ijk$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie sur K^n et $\rho(\mathfrak{g})$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans M.

Alors on sait associer au $\mathfrak{g}$-module M de manière canonique un complexe :

$$0 \dashrightarrow C^0(\mathfrak{g}; M) \to \cdots \to C^p(\mathfrak{g}; M) \xrightarrow{d^p(\mathfrak{g}, \rho(\mathfrak{g}))} C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$$

où $C^p(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Hom}_K(\overset{p}{\Lambda} K^n, M)$

et où l'application $d^p(\mathfrak{g}, \rho(\mathfrak{g}))$ est définie par

$$(d^p f)(x_0\ x_1 \ldots x_n) = \sum (-1)^i \rho(\mathfrak{g})(x_i) \cdot f(x_0 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i\ x_j]_{\mathfrak{g}}\, x_0 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots x_n)$$

Proposition

Soit A une sous variété de L_n et soit donné pour tout $\mathcal{G} \in A$ une représentation $\rho(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ dans M variant algébriquement avec $\mathcal{G}$.

alors l'application linéaire $d^p(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G}))$ définie pour $\mathcal{G} \in A$

$$d^p(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G})) : Hom(\overset{p}{\Lambda} K^n, M) \longrightarrow Hom(\overset{p+1}{\Lambda} K^n, M)$$

dépend algébriquement de $\mathcal{G}$

Démonstration

Choisissons une base $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k$ de M

on a $\rho(\mathcal{G})(e_i) \cdot \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{k} a_{ijl}(\mathcal{G}) \, \varepsilon_l$

les aijl($\mathcal{G}$) sont les coordonnées de $\rho(\mathcal{G})$ sur la base canonique de Hom(K^n, $\mathcal{E}$nd M) défini par la base $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k$ de M

. les applications $\mathcal{G} \dashrightarrow$ aijl($\mathcal{G}$) sont donc des morphismes de A dans K puisque la représentation $\rho(\mathcal{G})$ varie algébriquement avec $\mathcal{G}$

Considérons alors $d^p(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G}))$: Hom($\overset{p}{\Lambda} K^n$, M) $\dashrightarrow$ Hom($\overset{p+1}{\Lambda} K^n$

Une base de Hom($\overset{p}{\Lambda} K^n$, M) est formée des

$f^q_{i_1 i_2 \dots i_p}$ $\quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$

$1 \leq q \leq k$

On voit que le transformé de $f^q_{i_1 i_2 \dots i_p}$ par $d^p(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G}))$ admet par rapport à la base canonique ($f^q_{i_0 i_1 \dots i_p}$) de Hom($\overset{p+1}{\Lambda} K^n$, M) des coordonés qui sont, soient des aijl ($\mathcal{G}$), soient des cijl($\mathcal{G}$)

l'application $d^p(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G}))$ dépend donc algébriquement de $\mathcal{G}$

Rappellons qu'on a posé

$Z^p(\mathcal{G}, M(\mathcal{G})) = \mathrm{Ker}\ d^p(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G}))$ = espace des cocycles de dimp

$B^p(\mathcal{G}, M(\mathcal{G})) = \mathrm{Im}\ d^{p-1}(\mathcal{G}, \rho(\mathcal{G}))$ = espace des cobords de dimp

On a donc d'après le lemme 1 du paragraphe précédent les résultats suivants :

l'ensemble des $\mathcal{G}$ tels que :

$\dim Z^p(\mathcal{G}, M(\mathcal{G})) \geqslant q$ est un fermé de A.

l'ensemble des $\mathcal{G}$ tels que :

$\dim B^p(\mathcal{G}, M(\mathcal{G})) \leqslant q$ est un fermé de A.

<u>6 - Sous algèbres variant dans un fermé.</u>

Soit $\mathcal{G} \in L_n$; $\mathcal{G}$ est donc une algèbre de lie sur K^n

Considérons une sous algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{G}$ de dimension p

et soient des éléments $y_1\ y_2 \cdots y_p$ formant une base de $\mathfrak{h}$

la donnée de $y_1\ y_2\ \ y_p$ définit donc une algèbre de lie

$\Phi(y_1\ y_2 \cdots y_p ; \mathcal{G})$ sur K^p

c'est-à-dire un élément de L_p

si $\mathcal{G}$ est nilpotente, c'est-à-dire si $\mathcal{G} \in N_n$

alors $\Phi(y_1\ y_2 \cdots y_p ; \mathcal{G}) \in N_p$

Considérons maintenant une partie fermée S de L_p et soit

E l'ensemble des $\mathcal{G} \in L_n$ pour lesquels il existe une base

$y_1\ y_2\ \ y_p$ d'une sous algèbre de $\mathcal{G}$ telle que

$\Phi(y_1\ y_2 \cdots y_p ; \mathcal{G}) \in S$

alors l'ensemble E est fermé.

Démonstration :

1) Soit Γ_p la grass manienne des sous-espaces de dimension p de K^n. On voit que si $B = (y_1\ y_2\ ..\ y_n)$ est une base de K^n, l'ensemble des $\mathcal{L} \in \Gamma_p$ tels que $\mathcal{L} \cap \left(\sum_{k=p+1}^{n} K\, y_i\right) = \{0\}$ est ouvert. Soit Γ_p^B cet ensemble; il y a des morphismes $v_i^B : \Gamma_p^B \longrightarrow K^n$ uniquement déterminés tels que pour tout $\mathcal{L} \in \Gamma_p^B$, $v_1^B(\mathcal{L}) \dots\ v_p^B(\mathcal{L})$, forment une base de $\mathcal{L}$ telle que $v_i^B(\mathcal{L}) \equiv y_i \pmod{\sum_{k=p+1}^{n} K\, y_i}$

<u>Lemme</u>

Soit une variété N et E une partie de N soit une application $\mathcal{Y} \longmapsto \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ de E dans Γ_p et soit $\mathcal{Y}_0 \in \overline{E}$

Il existe alors des éléments $y_1\ y_2\ \dots\ y_p$ de K^n linéairement indépendants et pour tout $\mathcal{Y} \in E$ une base $y_1^{\mathcal{Y}} \dots\ y_p^{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ tels que $(\mathcal{Y}_0, y_1 \dots\ y_p)$ soit adhérent dans $N \times (K^n)^p$ à l'ensemble des $(\mathcal{Y}, y_1^{\mathcal{Y}} \dots\ y_p^{\mathcal{Y}})$ pour $\mathcal{Y} \in E$

Démonstration :

Soit A l'adhérence des $(\mathcal{Y}, \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ pour $\mathcal{Y} \in E$ dans $N \times \Gamma_p$. Comme Γ_p est complète la projection $N \times \Gamma_p \longrightarrow N$ est fermée; l'image de $\overline{A}$ est fermée et contient E, elle contient donc $\mathcal{Y}_0$. Il y a donc un $\mathcal{L}_0 \in \Gamma_p$ tel que $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{L}_0) \in \overline{A}$ soit $B = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)$ une base de K^n telle que $y_1\ y_2 \dots y_p$ forment une base de $\mathcal{Y}_0$ et soit Γ_p^B l'ouvert de Γ_p défini par cette base, on a $\mathcal{Y}_0 \in \Gamma_p^B$

soit E' l'ensemble des $\mathcal{Y} \in E$ tels que $\mathcal{L}(\mathcal{Y}) \in \Gamma_p - \Gamma_p^B$

alors $(\mathcal{G}_0, \mathcal{L}_0)$ n'est pas adhérent à l'ensemble des $(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}))$ pour $\mathcal{G} \in E'$, car $\mathcal{L}_0$ n'est pas adhérent à l'ensemble fermé $\Gamma_p - \Gamma_p^B$ si $E_0 = E - E'$ $(\mathcal{G}_0, \mathcal{L}_0)$ est donc adhérent à l'ensemble des $(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}))$ pour $\mathcal{G} \in E_0$

Considérons les fonctions $v_i^B : \Gamma_p^B \longrightarrow K^n$
les fonctions $(\mathcal{G}, \mathcal{L}) \longmapsto v_i^B(\mathcal{L})$ sont continues sur $N_n \times \Gamma_p$

et on a $v_i^B(\mathcal{L}_0) = y_i$ pour $1 \leq i \leq p$

donc $(\mathcal{G}_0, \mathcal{L}_0, y_1 \dots y_p)$ est adhérent à l'ensemble des

$(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}), v_1^B(\mathcal{L}(\mathcal{G})) \dots v_p^B(\mathcal{L}(\mathcal{G})))$ $\mathcal{G} \in E_0$

dans $N \times \Gamma_p \times (K^n)^p$

on a donc établi le résultat en prenant $y_i^{\mathcal{G}} = v_i^B(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$ si $\mathcal{G} \in E_0$ et pour $(y_1^{\mathcal{G}} \dots y_p^{\mathcal{G}})$ une base quelconque de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ si $\mathcal{G} \in E - E_0$

2) Soit H_0 l'ensemble des $(\mathcal{G}, y_1\ y_2 \dots y_p) \in N_n \times (K^n)^p$ tels que $y_1\ y_2 \dots y_p$ soient linéairement indépendants.
Soit H l'ensemble des $(\mathcal{G}, y_1\ y_2 \dots y_p)$ tels que $(y_1\ y_2 \dots y_p)$ forment une base d'une sous algèbre de $\mathcal{G}$
H est fermé dans H_0

Démonstration :

Soit $(\mathcal{G}_0, y_1^0 \dots y_p^0)$ adhérent à H et appartenant à H_0
l'application $(\mathcal{G}, y, y') \longmapsto [y, y']_{\mathcal{G}}$ est un morphisme de $N_n \times K^{2n}$ dans K^n. Donc si i, j sont entre 1 et p, l'application $(\mathcal{G}, y_1\ y_2 \dots y_p) \longmapsto y_1 \wedge \dots \wedge y_p \wedge [y_i, y_j]_{\mathcal{G}}$ est un morphisme de $N_n \times (K^n)^p$ dans $\overset{p+1}{\Lambda} K^n$
Ce morphisme applique H sur $\{0\}$ donc prend la valeur 0 en $(\mathcal{G}_0, y_1^0 \dots y_p^0)$ d'où $y_1^0 \wedge y_2^0 \dots \wedge y_p^0 \wedge [y_i, y_j]_{\mathcal{G}_0} = 0$

~~... couples (i, j)~~

Ceci est vrai pour tous les couples (i,j)

comme $y_1^0 \dots y_p^0$ sont linéairement indépendants, il en résulte que $(\mathcal{Y}, y_1^0 \dots y_p^0) \in H$

Montrons que la fonction ϕ définie auparavant qui associe à tout élément $(\mathcal{Y}, y_1 \dots y_p)$ de H un élément de N_p est un morphisme de H dans N_p

si $(\mathcal{Y}, y_1 \dots y_p) \in H$

$\phi(\mathcal{Y}, y_1 \dots y_p)$ a comme coordonnées les cijk $\in K$

définis par $[y_i, y_j]_{\mathcal{Y}} = \sum_{i=1}^{p} c_{ijk}\, y_k$

Il suffit de montrer que c'est un morphisme localement

soit $(\mathcal{Y}_0\, y_1^0 \dots y_p^0)$ un point de H. Soient $(y_{p+1}^0 \dots y_n^0)$ des éléments tels que $(y_1^0 \dots y_{p+1}^0 \dots y_n^0)$ forment une base de K^n.

Si $(\mathcal{Y}, y_1, y_2 \dots y_p) \in H$ on a $y_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ik}\, y_k^0$

il y a voisinage V de $(\mathcal{Y}_0, y_1^0 \dots y_p^0)$ tel que pour tout point $(\mathcal{Y}, y_1 \dots y_p)$ de ce voisinage $\det\limits_{1 \leq i, r \leq p} a_{ir} \neq 0$

Posons $[y_i, y_j]_{\mathcal{Y}} = \sum b_{r,i,j}(y, \mathcal{Y})\, y_r^0$

les cijk$(y, \mathcal{Y})$ pour $(\mathcal{Y}, y)$ s'obtiennent en résolvant les équations $\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}(y, \mathcal{Y})\, a_{k,r}(y, \mathcal{Y}) = b_{r,i,j}(y, \mathcal{Y})$

donc les cijk $(y, \mathcal{Y})$ s'obtiennent comme fonctions rationelles des b_{rij} et des akr donc des coordonnées de $(\mathcal{Y}, y_1 \dots y_p)$

3) Soit $\mathcal{Y}_0$ adhérent à E. D'après 1) il existe alors $y_1^0 \dots y_p^0$ linéairement indépendants, et pour $\mathcal{Y} \in E$ des éléments $y_1^{\mathcal{Y}} \dots y_p^{\mathcal{Y}}$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites

$(\mathcal{Y}_0, y_1^0 \dots y_p^0)$ est adhérent à l'ensemble des $(\mathcal{Y}, y_1^{\mathcal{Y}} \dots y_p^{\mathcal{Y}})$ pour $\mathcal{Y} \in E$ et les $y_1^{\mathcal{Y}} \dots y_p^{\mathcal{Y}}$ forment une base d'une sous algèbre de $\mathcal{G}$; on voit donc d'après 2 que $(\mathcal{G}_0, y_1^0 \dots y_p^0) \in H$ et comme S est fermé on voit que $\Phi(\mathcal{G}_0, y_1^0 \dots y_p^0) \in S$ donc $\mathcal{G}_0 \in E$ et E est fermé, ce qui établit le résultat.

7 - Définition de l'ensemble $T_n \subset N_n$

On dit que $\mathcal{G} \in N_n$ appartient à T_n si pour tout $x \in K^n$, $ad_{\mathcal{G}} x$ admet par rapport à la base $e_1\ e_2 \dots e_n$ de K^n une matrice strictement triangulaire.

Il suffit que ce soit vrai pour les éléments $e_1\ e_2\ e_n$ de K^n
Ceci s'exprime donc par $\quad c_{ijk}(\mathcal{G}) = 0 \quad si \quad k \leq \sup(i,j)$

on voit que T_n est un sous ensemble fermé de N_n.
~~Or~~ pour toute algèbre nilpotente sur K_n il existe une base $y_1\ y_2 \dots y_n$ par rapport à laquelle adx admet une matrice strictement triangulaire
donc $\quad GL\,K^n * T_n = N_n$

Morphisme Q : $T_n \dashrightarrow T_{n-1}$
Si $\mathcal{G} \in T_n$ en est dans le centre de $\mathcal{G}$ et $e_1\ e_2 \dots e_{n-1}$ forment une base canonique de l'algèbre quotient $\mathcal{G}/K e_n$
On définit $\quad Q(\mathcal{G}) \in N_{n-1}$

$$\underset{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}{[e_i, e_j]_{Q(\mathcal{G})}} = \sum c_{ijk}(\mathcal{G})\, e_k$$

On obtient ainsi un morphisme $\quad Q_T : T_n \longrightarrow T_{n-1}$
Ce morphisme est surjectif, car si $\mathcal{G}_{n-1} \in T_{n-1}$ l'algèbre de lie nilpotente $\mathcal{G}_{n-1} \times K e_n$ a comme quotient par e_n l'algèbre $\mathcal{G}_{n-1}$

Soit $\mathcal{G}_{n-1} \in T_{n-1}$. Nous allons obtenir une bijection de $Q_T^{-1}(\mathcal{G}_{n-1})$ sur $Z_2(\mathcal{G}_{n-1}, k)$: espace des cocycles de dimension 2 de $\mathcal{G}_{n-1}$

En effet si on identifie K^{n-1} a un sous espace vectoriel de K^n, l'ensemble $Q_T^{-1}(\mathcal{G}_{n-1})$ est l'ensemble des algèbre de lie $\mathcal{G}_n$ pour lesquelles il existe des bij $\in K$ tels que $[e_n, e_i] = 0 \quad \forall i$

$$[e_i, e_j]_{\mathcal{G}_n} = [e_i, e_j]_{\mathcal{G}_{n-1}} + b_{ij}\, e_n \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1 \end{matrix}$$

considérons alors l'application bilinéaire b de $K^{n-1} \times K^{n-1}$ dans K^{n-1} définie par $b[e_i, e_j] = b_{ij}$

alors cette application bilinéaire est un cocycle de $\mathcal{G}_{n-1}$ et réciproquement si b est un cocycle de $\mathcal{G}_{n-1}$ l'algèbre $\mathcal{G}_n$ définie par

$$[e_n, e_i] = 0$$

$$[e_i, e_j] = [e_i, e_j]_{\mathcal{G}_{n-1}} + b(e_i, e_j)\, e_n$$

est une algèbre de lie qui sera nilpotente comme extension centrale d'une algèbre de lie nilpotente telle que $Q_T(\mathcal{G}_n) = \mathcal{G}_{n-1}$

Chapitre III

Algèbres filiformes

1 - Définition

Proposition :

Pour tout entier n, il existe une algèbre de lie $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V de dimension n telle que

$\dim \mathcal{C}_i \mathfrak{g} = i$

pour $0 \leqslant i \leqslant n-2$

en effet, considérons une base $(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ de V

les formules

$$[x_1, x_i] = x_{i+1} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-2$$

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad 1 < i < j \leqslant n$$

définissent sur V une structure d'algèbre de lie $\mathfrak{g}_0$ telle que $\dim \mathcal{C}_i \mathfrak{g}_0 = i$ si $0 \leqslant i \leqslant n-2$

Définition :

On appelle algèbre filiforme, une algèbre telle que dim $\mathcal{C}_i \mathfrak{g} = i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-2$

Le nombre de termes distincts de la suite centrale ascendante est alors maximum et on a $\mathcal{C}_i \mathfrak{g} = \mathcal{C}^{n-1-i}\mathfrak{g}$

$0 \leqslant i \leqslant n-1$

On a vu dans le chapitre 2 que l'ensemble des algèbres de lie telles que dim $\mathcal{C}_i \mathcal{G} = i$ $\quad 0 \leq i \leq n-2$

<u>est un ouvert</u>

L'ensemble des algèbres de lie filiformes est donc un ensemble ouvert de N_n.

Nous allons étudier plus particulièrement cet ouvert.

2 - Base adaptée pour une algèbre filiforme

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre filiforme de dimension n + 1

<u>Proposition</u> :

Il existe une base $(x\ x_1\ x_2 \ldots x_n)$ de $\mathcal{G}$

telle que
$$[x, x_i]_{\mathcal{G}} = x_{i+1} \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-1$$
$$[x_1, x_2] \equiv 0 \mod K x_4 + K x_5 + \cdots + K x_n$$
$$[x_i, x_j] = \sum_{k \geq i+j} C_{ij}^k \, x_k$$

une telle base sera appelée base adaptée de $\mathcal{G}$

<u>Démonstration</u>

Il suffit de montrer qu'il existe une base$(x'\ x'_1 \ldots x'_{n-1}\ x'_n)$

de $\mathcal{G}$ telle que $[x', x'_i] = x'_{i+1} \quad$ si $1 \leq i \leq n-1$

et $\quad [x'_i, x'_j] \in \sum_{k \geq \sup(i,j)} K x'_k$

en effet soit $\quad [x'_1, x'_2] = a_{12} x'_3 + a_{12}^4 x'_4 + \cdots + a_{12}^n x'_n$

posons $\quad x_1 = x'_1 - a_{12} x \quad$ et $\begin{cases} x_i = x'_i & i \neq 1 \\ x = x' \end{cases}$

alors $\quad [x_1, x_2] = a_{12} x_4 + \cdots + a_{12} x_n$

$\quad [x, x_1] = x_2$

d'autre part si $[x, x_i] = x_{i+1}$ $1 \leq i < n-1$

on a $\mathcal{C}^i \mathfrak{g} = k\, x_{i+1} + \cdots + k\, x_n$

et d'après la formule $[\mathcal{C}^i \mathfrak{g}, \mathcal{C}^j \mathfrak{g}] \subset \mathcal{C}^{i+j+1} \mathfrak{g}$

on aura $[x_i, x_j] = \sum_{k \geq i+j} c_{ijk}\, x_k$

Démontrons donc l'existence d'une base adaptée par récurrence sur la dimension; soit $\mathfrak{g}$ une algèbre filiforme. Le centre de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, et le quotient de $\mathfrak{g}$ par son centre est une algèbre filiforme de dimension n-1, et on a

$$\mathcal{C}^i (\mathfrak{g} / \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}) = \mathcal{C}^i \mathfrak{g} / \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}$$

on peut donc trouver une base $(y\ y_1 \ldots y_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que $y_n \in \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}$ et que les classes de $y\ y_1 \ldots y_{n-1}$ forment une base adaptée de $\mathfrak{g} / \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}$

on a donc $[y, y_i] = y_{i+1} + \alpha_i\, y_n$ $1 \leq i \leq n-2$

$[y, y_{n-1}] = \alpha_{n-1}\, y_n$

$[y_1, y_{n-1}] = \alpha_{1,n-1}\, y_n$

$[y_i, y_j] = \sum_{k \geq i+j} c_{ijk}\, y_k$

Supposons $\alpha_{n-1} \neq 0$ alors la base

$(y, y_1, y_2 + \alpha_1 y_n, \ldots, y_{n-1} + \alpha_{n-1} y_n, \alpha_{n-1} y_n)$

est telle que $[y, y_i] = y_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$

$[y_i, y_j] \in \sum_{k \geq \sup(i,j)} k\, y_k$

supposons $\alpha_{n-1} = 0$

on a alors $\alpha_{1,n-1} \neq 0$ car $[y_{n-1}, y_i] = 0$ si $i \geq 2$

et y_{n-1} n'appartient pas au centre

posons $[y_1, y_i] \equiv c_{1i}\, y_{i+1} \pmod{\sum_{k > i+1} k\, y_k}$

et soit $u = y + \lambda y_1$

on a $[\mathrm{ad}^i u, y_1] \equiv P_{i+1}(\lambda)\, y_{i+1} \pmod{\sum_{k > i+1} k\, y_k}$

Montrons qu'il existe λ_0 tel que $P_i(\lambda_0) \neq 0$ si $i \leq n-1$

en effet on a $P_1(\lambda) = 1$

$P_{i+1}(\lambda) = P_i(\lambda)\, [1 + \lambda\, c_{1,i+1}]$ $i \leq n-2$

$P_n(\lambda) = P_{n-1}(\lambda)\, \lambda\, \alpha_{1,n-1}$ $\alpha_{1,n-1} \neq 0$

comme K a une infinité d'éléments on peut donc trouver λ_0 tel que $P_i(\lambda_0) \neq 0$ pour $2 \leq i \leq n$

en posant $x = y + \lambda_0 y_1$

$$x_{i+1} = [x, x_i]$$

on obtient une base telle que $[x, x_i] = x_{i+1}$

et $[x_i, x_j] \in \sum_{k > \sup(i,j)} K\, y_k$

Remarque :

La démonstration montre que toute algèbre de lie filiforme sur un corps infini admet une base adaptée.

3 - Description des coéfficients $C_{i,j,i+j}$

Lemme 1 :

Soit $(x\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ une base adaptée d'une algèbre de lie filiforme

On a $\quad [x_i, x_j] = \sum_{k \geq i+j} c_{ijk}\, x_k$

on posera $C_{ij\ i+j} = c_{ij}$

alors les formules $[x\ x_i] = x_{i+1}$

$[x_i\ x_j] = C_{ij}\ x_{i+j}$

définissent une algèbre de lie filiforme.

En effet : considérons l'algèbre de lie $\mathcal{G}$ et faisons le changement de base $\quad x' = \dfrac{x}{\varepsilon} \quad$ où $\varepsilon \neq 0$

$$x'_i = \frac{x}{\varepsilon^i}$$

on obtient les algèbres $\mathfrak{g}_\varepsilon$ de l'orbite de $\mathfrak{g}$ données par

$$[x , x_i] = x_{i+1}$$

$$[x_i , x_j] = c_{ij}\, x_{i+j} + \sum_{p=1}^{n-(i+j)} \varepsilon^p\, c_{ij,i+j+p}\, x_{i+j+p}$$

Comme l'ensemble N_n est fermé, on voit que l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ obtenue en faisant $\varepsilon = 0$ est une algèbre de lie nilpotente. D'autre part, elle est évidemment filiforme, d'où le lemme 1.

Considérons une algèbre de lie $\mathfrak{g}$ de base $(x\ x_1\ x_2 \ldots x_n)$ avec

$$[x , x_i] = x_{i+1}$$

$$[x_1 , x_2] = 0$$

$$[x_i , x_j] = c_{ij}\, x_{i+j}$$

Ecrivons les équations de Jacobi relatives à $(x\ x_i\ x_j)$

on a $\big[x , [x_i\ x_j]\big] + \big[x_i , [x_j\ x]\big] + \big[x_j , [x\ x_i]\big] = 0$

c. a. d. $\quad c_{ij} = c_{i+1,j} + c_{i,j+1} \qquad i+j < n$

<u>Lemme 2</u>

Soit $\alpha \in k$ et soit $(x\ x_1 \ldots x_n)$ une base d'un espace vectoriel V. Supposons n impair – alors les formules

$$[x , x_i] = x_{i+1}$$

$$[x_i , x_j] = 0 \qquad \text{si } i+j < n,\ i < j$$

$$[x_i , x_{n-i}] = (-1)^i \alpha\, x_n \qquad i < n-i$$

définissent une algèbre de lie filiforme sur V.

Les images des couples écrits plus hauts forment une base de $\Lambda^2 V$ ($x_i \wedge x_{n-i}$ est non nul pour tout i car n est impair)

Les formules précédentes permettent donc de définir une application bilinéaire alternée de V dans K.

Montrons que les identités de Jacobi sont satisfaites.

Vérifions celles relatives aux triplets $(x\ x_i\ x_j)$

on doit vérifier $C_{ij} = C_{i+1,j} + C_{i,j+1}$ $\quad i+j < n$, $i < j$

c'est-à-dire $C_{i+1,j} + C_{i,j+1} = 0$

ce qui est vérifié.

et les identités relatives aux triplets $(x_i\ x_j\ x_k)_{i<j<k}$

sont automatiquement satisfaites.

Lemme 3

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de lie avec une base $(x\ x_1\ x_2 \quad x_n)$ telle que

$$[x, x_i] = x_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-1$$
$$[x_1, x_2] = 0$$
$$[x_i, x_j] = c_{ij}\ x_{i+j} \qquad i+j \leq n$$

alors il y a un α tel que $\quad c_{i,n-i} = (-1)^i\ \alpha$

et on a $\quad c_{i,j} = 0 \quad$ si $\quad i+j < n$

et si n est pair, on a $\quad \alpha = 0$

Démontrons ce résultat par récurrence -il est vrai pour $n = 1, 2, 3$

Supposons d'abord n impair

n-1 est alors pair on a donc immédiatement le premier résultat $C_{ij} = 0$ si $i+j < n$

d'autre part les équations

$$C_{ij} = C_{i+1,j} + C_{i,j+1} \qquad i+j < n$$

fournissent $C_{i+1,n-i+1} + C_{i,n-i} = 0$

c'est-à-dire $C_{i,n-i} = (-1)^i\ \alpha$

Supposons maintenant n pair, n-1 est impair on a donc

$$c_{i,n-1-i} = (-1)^i \alpha$$

et $c_{i,j} = 0$ si $i+j < n-1$

posons $c_{i,n-i} = \alpha_i$

les équations $c_{i,n-1-i} = c_{i+1,n-i+1} + c_{i,n-i}$

fournissent $(-1)^i \alpha = \alpha_i + \alpha_{i+1}$

ce qui donne $\alpha_i = (-1)^{i+1} (\alpha_1 + (i-1)\alpha)$ $\quad 2 \leq i \leq n-2$

on a $\alpha_{\frac{n}{2}} = 0$ ce qui donne $\alpha_1 = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\alpha$, $\alpha_i = (-1)^{i+1}\left(i-\frac{n}{2}\right)\alpha$

Ecrivons l'identité de Jacobi pour $(x_1, x_{\frac{n}{2}-1}, x_{\frac{n}{2}})$

$$[[X_1, X_{\frac{n}{2}-1}], X_{\frac{n}{2}}] + [[X_{\frac{n}{2}-1}, X_{\frac{n}{2}}], X_1] + [[X_{\frac{n}{2}}, X_1], X_{\frac{n}{2}-1}] = 0$$

le premier terme est nul car $\frac{n}{2} < n-1$ car $n \geq 4$

le troisième de même car $\frac{n}{2}+1 < n-1$ si $n > 4$ et si $n = 4$

on a alors $\frac{n}{2} = 2$ et $[X_1, X_2] = 0$ par hypothèse

donc cette identité donne $(-1)^{\frac{n}{2}} \alpha\, \alpha_1 = 0$

c'est-à-dire finalement $\alpha = 0$ et $\alpha_i = 0$ $\forall i$

En rassemblant les lemmes, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1 :

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie filiforme de dimension n+1 et soit $(x\ x_1\ x_2 \ldots x_n)$ une base adaptée de $\mathfrak{g}$

on a alors

$$[X, X_i] = X_{i+1}$$

$$[X_i, X_j] = c_{ij} X_{i+j} + \sum_{p > i+j} c_{ijp} X_{i+j+p}$$

avec

$$c_{ij} = 0 \text{ si } i+j < n \qquad c_{12} = 0$$

$$c_{i,n-i} = (-1)^i \alpha$$

et si n est pair on a $\alpha = 0$

4 - Remarque sur les algèbres filiformes de dimension n+1

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie filiforme de dimension n+1 et soit $(x\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ une base adaptée de $\mathfrak{g}$

on a $\mathcal{C}^1\mathfrak{g} = k\,x_2 + \cdots + k\,x_n$

$\mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g} = k\,x_{n-2} + \cdots + k\,x_n$

on a donc $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] = k\,\alpha\, x_n$

si n est pair on a $\alpha = 0$ donc si n est pair on a toujours

dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] = 0$

Mais si n est impair, nous pouvons distinguer parmi les algèbres de lie filiformes de dimension n+1

l'ensemble des algèbres de lie filiformes telles que

dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] = 1$

et l'ensemble des algèbres de lie filiformes telles que

dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] = 0$

Ces deux ensembles sont non vides, car si n est impair l'algèbre définie par $[x, x_i] = x_{i+1}$, $[x_1, x_{n-i}] = (-1)^i \alpha\, x_n$ est pour tout $\alpha \neq 0$

une algèbre de lie filiforme telle que

dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] = 1$

tandis que l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ (paragraphe 1) est telle que

dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}_0, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}_0] = 0$

Considérons alors l'ensemble $U_{n+1}^{\dagger} \subset U_{n+1}$ des algèbres de lie filiformes de dimension n+1 telles que dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] = 1$

<u>Cet ensemble est ouvert</u>. En effet, il existe des polynômes

p_i^j $\quad 0 \leq j \leq n$ en n^3 variables tels que l'espace vectoriel $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}]$ soit engendré par les

$y_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^j(c_{ijk})\, x_i$ où $(x_0\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$

Donc d'après le paragraphe 4, chapitre 2, l'ensemble des dans U_n tels que

dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}]$ soit maximum est un ouvert de U_n.

Or sur U_n dim $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}] \leq 1$

donc l'ensemble U^f_{n+1} est ouvert. Si n est pair, il est vide et si n est impair il est non vide.

Proposition 1 :

L'ensemble des algèbres filiformes de dimension n+1 qui sont quotients d'une algèbre de lie filiforme de dimension n+2 est non vide et est inclus dans le complémentaire de V^t_{n+1}

Démonstration :

Cet ensemble est non vide puisque U_{n+2} est non vide et la deuxième partie de la proposition est triviale si n est pair si n est impair, soit $\mathfrak{g}_{n+2} \in U_{n+2}$ et $\mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2}$ le centre de $\mathfrak{g}_{n+2}$

on a $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}_{n+2}/\mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2}) = \mathcal{C}^i\mathfrak{g}_{n+2}/\mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2}$

$[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}_{n+2}, \mathcal{C}^{n-3}\mathfrak{g}_{n+2}] \subset \mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2}$

donc on a $[\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}_{n+2}/\mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2}), \mathcal{C}^{n-3}(\mathfrak{g}_{n+2}/\mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2})] = 0$

et $\mathfrak{g}_{n+2}/\mathcal{C}_1\mathfrak{g}_{n+2}$ est dans le complémentaire de V^t_{n+1}

Donc si n est impair, aucune algèbre de $\mathcal{V}_{n+1}^{+}$ ne provient par passage au quotient d'une algèbre de lie filiforme de dimension n+2.

5 - Classification des algèbres de lie filiformes de dimension n+1.

Soit $(x\ x_1\ x_2 \ldots\ x_n)$ la base canonique de K^{n+1}, et soit A_{n+1} l'ensemble des algèbres de lie filiformes pour lesquelles la base canonique est une base adaptée. Nous savons que toute algèbre de lie filiforme admet une base adaptée, on aura donc

$$GL\ K^{n+1} \ast A_{n+1} = U_{n+1}$$

Nous allons donc chercher à déterminer l'ensemble A_{n+1} des algèbres de lie filiformes avec la base canonique comme base adaptée (nous le ferons pour $n \leqslant 6$)

D'autre part, nous chercherons à déterminer les types d'algèbres filiformes à isomorphisme près.
Il n'y eu a qu'un nombre fini de types d'algèbres filiformes non isomorphes de dimension inférieure ou égale à 6.
Types qu'on énumérera.

A) Classification des algèbres de lie filiformes de dimension n+1 pour n $\leqslant 6$

A_1 la seule algèbre de A_1 est l'algèbre $[x,x] = 0$

A_2 la seule algèbre de A_2 est l'algèbre $[x\ x_1] = 0$

A_3 la seule algèbre de A_3 est l'algèbre $[x\ x_1] = x_2$

A_4 la seule algèbre de A_4 est l'a gèbre

$$[x\ x_1] = x_2$$
$$[x\ x_2] = x_3$$
$$[x_1 x_2] = 0$$

A_5 Si $(x\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ est une base adaptée d'une algèbre de lie filiforme, on a

$$[x\ \ x_1] = x_2$$
$$[x\ \ x_2] = x_3$$
$$[x\ \ x_3] = x_4$$
$$[x_1\ x_2] = a_{12}\ x_4$$
$$[x_1\ x_3] = 0$$
$$[x_2\ x_3] = 0$$

les identités de Jacobi sont satisfaites.

On a donc une représentation rationelle de A_5

D'autre part, toutes les algèbres obtenues pour $a_{12} \neq 0$ sont isomorphes, ce qu'on voit en effectuant le changement de base $x' = x$

$$x_i' = \frac{x_i}{a_{12}}$$

On a donc 2 algèbres de lie filiformes de dimension 5 non isomorphes

$\mathfrak{g}_5^5$	$[x \quad x_1] = x_2$ $[x \quad x_2] = x_3$ $[x \quad x_3] = x_4$	dim $\mathcal{A}nn\ \mathcal{C}_3\mathfrak{g} = 4$
$\mathfrak{g}_5^6$	$[x \quad x_1] = x_2$ $[x \quad x_2] = x_3$ $[x \quad x_3] = x_4$ $[x_1 \quad x_2] = x_4$	dim $\mathcal{A}nn\ \mathcal{C}_3\mathfrak{g} = 3$

A_6 Soit $(x\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ une base adaptée de $\mathcal{G}$ on a alors

$$[x\ \ x_1] = x_2$$
$$[x\ \ x_2] = x_3$$
$$[x\ \ x_3] = x_4$$
$$[x\ \ x_4] = x_5$$
$$[x_1\ \ x_2] = \beta x_4 + \gamma x_5$$
$$[x_1\ \ x_3] = \delta x_5$$
$$[x_1\ \ x_4] = -\alpha x_5$$
$$[x_2\ \ x_3] = \alpha x_5$$

Les identités de Jacobi donnent comme seule condition $\delta = \beta$

On obtient donc la représentation rationelle suivante de A_6

A_6

$$\boxed{\begin{aligned}
[x\ \ x_1] &= x_2\\
[x\ \ x_2] &= x_3\\
[x\ \ x_3] &= x_4\\
[x\ \ x_4] &= x_5\\
[x_1\ \ x_2] &= \beta x_4 + \gamma x_5\\
[x_1\ \ x_3] &= \beta x_5\\
[x_1\ \ x_4] &= -\alpha x_5\\
[x_2\ \ x_3] &= \alpha x_5
\end{aligned}}$$

Montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini d'algèbres filiformes de dimension 6 non isomorphes.

<u>1 - Montrons que toutes les algèbres obtenues pour $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ sont isomorphes à l'algèbre pour $\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 0$</u>

$\mathcal{U}_6^{10}$ définie par

$$
\begin{aligned}
[x \quad x_1] &= x_2 \\
[x \quad x_2] &= x_3 \\
[x \quad x_4] &= x_5 \\
[x_1 \quad x_2] &= x_4 \\
[x_1 \quad x_3] &= x_5 \\
[x_1 \quad x_4] &= x_5 \\
[x_2 \quad x_3] &= -x_5
\end{aligned}
$$

<u>Remarque</u> :

Si l'on fait le changement de base

$$
\begin{aligned}
x' &= x - x_1 \\
x'_1 &= x_1 - x_2 \\
x'_2 &= x_2 - x_3 + x_4 \\
x'_3 &= x_3 - 2x_4 + x_5 \\
x'_4 &= x_4 - x_5 \\
x'_5 &= x_5
\end{aligned}
$$

On peut écrire $\mathcal{U}_6^{10}$ sous la forme

$$
\begin{aligned}
[x \quad x_1] &= x_2 \\
[x \quad x_2] &= x_3 \\
[x \quad x_3] &= x_4 \\
[x \quad x_4] &= 0 \\
[x_1 \quad x_2] &= x_4 \\
[x_1 \quad x_3] &= 0 \\
[x_1 \quad x_4] &= x_5 \\
[x_2 \quad x_3] &= -x_5
\end{aligned}
$$

Soit une algèbre de A_6 avec $\alpha \neq 0 \quad \beta \neq 0$

On peut supposer $\alpha = -1$ en faisant le changement de variables

$$x' = x$$
$$x'_1 = -\frac{x_1}{\alpha}$$
$$x'_2 = -\frac{x_2}{\alpha}$$
$$x'_3 = -\frac{x_3}{\alpha}$$
$$x'_4 = -\frac{x_4}{\alpha}$$
$$x'_5 = -\frac{x_5}{\alpha}$$

On peut ensuite supposer que $\beta = 1$ en effectuant le changement de variables

$$x' = \beta x$$
$$x'_1 = \beta x_1$$
$$x'_2 = \beta^2 x_2$$
$$x'_3 = \beta^3 x_3$$
$$x'_4 = \beta^4 x_4$$
$$x'_5 = \beta^5 x_5$$

On obtient donc une algèbre définie par :

$$[x \quad x_1] = x_2$$
$$[x \quad x_2] = x_3$$
$$[x \quad x_3] = x_4$$
$$[x \quad x_4] = x_5$$
$$[x_1 \quad x_2] = x_4 + \gamma x_5$$
$$[x_1 \quad x_3] = x_5$$
$$[x_1 \quad x_4] = x_5$$
$$[x_2 \quad x_3] = -x_5$$

On va ramener cette algèbre à la deuxième forme donnée pour $\mathcal{G}_6^{20}$

On effectue le changement de variables

$$
\begin{aligned}
x' &= x - x_1 \\
x'_1 &= x_1 \\
x'_2 &= x_2 \\
x'_3 &= x_3 - x_4 - \gamma x_5 \\
x'_4 &= x_4 - x_5 \\
x'_5 &= x_5
\end{aligned}
$$

On obtient alors l'algèbre :

$$
\begin{aligned}
[x \;\; x_1] &= x_2 \\
[x \;\; x_2] &= x_3 \\
[x \;\; x_3] &= x_4 \\
[x \;\; x_4] &= 0 \\
[x_1 \;\; x_2] &= x_4 + (1+\gamma) x_5 \\
[x_1 \;\; x_3] &= 0 \\
[x_1 \;\; x_4] &= x_5 \\
[x_2 \;\; x_3] &= - x_5
\end{aligned}
$$

Si $1+\gamma = 0$ on obtient l'algèbre $\mathcal{G}_6^{20}$ sous sa deuxième forme

Si $1+\gamma \neq 0$ comme K est algébriquement clos, il existe $r \in K$ $r \neq 0$ tel que $r^2 = 1+\gamma$

Effectuons alors le changement de variable suivant :

$$
\begin{aligned}
x' &= r\, x_1 \\
x'_1 &= r^2 x_1 - r^3 x_2 \\
x'_2 &= r^3 x_2 - r^4 x_3 \\
x'_3 &= r^4 x_3 - r^5 x_4 \\
x'_4 &= r^5 x_4 \\
x'_5 &= r^7 x_5
\end{aligned}
$$

on obtient alors $\mathcal{G}_6^{20}$ sous sa deuxième forme

On peut voir qu'il y a 5 types d'algèbres filiformes de dimension 6 non isomorphes.

Elles sont définies par :

1) $\mathfrak{g}/\mathcal{C}_1\mathfrak{g}$ isomorphes à $\mathfrak{g}_5^5$

$\mathfrak{g}_6^{16}$	$[x\ \ x_1] = x_2$ $[x\ \ x_2] = x_3$ $[x\ \ x_3] = x_4$ $[x\ \ x_4] = x_5$	$\dim \mathcal{D}^2\mathfrak{g} = 0$ $\dim \mathcal{A}nn\, \mathcal{C}_4\mathfrak{g} = 5$
$\mathfrak{g}_6^{17}$	$[x\ \ x_1] = x_2$ $[x\ \ x_2] = x_3$ $[x\ \ x_3] = x_4$ $[x\ \ x_4] = x_5$ $[x_1\ \ x_2] = x_5$	$\dim \mathcal{D}^2\mathfrak{g} = 0$ $\dim \mathcal{A}nn\, \mathcal{C}_4\mathfrak{g} = 4$
$\mathfrak{g}_6^{18}$	$[x\ \ x_1] = x_2$ $[x\ \ x_2] = x_3$ $[x\ \ x_3] = x_4$ $[x\ \ x_4] = 0$ $[x_1\ \ x_4] = x_5$ $[x_2\ \ x_3] = -x_5$	$\dim \mathcal{D}^2\mathfrak{g} = 1$

2) $\mathcal{G}/\mathcal{C}_1\mathcal{G}$ isomorphes à $\mathcal{G}_5^6$

$\mathcal{G}_6^{19}$	$x \quad x_1 = x_2$ $x \quad x_2 = x_3$ $x \quad x_3 = x_4$ $x \quad x_4 = x_5$ $x_1 \quad x_2 = x_4$ $x_1 \quad x_3 = x_5$	$\dim D^2\mathcal{G} = 0$
$\mathcal{G}_6^{20}$	$x \quad x_1 = x_2$ $x \quad x_2 = x_3$ $x \quad x_3 = x_4$ $x \quad x_4 = x_5$ $x_1 \quad x_2 = x_4$ $x_1 \quad x_3 = x_5$ $x_1 \quad x_4 = + x_5$ $x_2 \quad x_3 = - x_5$	$\dim D^2\mathcal{G} = 1$

On a

$$U_6 \subset \overline{\Diamond \; (\mathcal{G}_6^{20})}$$

$\underline{A_7}$ Soit $(x\ x_1\ x_2\ \dots\ x_6)$ une base adaptée de $\mathfrak{g}$

On a :
$$\begin{aligned}
[x \quad x_1] &= x_2\\
[x \quad x_2] &= x_3\\
[x \quad x_3] &= x_4\\
[x \quad x_4] &= x_5\\
[x \quad x_5] &= x_6\\
[x_1 \quad x_2] &= a_{124} X_4 + a_{125} X_5 + a_{126} X_6\\
[x_1 \quad x_3] &= a_{135} X_5 + a_{136} X_6\\
[x_1 \quad x_4] &= a_{146} X_6\\
[x_1 \quad x_5] &= 0\\
[x_2 \quad x_3] &= a_{236} X_6
\end{aligned}$$

Les équations de Jacobi imposent
$$\begin{aligned}
a_{124} &= a_{135}\\
a_{125} &= a_{136}\\
a_{146} &= a_{124} - a_{236}
\end{aligned}$$

On obtient donc la représentation rationelle suivante de A_7

$$A_7 \qquad \boxed{\begin{aligned}
[x \quad x_1] &= x_2\\
[x \quad x_2] &= x_3\\
[x \quad x_4] &= x_4\\
[x \quad x_5] &= x_6\\
[x_1 \quad x_2] &= \beta X_4 + \gamma X_5 + \delta X_6\\
[x_1 \quad x_3] &= \beta X_5 + \gamma X_6\\
[x_1 \quad x_4] &= (\beta - \mu) X_6\\
[x_1 \quad x_5] &= 0\\
[x2 \quad x_3] &= \mu X_6\\
[x_2 \quad x_4] &= 0
\end{aligned}}$$

<u>Montrons qu'il y a une infinité d'algèbres non isomorphes en dimension 7.</u>

Soient $\mathcal{G}(\beta,\gamma,\delta,\mu)$ et $\mathcal{G}'(\beta',\gamma',\delta',\mu')$, 2 algèbres de A_7.

Cherchons une condition nécessaire pour qu'elles soient isomorphes.

On a $\mathcal{C}^i\mathcal{G} = \mathcal{C}^i\mathcal{G}' = K\,X_{i+1} + \cdots + K\,X_n$

$\mathcal{A}nn\ \mathcal{C}_2\mathcal{G} = \mathcal{A}nn\ \mathcal{C}_2\mathcal{G}' = K\,X_1 + \cdots + K\,X_n$

On voit que si $\varphi \in GL(K^7)$ est tel que $\mathcal{G}' = \varphi * \mathcal{G}$

φ doit avoir une matrice triangulaire par rapport à la base $(x\ x_1 \ldots x_6)$

On pose
$$\varphi(X) = a_0^0\,X + \cdots$$
$$\varphi(X_1) = a_1^1\,X_1 + \cdots$$
$$\varphi(X_2) = a_2^2\,X_2 + \cdots$$
$$\vdots$$
$$\varphi(X_6) = a_6^6\,X_6 .$$

On doit avoir $a_0^0\,a_i^i = a_{i+1}^{i+1} \quad i \geq 1$

$$[\varphi(X_1), \varphi(X_2)]_{\mathcal{G}} = \frac{a_1^1\,a_2^2}{a_4^4}\,\beta\,\varphi(X_4)$$

$$[\varphi(X_1), \varphi(X_4)]_{\mathcal{G}} = \frac{a_1^1\,a_4^4}{a_6^6}\,(\beta-\mu)\,\varphi(X_6)$$

or
$$\frac{a_1^1\,a_2^2}{a_4^4} = \frac{a_1^1\,a_4^4}{a_6^6} = \frac{a_1^1}{(a_0^0)^2}$$

On voit donc qu'une condition nécessaire pour que $\mathcal{G}(\beta,\gamma,\delta,\mu)$ soit isomorphe à $\mathcal{G}'(\beta',\gamma',\delta',\mu')$ c'est qu'il existe λ appartenant à K $\lambda \neq 0$

tel que
$$\beta' = \lambda\beta$$
$$(\beta'-\mu') = \lambda(\beta-\mu)$$

Le corps K ayant une infinité d'éléments, le quotient $\frac{\beta-\mu}{\beta}$ peut prendre une infinité de valeurs différentes, donc il y a une infinité d'algèbres filiformes non isomorphes en dimension 7.

CHAPITRE IV. -

CLASSIFICATION COMPLETE des ALGEBRES de Lie de dimension $\leqslant 6$.-

On va montrer dans ce chapitre qu'il n'existe qu'un nombre fini d'algébres nilpotentes non isomorphes de dimension inférieure ou égale à 6 algébres qu'on énumérera.

On montrera que N_n est irréductible pour $n \leqslant 6$.

Méthode de classification

soit à déterminer les algébres de N_n

On note $N_n^{i_1\, i_2 \ldots i_p}$ l'ensemble des algébres de Lie nilpotentes de dimension n telle que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} &= i_1 \qquad i_1 > 0 \\ \dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} &= i_2 \\ \dim \mathcal{C}_p \mathcal{G} &= i_p \end{aligned}$$

Toute algébre de Lie $\mathcal{G}_n$ de $N_n^{i_1\, i_2 \ldots i_p}$.

s'obtient par extension centrale d'une algébre $\mathcal{G}_{n-i_1}$ de $N_n^{i_2 - i_1 \ldots i_p - i_1}$ par K^{i_1}

Réciproquement soit une algébre $\mathcal{G}_p$ de $N_p^{j_1 \ldots j_k}$ définie par $[x_i, x_j]_{\mathcal{G}_p} = \sum c_{ijk}\, x_k$ $i, j, k \leqslant p$

Une extension centrale $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_p$ par K^{n-p} sera définie par

$$[x_i, x_j]_{\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^{p} c_{ijk}\, X_k + \sum_{q=p+1}^{n} a_{ijq}\, x_q \qquad i, j \leqslant p$$

$$[x_q, x_i]_{\mathcal{G}} = 0 \qquad \text{si } q \geqslant p$$

Les identités de Jacobi imposent aux a_{ijq} de vérifier certaines équations linéaires dont les coefficients sont linéaires par rapport aux c_{ijk} $(i\, j\, k \leqslant p)$

L'algébre de Lie obtenue alors sera une algébre de Lie nilpo~~x~~tente puisqu'elle sera extension centrale d'une algébre de Lie nilpotente; Cherchons à quelle condition cette algébre $\mathfrak{g}_n$ appartient à

$N_n^{n-p,\ j_1+n-p \ \cdots\ j_k+n-p}$

$\mathfrak{g}_n$ appartiendra à cet ensemble si et seulement si son centre est de dimension égale à $n - p$

ce qui s'exprime par $K x_1 + \ldots\ldots + K x_p \cap \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}_n = \{0\}$

ou encore $\mathcal{C}_1 \mathfrak{g}_p \cap \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}_n = \{0\}$

Ceci conduira donc à écrire pour une base de $\mathcal{C}_1 \mathfrak{g}_p$ certaines inéquations.

- On utilisera aussi le résultat que pour toute algébre de Lie il existe ~~aussi~~ une base $x_1 \ldots\ldots x_n$, telle que la matrice de $a\, d\, x$ par rapport à cette base soit strictement triangulaire.

DIMENSION 1.-

La seule algébre de Lie de dimension 1 est l'algébre abélienne;
Nous la noterons $\mathfrak{g}_1$

DIMENSION .2 .-

La seule algébre de Lie nilpotente de dimension 2 est l'algébre abélienne $(\mathfrak{g}_1)^2$

DIMENSION 3.-

.. dim $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 1$
on obtient l'algébre $\mathfrak{g}_3$

$$[x_1 , x_2] = x_3$$

.. dim $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 3$
on obtient l'algébre abélienne $(\mathfrak{g}_1)^3$

On voit que $N_3 = \overline{\Diamond(\mathfrak{g}_3)}$

DIMENSION 4.-

.. dim $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 1$

$$\boxed{\mathfrak{g}_4^1 \quad \begin{array}{l} [x_1 \ x_2] = x_3 \\ [x_1 \ x_3] = x_4 \end{array}}$$

.. dim $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 2$

$$\boxed{\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_1 \quad [x_1 \ x_2] = x_3}$$

.. dim $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 4$ $\quad \mathfrak{g}_1^{\,4}$

On voit que $N_4 = \overline{\Diamond(\mathfrak{g}_4)}$

DIMENSION 5

N_5^{1235} = ouvert des algébres filiformes = U_5

dim $\mathcal{C}_1 \mathfrak{g} = 1$ dim $\mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = 2$
dim $\mathcal{C}_3 \mathfrak{g} = 3$, dim $\mathcal{C}_4 \mathfrak{g} = 5$

On a déterminé dans le chapitre précédent les algébres de Lie filiformes de dimension 5

Rappelons :

$\mathfrak{g}_5^5$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$	dim $\mathrm{Ann}\, \mathcal{C}_3 \mathfrak{g} = 4$
$\mathfrak{g}_5^6$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_5$	dim $\mathrm{Ann}\, \mathcal{C}_3 \mathfrak{g} = 3$

On voit que $\mathfrak{g}_5^5 \in \overline{\mathcal{O}(\mathfrak{g}_5^6)}$

ooooooooooooooooooooooo

N_5^{135} = $\{ \mathfrak{g}$ de N_5 telles que dim. $\mathcal{C}_1 \mathfrak{g} = 1$ dim $\mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = 3$ dim $\mathcal{C}_3 \mathfrak{g} =$

elles s'obtiennent par extension de l'algébre $\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_1$

On obtient l'algébre

$\mathfrak{g}_5^3$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_5$

Montrons que $N^{135}_{.5} \subset \overline{U_5}$

On voit que $\mathcal{G}^3_5$ appartient à $\overline{\diamond(\mathcal{G}^6_5)}$
en effectuant le changement de base

$$\begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= \varepsilon x_3 \\ x'_4 &= x_4 \\ x'_5 &= \varepsilon x_5 \end{aligned}$$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}^6_5)$

$$\begin{aligned} [x_1\ x_2] &= x_3 \\ [x_1\ x_3] &= \varepsilon^2 x_4 \\ [x_1\ x_4] &= x_5 \\ [x_2\ x_3] &= x_5 \end{aligned}$$

oooooooooooooooooooooo

$$\boxed{N^{15}_{.5} = \{\mathcal{G} \text{ telles que } \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 1 \quad \dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 5}$$

Elles s'obtiennent par extension de l'algébre $(\mathcal{G}_1)^4$

On obtient l'algébre

$$\boxed{\mathcal{G}^1_5 \qquad \begin{aligned} [x_1\ x_2] &= x_5 \\ [x_3\ x_4] &= x_5 \end{aligned}}$$

Montrons que $N^{15}_{.5} \subset \overline{U_5}$

On voit que $\mathcal{G}^1_5$ appartient à $\overline{\diamond(\mathcal{G}^6_5)}$
en effectuant le changement de base

$$\begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon^2 x_1 \\ x'_2 &= \varepsilon x_2 + x_4 \\ x'_3 &= \varepsilon x_1 + x_3 \\ x'_4 &= \varepsilon x_4 \\ x'_5 &= \varepsilon^2 x_5 \end{aligned}$$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}^6_5)$

$$\begin{aligned} [x_1\ x_2] &= \varepsilon^3 x_3 - \varepsilon^2 x_1 + x_5 \\ [x_1\ x_3] &= \varepsilon x_4 \\ [x_1\ x_4] &= \varepsilon x_5 \\ [x_2\ x_3] &= -\varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_1 \\ [x_2\ x_4] &= 0 \\ [x_3\ x_4] &= x_5 \end{aligned}$$

ooooooooooo

$N_5^{235} = \{ \mathcal{G}$ telles que	$\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 2,$	$\dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 3$	$\dim \mathcal{C}_3 \mathcal{G} = 5$

Elles s'obtiennent par extension de l'algébre

On obtient les algébres

$\mathcal{G}_4^1 \times \mathcal{G}_1$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$	$\dim D\mathcal{G} = 2$
$\mathcal{G}_5^4$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_2\ x_3] = x_5$	$\dim D\mathcal{G} = 3$

Montrons que $N_5^{235} \subset \overline{U_5}$

On voit que $\mathcal{G}_4^1 \times \mathcal{G}_1 \in \overline{\diamond(\mathcal{G}_5^4)}$

D'autre part on voit que $\mathcal{G}_5^4 \in \overline{\diamond(\mathcal{G}_5^6)}$

en effectuant le changement de base

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \varepsilon x_1 \\
x'_2 &= x_2 \\
x'_3 &= \varepsilon x_3 \\
x'_4 &= \varepsilon^2 x_4 \\
x'_5 &= \varepsilon x_5
\end{aligned}
$$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_5^6)$

$$
\begin{aligned}
[x_1\ x_2] &= x_3 \\
[x_1\ x_3] &= x_4 \\
[x_1\ x_4] &= \varepsilon^2 x_5 \\
[x_2\ x_3] &= x_5
\end{aligned}
$$

oooooooooooooooooooo

$N_5^{25} = \{ \mathcal{G}$ telles que	$\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 2$	$\dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 5$

Elles s'obtiennent par extension de l'algébre abélienne de dimension 3.

On obtient l'algébre

$\mathcal{G}_5^2$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_3] = x_5$

Montrons que $N_5^{25} \subset \overline{U_5}$

On voit que $\mathcal{G}_5^2 \in \overline{\diamond\ (\mathcal{G}_5^6)}$

en effectuant le changement de base

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= -\varepsilon\, x_3 \\
x'_2 &= \varepsilon\, x_1 \\
x'_3 &= \varepsilon\, x_2 \\
x'_4 &= \varepsilon^2\, x_4 \\
x'_5 &= \varepsilon^2\, x_5
\end{aligned}
$$

On obtient le point suivant de

$$
\begin{aligned}
[x_1\ x_2] &= x_4 \\
[x_1\ x_3] &= x_5 \\
[x_1\ x_4] &= 0 \\
[x_1\ x_5] &= 0 \\
[x_2\ x_3] &= -\varepsilon\, x_1 \\
[x_2\ x_4] &= \varepsilon \cdot x_5
\end{aligned}
$$

ooooooooooooooooooooooo

$$\boxed{N_5^{35} = \{\ \mathcal{G} \text{ telles que } \dim \mathcal{C}_1\mathcal{G} = 3 \quad \dim \mathcal{C}_2\mathcal{G} = 5\ \}}$$

On obtient l'algèbre

$$\boxed{\mathcal{G}_3 \times (\mathcal{G}_1)^2 \qquad [x_1\ x_2] = x_3}$$

On voit que $N_5^{35} \subset \overline{U_5}$

oooooooooooooooooo

$$\boxed{N_5^{5} = \{\ \mathcal{G} \text{ telle que } \dim \mathcal{C}_1\mathcal{G} = 5}$$

algèbre abélienne $\underline{(\mathcal{G}_1)^5}$

oooooooooooooooooooo

ON VOIT DONC que $N_5 = \overline{\diamond\ (\mathcal{G}_5^6)}$

/ N_5 est donc irréductible. /

DIMENSION 6

$$\boxed{N_6^{12346} = \{ \mathfrak{g} \text{ tels que } \dim \mathcal{C}_1 \mathfrak{g} = 1, \dim \mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = 2, \dim \mathcal{C}_3 \mathfrak{g} = 3, \dim \mathcal{C}_4 \mathfrak{g} = 4, \dim \mathcal{C}_5 \mathfrak{g} = 6 \}}$$

$= U_6$ ouvert des algébres filiformes.

On a déterminé dans le chapitre précédent une représentation rationnelle de l'ouvert U_6

Enumérons les algébres non isomorphes de U_6

... Extension de $\mathfrak{g}_5^5 = \{ \mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{g} / \mathcal{C}_1 \mathfrak{g}$ soient isomorphes à $\mathfrak{g}_5^5$

On obtient

$\mathfrak{g}_6^{16}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_1\ x_5] = x_6$	$\dim \mathcal{D}^2\mathfrak{g} = 0$ $\dim \mathcal{A}nn\ \mathcal{C}_4\mathfrak{g} = 5$
$\mathfrak{g}_6^{14}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_1\ x_5] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$\dim \mathcal{D}^2\mathfrak{g} = 0$ $\dim \mathcal{A}nn\ \mathcal{C}_4\mathfrak{g} = 4$
$\mathfrak{g}_6^{18}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_1\ x_5] = 0$ $[x_2\ x_5] = x_5$ $[x_3\ x_4] = -x_6$.	$\dim \mathcal{D}^2\mathfrak{g} = 1$

... Extensions de $\mathcal{G}_5^6 = \{\mathcal{G}$ telles que $\mathcal{G} / \mathcal{C}_1\mathcal{G}$ soit isomorphe à $\mathcal{G}_5^6$

On obtient

$\mathcal{G}_6^{19}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_1\ x_5] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_5$ $[x_2\ x_4] = x_6$	dim $\mathcal{D}^2\mathcal{G} = 0$
$\mathcal{G}_6^{20}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_5$ $[x_2\ x_5] = x_6$ $[x_3\ x_4] = -x_6$	dim $\mathcal{D}^2\mathcal{G} = 1$

On a montré dans le chapitre précédent que $U_6 \subset \diamond(\mathcal{G}_6^{20})$

Rappelons que A_6 admet la représentation rationnelle suivante $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$
Chapitre 3

$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_2\ x_3] = \beta x_5 + \gamma x_6$
$[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_2\ x_4] = \beta x_6$
$[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_5] = \alpha x_6$
$[x_1\ x_5] = x_6$ $[x_3\ x_4] = -\alpha x_6$

oooooo o

$N_6^{246} = \{ \mathcal{G}$ telles que dim $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 1$, dim $\mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 2$
dim $\mathcal{C}_3 \mathcal{G} = 4$, dim $\mathcal{C}_4 \mathcal{G} = 6$

Elles s'obtiennent par extension de l'algébre $\mathcal{G}_5^3$

On obtient l'algébre

$$\mathcal{G}_6^{13} \quad \begin{array}{l} [x_1 \ x_2] = x_4 \\ [x_1 \ x_4] = x_5 \\ [x_1 \ x_5] = x_6 \\ [x_2 \ x_3] = x_5 \\ [x_3 \ x_4] = -x_6 \end{array}$$

Montrons que $N_6^{1246} \subset \overline{U_6}$,on voit que $\mathcal{G}_6^{13} \in \overline{U_6}$.

en effectuant le changement de base suivant

$$\begin{array}{l} x'_1 = \frac{1}{\varepsilon^3} x_2 \\ x'_2 = \frac{1}{\varepsilon} x_1 \\ x'_3 = \frac{-1}{\varepsilon^6} x_4 \\ x'_4 = \frac{-1}{\varepsilon^4} x_3 \\ x'_5 = \frac{-1}{\varepsilon^4} x_5 \\ x'_6 = \frac{-1}{\varepsilon^{10}} x_6 \end{array}$$

on obtient le point suivant de

$$\begin{array}{l} [x_1 \ x_2] = x_4 \\ [x_1 \ x_3] = \varepsilon \, x_6 \\ [x_1 \ x_4] = x_5 \\ [x_1 \ x_5] = x_6 \\ [x_2 \ x_3] = x_5 \\ [x_2 \ x_4] = \varepsilon \, x_3 \\ [x_2 \ x_5] = \varepsilon^2 x_6 \\ [x_3 \ x_4] = - x_6 \end{array}$$

ooooooooooooooo

$N_6^{1346} = \{ \mathcal{G}$ telles que dim $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 1$, dim $\mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 3$
dim $\mathcal{C}_3 \mathcal{G} = 4$ dim $\mathcal{C}_4 \mathcal{G} = 6$

Elles s'obtiennent par extension de $\mathcal{G}_4^1 \times \mathcal{G}_1$
et $\mathcal{G}_5^4$

... Extensions de $\mathfrak{g}_4^1 \times \mathfrak{g}_1$ = $\{ \mathfrak{g}$ telles que $\frac{\mathfrak{g}}{\mathcal{C}_1\mathfrak{g}}$ soit isomorphe à $\mathfrak{g}_4^1 \times \mathfrak{g}_1 \}$

On obtient :

$\mathfrak{g}_6^{11}$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_1\ x_5] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$\dim \mathcal{A}m\ \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = 5$
$\mathfrak{g}_6^{12}$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_1\ x_5] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_6$ $[x_2\ x_4] = x_6$	$\dim \mathcal{A}m\ \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = 4$

... Extensions de $\mathfrak{g}_5^4$ = $\{ \mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{g} / \mathcal{C}_1\mathfrak{g}$ soit isomorphe à $\mathfrak{g}_5^4$

On obtient :

$\mathfrak{g}_6^{15}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_5] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_5$ $[x_2\ x_4] = x_6$

Montrons que $N_6^{1346} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathfrak{g}_6^{11} \in \overline{\Diamond(\mathfrak{g}_6^{12})}$

On voit que $\mathcal{G}_6^{12} \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$x'_1 = \varepsilon x_1$	On obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{101})$	$[x_1 \; x_2] = x_4$
$x'_2 = x_2$		$[x_1 \; x_3] = \varepsilon x_6$
$x'_3 = \varepsilon x_5 - \frac{1}{\varepsilon} x_6$		$[x_1 \; x_4] = x_5$
$x'_4 = \varepsilon x_3$	$\beta = 0$	$[x_1 \; x_5] = \varepsilon^2 x_3 + x_6$
$x'_5 = \varepsilon^2 x_4$	$\gamma = 1$	$[x_2 \; x_3] = x_6$
$x'_6 = \varepsilon x_6$	$\alpha = 1$	$[x_2 \; x_4] = x_6$
		$[x_2 \; x_5] = 0$
		$[x_3 \; x_4] = 0$
		$[x_3 \; x_5] = 0$
		$[x_4 \; x_5] = -\varepsilon^2 x_6$

On voit que $\mathcal{G}_6^{15} \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$x'_1 = \varepsilon x_1$	on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{010})$	$[x_1 \; x_2] = x_3$
$x'_2 = x_2$		$[x_1 \; x_3] = x_4$
$x'_3 = \varepsilon x_3$		$[x_1 \; x_4] = \varepsilon^2 x_5$
$x'_4 = \varepsilon^2 x_4$	$\beta = 1$	$[x_1 \; x_5] = x_6$
$x'_5 = \varepsilon x_5$	$\gamma = 0$	$[x_2 \; x_3] = x_5$
$x'_6 = \varepsilon^2 x_6$	$\alpha = 0$	$[x_2 \; x_4] = x_6$

oooooooooooooooooooooo

$$N_6^{136} = \{ \mathfrak{g} \text{ tels que } \dim \mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 1 \quad \dim \mathcal{C}_2\mathfrak{g} = 3 \quad \dim \mathcal{C}_3\mathfrak{g} = 6 \}.$$

Elles s'obtiennent par extension de $\mathfrak{g}_5^2$

On obtient les algèbres :

$\mathfrak{g}_6^9$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_3] = x_5$ $[x_2\ x_5] = x_6$ $[x_3\ x_4] = x_6$	$\dim \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}\,;\mathcal{C}_1\mathfrak{g}) = 4$
$\mathfrak{g}_6^{10}$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_3] = x_5$ $[x_1\ x_4] = x_6$ $[x_3\ x_5] = x_6$	$\dim \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}, \mathcal{C}_1\mathfrak{g}) = 5$

Montrons que $N_6^{136} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathfrak{g}_6^9$ appartient à $\overline{U_6}$
en effectuant le changement de base :

$$x'_1 = x_3$$
$$x'_2 = \varepsilon x_1$$
$$x'_3 = \varepsilon (x_2 - x_3)$$
$$x'_4 = -\varepsilon x_4$$
$$x'_5 = -\varepsilon x_5$$
$$x'_6 = -\varepsilon^2 x_6$$

On obtient le point suivant de $\Diamond(\mathfrak{g}_0, \circ)$

$\beta = 1$
$\gamma = 0$
$\alpha = 0$

$$[x_1\ x_2] = x_4$$
$$[x_1\ x_3] = x_5$$
$$[x_1\ x_4] = 0$$
$$[x_1\ x_5] = 0$$
$$[x_2\ x_3] = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_4$$
$$[x_2\ x_4] = \varepsilon x_5$$
$$[x_2\ x_5] = x_6$$
$$[x_3\ x_4] = x_6$$
$$[x_3\ x_5] = 0$$

On voit que $\mathcal{G}_6^{10} \quad \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \varepsilon^2 (x_2 - x_3) \\
x'_2 &= -\varepsilon^4 \; x_3 \\
x'_3 &= \varepsilon^3 \; x_1 \\
x'_5 &= \varepsilon^5 \; x_4 \\
x'_6 &= \varepsilon^8 \; x_6 \\
X'_4 &= -\varepsilon^6 (X_5 - X_6)
\end{aligned}$$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{-1,1,-1})$

$\beta = 1$
$\gamma = -1$
$\alpha = -1$

$$\begin{aligned}
[x_1 \; x_2] &= x_4 \\
[x_1 \; x_3] &= x_5 + \varepsilon \; x_2 \\
[x_1 \; x_4] &= x_6 \\
[x_1 \; x_5] &= 0 \\
[x_2 \; x_3] &= \varepsilon^2 \; x_5 \\
[x_2 \; x_4] &= 0 \\
[x_2 \; x_4] &= -\varepsilon \; x_6 \\
[x_3 \; x_4] &= -\varepsilon \; x_6 \\
[x_3 \; x_5] &= x_6 - \varepsilon^2 x_4
\end{aligned}$$

ooooooooooooooooo

$N_6^{146} = \{ \mathcal{G}$ telles que $\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 1$, $\dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 4$, $\dim \mathcal{C}_3 \mathcal{G} = 6$

Elles s'obtiennent par extension de $\mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_1^2$

On obtient l'algébre :

$$\mathcal{G}_6^2 \qquad \begin{aligned}
[x_1 \; x_2] &= x_3 \\
[x_1 \; x_3] &= x_6 \\
[x_4 \; x_5] &= x_6
\end{aligned}$$

Montrons que $N_6^{146} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathcal{G}_6^2 \subset \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \varepsilon \, x_1 \\
x'_2 &= \varepsilon^2 x_2 \\
x'_3 &= \frac{1}{\varepsilon} \; x_5 \\
x'_4 &= x_4 - \frac{1}{\varepsilon^4} \; x_6 \\
x'_5 &= x_3 - \frac{1}{\varepsilon} \; x_5 \\
x'_6 &= x_6
\end{aligned}$$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{1\,0\,\frac{1}{\varepsilon^4}})$

$\beta = 0$
$\gamma = \frac{1}{\varepsilon^4}$
$\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
[x_1 \; x_2] &= x_3 + \varepsilon^3 \; x_5 \\
[x_1 \; x_3] &= x_6 \\
[x_1 \; x_4] &= \varepsilon^2 \; x_3 \\
[x_1 \; x_5] &= \varepsilon \, x_4 \\
[x_2 \; x_4] &= \varepsilon^2 \, x_6 \\
[x_4 \; x_5] &= x_6 \\
[X_2, \, X_3] &= \varepsilon \; X_6
\end{aligned}$$

$N_6^{2346} = \{ \mathfrak{g}$ telles que $\dim \mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 2$, $\dim \mathcal{C}_2\mathfrak{g} = 3$, $\dim \mathcal{C}_3\mathfrak{g} = 4$

Elles s'obtiennent par extension de $\mathfrak{g}_4^1$

On obtient :

$\mathfrak{g}_6^{14}$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$\dim \mathcal{D}\mathfrak{g} = 4$
$\mathfrak{g}_5^6 \times \mathfrak{g}_1$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_5$	$\dim \mathcal{D}\mathfrak{g} = 3$ $\dim \mathcal{U}m\,\mathcal{D}\mathfrak{g} = 4$
$\mathfrak{g}_5^5 \times \mathfrak{g}_1$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$	$\dim \mathcal{D}\mathfrak{g} = 3$ $\dim \mathcal{U}m\,\mathcal{D}\mathfrak{g} = 5$

Montrons que $N_6^{234} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathfrak{g}_5^6 \times \mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_5^5 \times \mathfrak{g}_1 \in \partial(\mathfrak{g}_6^{14})$

On voit que $\mathfrak{g}_6^{14} \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \varepsilon\, x_1 \\
x'_2 &= x_2 \\
x'_3 &= \varepsilon\, x_3 \\
x'_4 &= \varepsilon^2 x_4 \\
x'_5 &= \varepsilon^3 x_5 \\
x'_6 &= \varepsilon\, x_6
\end{aligned}
$$

On obtient le point suivant de $\partial(\mathfrak{g}_{001})$

$\beta = 0$

$\gamma = 1$

$\alpha = 0$

$$
\begin{aligned}
[x_1\ x_2] &= x_3 \\
[x_1\ x_3] &= x_4 \\
[x_1\ x_4] &= x_5 \\
[x_1\ x_5] &= \varepsilon^3 x_6 \\
[x_2\ x_3] &= x_6
\end{aligned}
$$

oooooooooooooooooo

$N_6^{246} = \{ \mathcal{G}$ telles que $\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 2$ $\dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 4$
$\dim \mathcal{C}_3 \mathcal{G} = 6$

elles s'obtiennent par extension de $\mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_1$

On obtient les algébres :

$\mathcal{G}_5^3 \times \mathcal{G}_1$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_5$	$\dim D\mathcal{G} = 2$
$\mathcal{G}_6^6$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_2\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$\dim D\mathcal{G} = 3$ $\dim \mathrm{Um}\ \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 5$
$\mathcal{G}_6^7$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_3] = x_5$ $[x_2\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_4] = x_6$	$\dim D\mathcal{G} = 3$ $\dim \mathrm{Um}\ \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 4$ $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{G} = 1$ $\dim ([\mathrm{Um}\ D\mathcal{G}, \mathcal{C}_2 \mathcal{G}] \cap \mathcal{C}^2 \mathcal{G}) = 1$
$\mathcal{G}_6^4$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1 * _3] = x_6$ $[x_2\ x_4] = x_5$	$\dim D\mathcal{G} = 3$ $\dim \mathrm{Um}\ \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 4$ $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{G} = 1$ $\dim ([\mathrm{Um}\ D\mathcal{G}, \mathcal{C}_2 \mathcal{G}] \cap \mathcal{C}^2 \mathcal{G}) = 0$
$\mathcal{G}_6^8$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_4] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_5$	$\dim D\mathcal{G} = 3$ $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{G} = 2$ l'ensemble des x tels que le rang de l'application $ad\, x$ restreinte à $\mathcal{C}_2 \mathcal{G}$ soit inférieur ou égal à 1, est l'espace vectoriel $(x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$

$\mathfrak{g}^5_6$

$$[x_1\ x_2] = x_4$$
$$[x_1\ x_4] = x_5$$
$$[x_2\ x_3] = x_6$$
$$[x_2\ x_4] = x_6$$

dim $\mathcal{D}\mathfrak{g} = 3$
dim $\mathcal{C}^2\mathfrak{g} = 2$

l'ensemble des x tels que le rang de l'application adx restreinte à $\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$ soit inférieur ou égal à 1 est réunion des espaces vectoriels $(x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$ et $(x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$

Montrons que $N_6^{246} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathfrak{g}^3_5 \times \mathfrak{g}_1 \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$$x'_1 = \varepsilon x_1$$
$$x'_2 = x_2$$
$$x'_3 = \varepsilon x_3$$
$$x'_4 = x_4$$
$$x'_5 = \varepsilon x_5$$
$$x'_6 = \frac{1}{\varepsilon} x_6$$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathfrak{g}_{001})$

$\beta = 1$
$\gamma = 0$
$\alpha = 0$

$$[x_1\ x_2] = x_3$$
$$[x_1\ x_3] = \varepsilon^2 x_4$$
$$[x_1\ x_4] = x_5$$
$$[x_1\ x_5] = \varepsilon^3 x_6$$
$$[x_2\ x_3] = x_5$$
$$[x_2\ x_4] = \varepsilon x_6$$

On voit que $\mathfrak{g}^6_6 \in \diamond(\mathfrak{g}^7_6)$

On voit que $\mathfrak{g}^7_6 \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$$x'_1 = \varepsilon^3 x_2$$
$$x'_2 = \varepsilon^2 x_1$$
$$x'_3 = -\varepsilon^4 (x_4 - x_6)$$
$$x'_4 = -\varepsilon^5 x_3$$
$$x'_5 = -\varepsilon^7 x_6$$
$$x'_6 = -\varepsilon^6 x_5$$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathfrak{g}_{010})$

$\beta = 1$
$\gamma = 0$
$\alpha = 0$

$$[x_1\ x_2] = x_4$$
$$[x_1\ x_3] = x_5$$
$$[x_1\ x_4] = \varepsilon^2 x_6$$
$$[x_1\ x_5] = 0$$
$$[x_1\ x_6] = 0$$
$$[x_2\ x_3] = x_6$$
$$[x_2\ x_4] = x_5 - \varepsilon^3 x_3$$
$$[x_2\ x_6] = \varepsilon x_5$$

On voit que $\mathcal{G}^4_6 \in \overline{U_6}$
en effectuant le changement de base suivant

$x'_1 = \varepsilon x_1$
$x'_2 = x_2$
$x'_3 = x_4$
$x'_4 = \varepsilon x_3$
$x'_5 = \varepsilon x_6$
$x'_6 = \varepsilon x_5$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{001})$

$[x_1\ x_2] = x_4$
$[x_1\ x_3] = x_6$
$[x_1\ x_4] = \varepsilon^2 x_3$
$[x_1\ x_5] = 0$
$[x_1\ x_6] = \varepsilon x_5$
$[x_2\ x_3] = 0$
$[x_2\ x_4] = x_5$

On voit que $\mathcal{G}^8_6 \in \diamond(\mathcal{G}^5_6)$
en effectuant le changement de base

$x'_1 = \varepsilon x_1$
$x'_2 = x_2 - x_1$
$x'_3 = \varepsilon^2 x_3$
$x'_4 = \varepsilon x_4$
$x'_5 = \varepsilon^2 x_5$
$x'_6 = \varepsilon (x_6 - x_5)$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}^5_6)$

$[x_1\ x_2] = x_4$
$[x_1\ x_4] = x_5$
$[x_2\ x_3] = x_5 + \varepsilon x_6$
$[x_2\ x_4] = x_6$

On voit que $\mathcal{G}^5_5 \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de bae suivant

$x'_1 = x_2$
$x'_2 = \varepsilon x_1$
$x'_3 = -\varepsilon (x_4 - x_5)$
$x'_4 = -\varepsilon x_3$
$x'_5 = -\varepsilon x_6$
$x'_6 = -\varepsilon^2 x_5$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{001})$

$\beta = 0$
$\gamma = 1$
$\alpha = 0$

$[x_1\ x_2] = x_4$
$[x_1\ x_4] = x_5$
$[x_2\ x_3] = x_6 - \varepsilon x_5$
$[x_2\ x_6] = \varepsilon^2 x_5$
$[x_2\ x_4] = x_6 + \varepsilon x_3$

o o o o o o o o o o o o

$$N_6^{26} = \{ \mathfrak{g} \text{ tels que } \dim \mathcal{C}_1 \mathfrak{g} = 2 \quad \dim \mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = 6$$

On obtient :

$\mathfrak{g}_5^1 \times \mathfrak{g}_1$	$[x_1\ x_2] = x_5$ $[x_3\ x_4] = x_5$	$D\mathfrak{g}$ de dim 1
$\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_3$	$[x_1\ x_4] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$D\mathfrak{g}$ de dim 2 l'ensemble des x tels que a d x soit de rang $\leqslant 1$ = $(x_3\ x_4\ x_5\ x_6) \cup (x_1 x_2\ x_5\ x_6)$
$\mathfrak{g}_6^1$	$[x_1\ x_2] = x_5$ $[x_1\ x_4] = x_6$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$D\mathfrak{g}$ de dim 2 l'ensemble des x tels que a d x soit de rang $\leqslant 1$ $= (x_3\ x_4\ x_5\ x_6)$

Montrons que $N_6^{26} \subset \overline{U_6}$

on voit que $\mathfrak{g}_5^1 \times \mathfrak{g}_1 \in \diamond(\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_3)$
en effectuant de changement de base

$x'_1 = x_1$
$x'_2 = x_4$
$x'_3 = x_3$
$x'_4 = x_2$
$x'_5 = x_5$
$x'_6 = \varepsilon x_6 - x_5$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_3)$

$$[x_1\ x_2] = x_5$$
$$[x_3\ x_4] = x_5 - \varepsilon x_6$$

On voit que $\mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_3 \in \overline{U_6}$

On voit que $\mathcal{G}_6^1 \in \overline{U_6}$

en effectuant le changement de base

$$\begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon^2 x_1 \\ x'_2 &= \varepsilon x_4 \\ x'_3 &= \varepsilon (x_3 - x_6) \\ x'_4 &= x_2 \\ x'_5 &= \varepsilon^3 x_5 \\ x'_6 &= \varepsilon^2 x_6 \end{aligned}$$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{1\,01})$

$$\begin{aligned} [x_1\ x_2] &= x_5 \\ [x_1\ x_3] &= \varepsilon^2 x_2 \\ [x_1\ x_4] &= x_6 + \varepsilon x_3 \\ [x_1\ x_5] &= \varepsilon^3 x_6 \\ [x_2\ x_3] &= x_6 \\ [x_4\ x_5] &= \varepsilon x_6 \end{aligned}$$

ooooooooooooo

$\boxed{N_6^{346} = \{ \mathcal{G} \text{ tels que } \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 3, \quad \dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 4, \quad \dim \mathcal{C}_3 \mathcal{G} = 6}$

On obtient les algébres :

$\mathcal{G}_4^1 \times (\mathcal{G}_1)^2$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$	$\mathcal{D}\mathcal{G}$ de dim. 2
$\mathcal{G}_5^4 \times \mathcal{G}_1$	$[x_1\ x_2] = x_3$ $[x_1\ x_3] = x_4$ $[x_2\ x_3] = x_5$	$\mathcal{D}\mathcal{G}$ de dim. 3

Montrons que $N_6^{346} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathcal{G}_4^1 \times (\mathcal{G}_1)^2 \in \overline{\diamond(\mathcal{G}_5^4 \times \mathcal{G}_1)}$

en effectuant le changement de base

$$\begin{aligned} x'_1 &= \varepsilon x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= \varepsilon^2 x_3 \\ x'_4 &= \varepsilon^2 x_4 \\ x'_5 &= \varepsilon x_5 \\ x'_6 &= x_6 \end{aligned}$$

On obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{010})$

$$\begin{aligned} [x_1\ x_2] &= x_3 \\ [x_1\ x_3] &= x_4 \\ [x_1\ x_4] &= \varepsilon^2 x_5 \\ [x_1\ x_5] &= \varepsilon^2 x_6 \\ [x_2\ x_3] &= x_5 \\ [x_2\ x_4] &= \varepsilon^2 x_6 \end{aligned}$$

oooooooooooooooooo

$$N_6^{36} = \{ \mathcal{G} \text{ telles que } \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 3 \text{ , } \dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 6$$

On obtient

$\mathcal{G}_6^3$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_3] = x_5$ $[x_2\ x_3] = x_6$	$\dim \mathcal{D}\mathcal{G} = 3$
$\mathcal{G}_5^2 \times \mathcal{G}_1$	$[x_1\ x_2] = x_4$ $[x_1\ x_3] = x_5$	$\dim \mathcal{D}\mathcal{G} = 2$

Montrons que $N_6^{36} \subset \overline{U_6}$

On voit que $\mathcal{G}_5^2 \times \mathcal{G}_1 \in \overline{\diamond(\mathcal{G}_6^3)}$

On voit que $\mathcal{G}_6^3 \in U_6$

en effectuant le changement de base

$x'_1 = \varepsilon^2 x_1$
$x'_2 = x_2$
$x'_3 = \varepsilon(x_3 - x_4)$
$x'_4 = \varepsilon^2 x_4$
$x'_5 = -\varepsilon^3 x_5$
$x'_6 = \varepsilon x_6$

on obtient le point suivant de $\diamond(\mathcal{G}_{001})$
$\beta = 0$
$\gamma = 1$
$\alpha = 0$

$[x_1\ x_2] = x_4 + \varepsilon x_3$
$[x_1\ x_3] = x_5 + \varepsilon x_4$
$[x_1\ x_4] = - \varepsilon x_5$
$[x_1\ x_5] = - \varepsilon^4 x_6$
$[x_2\ x_3] = x_6$

oooooooooooooooooooo

$$N_6^{46} = \{ \mathcal{G} \text{ tels que } \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 4 \quad \dim \mathcal{C}_2 \mathcal{G} = 4$$

On obtient

$$\mathcal{G}_3 \times (\mathcal{G}_1)^3 \qquad [x_1 \quad x_2] = x_3$$

On voit que $N_6^{46} \subset \overline{U_6}$

ooooooo

$$N_6^6 = \{ \mathcal{G} \text{ tels que } \quad \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{G} = 6$$

algébre abélienne $(\mathcal{G}_1)^6$

On voit donc que $N_6 = \overline{\diamond (\mathcal{G}_6^{20})}$

$\underline{N_6 \text{ est donc irréductible}}$

Tableau récapitulatif des algèbres de Lie de dimension ≤ 5

dimension	$\mathcal{C}^1\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}^2\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}^3\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}^4\mathfrak{g}$	$\cancel{\mathcal{C}^5\mathfrak{g}}$	$\mathcal{D}\mathfrak{g}$	$\mathcal{D}^2\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}_1\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}_3\mathfrak{g}$	$\mathcal{C}_4\mathfrak{g}$
$\mathfrak{g}_1$	0					0		1			
$(\mathfrak{g}_1)^2$	0	0				0		2	*		
$(\mathfrak{g}_1)^3$	0	0				0		3	3		
$\mathfrak{g}_3^1$	1	0				1	0	1	3		
$(\mathfrak{g}_1)^4$	0	0	0			0	0	4	4	4	
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_3^1$	1	0	0			1	0	2	4	4	
$\mathfrak{g}_4^1$	3	1	0			2	0	1	2	4	
$(\mathfrak{g}_1)^5$	0	0	0	0		0	0	5	5	5	5
$(\mathfrak{g}_1)^2 \times \mathfrak{g}_3$	1	0	0	0		1	0	3	5	5	5
$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_4^1$	2	1	0	0		2	0	2	3	5	5
$\mathfrak{g}_5^1$	1	0	0	0		1	0	1	5	5	5
$\mathfrak{g}_5^2$	2	0	0	0		2	0	2	5	5	5
$\mathfrak{g}_5^3$	2	1	0	0		2	0	1	3	5	5
$\mathfrak{g}_5^4$	3	2	0	0		3	0	2	3	5	5
$\mathfrak{g}_5^5$	3	2	1	0		3	0	1	2	3	5
$\mathfrak{g}_5^6$	3	2	1	0		3	0	1	2	3	5

Tableau récapitulatif des algèbres nilpotentes de dimension 6

	$\mathcal{C}^1\mathcal{G}$	$\mathcal{C}^2\mathcal{G}$	$\mathcal{C}^3\mathcal{G}$	$\mathcal{C}^4\mathcal{G}$	$\mathcal{C}^5\mathcal{G}$	$\mathcal{D}\mathcal{G}$	$\mathcal{D}^2\mathcal{G}$	$\mathcal{C}_1\mathcal{G}$	$\mathcal{C}_2\mathcal{G}$	$\mathcal{C}_3\mathcal{G}$	$\mathcal{C}_4\mathcal{G}$	$\mathcal{C}_5\mathcal{G}$
$(\mathcal{G}_1)^6$	0	0	0	0	0	0	0	6	6	6	6	6
$\mathcal{G}_3 \times (\mathcal{G}_1)^3$	1	0	0	0	0	1	0	4	6	6	6	6
$\mathcal{G}_5^1 \times \mathcal{G}_1$	1	0	0	0	0	1	0	2	6	6	6	6
$\mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_3$	2	0	0	0	0	2	0	2	6	6	6	6
$\mathcal{G}_5^2 \times \mathcal{G}_1$	2	0	0	0	0	2	0	3	6	6	6	6
$\mathcal{G}_4^1 \times (\mathcal{G}_1)^2$	2	1	0	0	0	2	0	3	4	6	6	6
$\mathcal{G}_5^3 \times \mathcal{G}_1$	2	1	0	0	0	2	0	2	4	6	6	6
$\mathcal{G}_5^4 \times \mathcal{G}_1$	3	2	0	0	0	3	0	3	4	6	6	6
$\mathcal{G}_5^5 \times \mathcal{G}_1$	3	2	1	0	0	3	0	2	3	4	6	6
$\mathcal{G}_5^6 \times \mathcal{G}_1$	3	2	1	0	0	3	0	2	3	4	6	6
$\mathcal{G}_6^1$	2	0	0	0	0	2	0	2	6	6	6	6
$\mathcal{G}_6^2$	2	1	0	0	0	2	0	1	4	6	6	6
$\mathcal{G}_6^3$	3	0	0	0	0	3	0	3	6	6	6	6
$\mathcal{G}_6^4$	3	1	0	0	0	3	0	2	4	6	6	6
$\mathcal{G}_6^5$	3	2	0	0	0	3	0	2	4	6	6	6
$\mathcal{G}_6^6$	3	1	0	0	0	3	0	2	4	6	6	6
$\mathcal{G}_6^7$	3	1	0	0	0	3	0	2	4	6	6	6
$\mathcal{G}_6^8$	3	2	0	0	0	3	0	2	4	6	6	6
$\mathcal{G}_6^9$	3	1	0	0	0	3	0	1	3	6	6	6
$\mathcal{G}_6^{10}$	3	1	0	0	0	3	0	[illegible]	3	6	6	6

Suite

	C^1Y	C^2Y	C^3Y	C^4Y	C^5Y	DY	D^2Y	C_1Y	C_2Y	C_3Y	C_4Y	C_5Y
Y_6^{11}	3	2	1	0	0	3	0	1	3	4	6	6
Y_6^{12}	3	2	1	0	0	3	0	1	3	4	6	6
Y_6^{13}	3	2	1	0	0	3	0	1	2	4	6	6
Y_6^{14}	4	3	1	0	0	4	0	2	3	4	6	6
Y_6^{15}	4	3	1	0	0	4	0	1	3	4	6	6
Y_6^{16}	4	3	2	1	0	4	0	1	2	3	4	6
Y_6^{17}	4	3	2	1	0	4	0	1	2	3	4	6
Y_6^{18}	4	3	2	1	0	4	1	1	2	3	4	6
Y_6^{19}	4	3	2	1	0	4	0	1	2	3	4	6
Y_6^{20}	4	3	2	1	0	4	1	1	2	3	4	6

Chapitre V

Questions de dimension et de réductibilité

Nous allons montrer qu'il existe dans Nn une composante irréductible de dimension assez petite (de dimension $< n^2$) d'autre part, nous montrerons qu'il existe un ensemble irréductible de grande dimension (de l'ordre de $\frac{2n^3}{27}$ si n est grand). Ceci montrera que pour n assez grand, Nn est réductible. Les déterminations précises de majorations et de minorations prouveront le résultat pour $n \geqslant 11$.

Pour commencer nous majorerons la dimension de Un, ouvert des algèbres filiformes, et ceci nous montrera ensuite que Un ne peut être dense dans Nn pour n assez grand.

Enfin, une démonstration indépendante prouvera que N_7 est réductible.

1 - Nous utiliserons les propositions suivantes relatives à la dimension.

Proposition 1

Soient V_1 et V_2 2 variétés irréductibles et f un morphisme de V_1 dans V_2 $f : V_1 \dashrightarrow V_2$, alors :

- $\dim f(V_1) \leqslant \dim V_1$
- pour tout y appartenant à $f(V_1)$ et pour toute composante irréductible C de $f^{-1}(y)$ on a $\dim C \geqslant \dim V_1 - \dim f(V_1)$

- il existe un ouvert U de $\overline{f(V_1)}$ contenu dans $f(V_1)$ tel que si y appartient à U alors pour toute composante irréductible C de $f^{-1}(y)$ on a $\dim C = \dim V_1 - \dim f(V_1)$

Démonstration dans / 5 / (p. 106) théorème 2 et corollaire 1.

Proposition 2

Soit G un groupe algébrique connexe opérant sur une variété V, et soit A une partie irréductible de V de dimension a . Pour tout $a \in A$ soit d(a) la dimension de l'ensemble des $g \in G$ tels que $g . a \in A$, alors la dimension de l'ensemble $G . A$ des $g . a$ ($g \in G$, $a \in A$) est $\dim A + \dim G - \inf\limits_{a \in A} d(a)$

De la proposition 1 et dans les conditions de cette proposition 1, on déduit immédiatement que

$$\inf_{y \in f(V_1)} \dim f^{-1}(y) = \dim V_1 - \dim f(V_1)$$

On appliquera cette proposition au morphisme

$$R : G \times A \longrightarrow \overline{G . A} \subset V$$

défini par $R(g\ a) = g . a$

on a $R\,(G \times A) = G . A$

et on a $\inf\limits_{x \in G . A} \dim R^{-1}(x) = \dim (G \times A) - \dim G . A$

d'où $\dim G . A = \dim G + \dim A - \inf\limits_{x \in G . A} \dim R^{-1}(x)$

soit $x = g . a$ un point de $G . A$

on a $R^{-1}(x) = \{(g', a') ; g' \in G \quad a' \in A$

tels que $g' . a' = g . a \}$

La projection de l'ensemble $R^{-1}(x) \subset G \times A$ sur l'ensemble G induit une bijection de cet ensemble sur l'ensemble des g' de G tels que $(g'^{-1}g) . a \in A$, ensemble qui est de dimension $d(a)$.

Ce qui démontre le résultat

2 - Dimension de N_6

On a $N_6 = \Diamond(\mathfrak{g}_6^{20})$

on a donc $\dim N_6 = (6)^2 - \dim \Delta(\mathfrak{g}_6^{20})$

où $\Delta(\mathfrak{g}_6^{20})$ est l'espace des dérivations de $\mathfrak{g}_6^{20}$

Calculons la dimension de $\Delta(\mathfrak{g}_6^{20})$

$\mathfrak{g}_6^{20}$ est définie par

$$
\begin{aligned}
[x \;\; x_1] &= x_2 \\
[x \;\; x_2] &= x_3 \\
[x \;\; x_3] &= x_4 \\
[x \;\; x_4] &= x_5 \\
[x_1 \;\; x_2] &= x_4 \\
[x_1 \;\; x_3] &= x_5 \\
[x_1 \;\; x_4] &= x_5 \\
[x_2 \;\; x_3] &= - x_5
\end{aligned}
$$

soit D une dérivation de $\mathfrak{g}_6^{20}$

on a $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5) = \mathfrak{Un}(\mathcal{C}_2\, \mathfrak{g})$

c'est donc un idéal caractéristique.

On a donc $\quad \mathcal{D}x = a_0^0 x + a_0^1 x_1 + a_0^2 x_2 + a_0^3 x_3 + a_0^4 x_4 + a_0^5 x_5$

$\quad \mathcal{D}x_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + a_1^4 x_4 + a_1^5 x_5$

On a alors $DX_2 = [\mathcal{D}x, x_1] + [x, \mathcal{D}x_1]$

$$= (a_0^0 + a_1^1) x_2 + a_1^2 x_3 + (a_1^3 - a_0^2) x_4 + (a_1^4 - a_0^3 - a_0^4) x_5$$

$$DX_3 = [\mathcal{D}x, x_2] + [x, \mathcal{D}x_2]$$

$$= (2a_0^0 + a_1^1) x_3 + (a_0^1 + a_1^2) x_4 + (a_0^3 + a_1^3 - a_0^2) x_5$$

$$DX_4 = [\mathcal{D}x, x_3] + [x, \mathcal{D}x_3]$$

$$= (3a_0^0 + a_1^1) x_4 + (2a_0^1 - a_0^2 + a_1^2) x_5$$

$$DX_5 = [\mathcal{D}x, x_4] + [x, \mathcal{D}x_4]$$

$$= (4a_0^0 + a_1^1 + a_0^1) x_5$$

La relation $\quad [\mathcal{D}x_1, x_2] + [x_1, \mathcal{D}x_2] = x_4$

donne $\quad a_1^1 = 2a_0^0$

$\quad a_0^1 = a_1^3$

$[\mathcal{D}x_1, x_4] + [x_1, \mathcal{D}x_4] = \mathcal{D}x_5$

donne $\quad a_0^1 = a_0^0$

On a donc $\quad a_1^1 = a_0^0 \quad a_1^1 = 2a_0^0 \quad a_1^3 = 2a_0^0$

et $\boxed{\dim N_6 = (6)^2 - 8}$

3 - Ouvert des algèbres filiformes, majoration de la dimension.

Soit l'espace vectoriel K^{n+1} et $(e_0\ e_1 \dots e_n)$ la base canonique de K^{n+1}

Soit $A_{n+1} \subset U_{n+1}$ l'ensemble des algèbres filiformes $\mathcal{G}$ telles que $(e_0\ e_1 \quad e_n)$ soit une base adaptée de $\mathcal{G}$

On a alors $\quad [e_0, e_i]_{\mathcal{G}} = e_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-1$

$[e_1, e_2]_{\mathcal{G}} = a_{12} e_4 + \dots$ (pas de composante sur e_3)

$[e_i, e_j] = a_{ij} e_{i+j} + \dots$

avec $a_{ij} = 0$ si $i+j < n$

Toute algèbre de lie filiforme possède une base adaptée (Chapitre III, paragraphe 1)

On a donc GL $(K^n) \ast A_n = U_n$

Nous allons minorer la dimension de A_n. Pour cela montrons que l'application $\mathfrak{g} \longmapsto [e_i, e_{i+1}]_{\mathfrak{g}}$ est injective.

C'est-à-dire si n est pair, donnons-nous $[e_i, e_{i+1}]$ pour $1 \leq i \leq p-1$ si $n = 2p$

tels que $[e_1, e_2] = a_{12}^4 e_4 + \dots + a_{12}^n e_n$

$$[e_{p-1}, e_p] = a_{p-1,p}^n e_n$$

c'est-à-dire $1 + 3 + 5 + \dots + n-3 =$

$$(p-1)\left(\frac{n-2}{2}\right) = (p-1)^2 \text{ coéfficients arbitraires}$$

et si n est impair $n = 2p+1$ donnons-nous des $[e_i, e_{i+1}]$ pour $1 \leq i \leq p$

$$[e_1, e_2] = a_{12}^4 e_4 + \dots + a_{12}^n e_n$$

$$[e_{p-1}, e_p] = a_{p-1,p}^{n-1} e_{n-1} + a_{p-1,p}^n e_n$$

$$[e_p, e_{p+1}] = a_{p,p+1}^n e_n$$

c'est-à-dire $1 + 2 + 4 + \dots + (n-3) =$

$= (p-1)\,p + 1$ coéfficients arbitraires

Montrons qu'alors les $[e_i, e_{i+p}]$ sont entièrement déterminés.

L'application $e_i \longmapsto e_{i+1}$ doit être une dérivation de l'algèbre $\mathfrak{g}$

Appelons D cette application

on a alors $[e_i, e_{i+p+1}] = D[e_i, e_{i+p}] - [e_{i+1}, e_{i+p}]$

Cette formule est valable pour tout i, et p si on pose $e_i = 0$ si $i > n$.

On voit donc que les $[e_i, e_{i+p}]$ sont entièrement déterminés par les $[e_i, e_{i+1}]$

On a la formule $[e_i, e_{i+p+1}] = \sum_{r=0}^{\frac{p}{2}} \alpha_p^r D^{p-2r} [e_{i+r}, e_{i+r+1}]$

avec $D^\circ = Id$

avec $\alpha_p^0 = 1 \qquad \alpha_p^1 = -(p-1)$

les coéfficients α_p^r ne dépendent pas de i et sont définis par récurrence par $\alpha_{p+1}^r - \alpha_p^r = \alpha_{p-1}^{r-1}$

Considérons alors A_{n+1} comme sous ensemble de l'ensemble B_{n+1} des applications bilinéaires alternées b de $K^{n+1} \times K^{n+1}$ dans K^{n+1}

telles que
$$\begin{cases} [e_0, e_i]_b = e_{i+1} \\ [e_i, e_{i+1}] \equiv 0 \mod k\, e_{2i+2} + \cdots + k\, e_n \quad \text{si } 2i+1 < n \\ [e_i, e_{i+1}] \equiv 0 \mod k\, e_n \\ \text{l'application D définie par } \quad D e_0 = 0 \\ \qquad D e_i = e_{i+1} \quad , D e_n = 0 \\ \text{soit une dérivation de l'algèbre b} \end{cases}$$

On a vu que si b appartenait à B_n la valeur de b pour le couple (e_i , e_{i+p}) est déterminée par la donnée des valeurs de b sur les couples (e_j, e_{j+1}) par la formule de récurrence : $b\,(e_i, e_{i+p+1}) = D\, b\,(e_i, e_{i+p}) - b\,(e_{i+1}, e_{i+p})$

On a
$$\begin{cases} \dim B_{2p+1} = (p-1)^2 \\ \dim B_{2p} = (p-1)\,(p-2) + 1 \end{cases}$$

On a donc $\dim A_{2p+1} \leqslant (p-1)^2$

$\dim A_{2p} \leqslant (p-1)(p-2) + 1$

D'autre part le groupe $GL\, K^{n+1}$ agit sur l'ensemble des applications bilinéaires de $K^{n+1} \times K^{n+1}$ dans K^{n+1}

de la même manière que sur l'ensemble des algèbres de lie en posant $g * b\,(x, y) = g\, b\,(g^{-1}x, g^{-1}y)$ si b est une application bilinéaire alternée.

On a donc $GL\, K^n * B_n \supset U_n$ si U_n est l'ouvert des algèbres filiformes or $GL\, K^n\, B_N$ est irréductible et on a :

$\dim GL\, K^n * B_n \leqslant \dim (GL\, K^n \times B_n)$

$\leqslant n^2 + \dim B_n$

On a donc $\dim U_{2p+1} \leqslant (2p+1)^2 + (p-1)^2$

$\dim U_{2p} \leqslant (2p)^2 + (p-1)(p-2) + 1$

On a donc dans tous les cas :

$$\boxed{\dim U_n \leqslant \frac{5n^2}{4}}$$

4 - Extension des algèbres filiformes

Soit $\mathfrak{g}_n$ une algèbre de lie filiforme de dimension n+1

a) Supposons tout d'abord que $\mathfrak{g}_n$ admette une extension $\mathfrak{g}_{n+1}$ qui soit une algèbre de lie filiforme. Soit alors $(x\, x_1 \ldots x_{n+1})$ une base adaptée de $\mathfrak{g}_{n+1}$.

La base $(x\, x_1 \ldots x_n)$ sera alors une base adaptée pour $\mathfrak{g}_n$ et le cocycle β_0 définissant l'extension $\mathfrak{g}_{n+1}$ de $\mathfrak{g}_n$ sera défini par rapport à cette base par :

$$\beta_0\ (x, x_i) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\beta_0\ (x, x_n) = 1$$

Soit alors β un cocycle de dimension 2 de $\mathcal{U}_n$

posons $\beta\ (x, x_n) = b_n$

le cocycle $\beta - b_n \beta_0$ est tel que $(\beta - b_n \beta_0)(x, x_n) = 0$

Montrons que le cocycle $\beta - b_n \beta_0$ peut s'écrire alors sous forme de la somme d'un cobord et d'un cocycle γ tel que $\gamma\ (x, x_i) = 0$ pour tout i.

Soit, en effet, un cocycle β tel que $\beta\ (x, x_n) = 0$

à β correspond une extension de $\mathcal{U}_n$ telle que

$$[x, x_1] = x_2 + \beta(x, x_1)\ x_{n+1}$$

$$[x, x_2] = x_3 + \beta(x, x_2)\ x_{n+1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$[x, x_{n-1}] = x_n + \beta(x, x_{n-1})\ x_{n+1}$$

$$[x, x_n] = 0$$

Considérons alors φ l'application linéaire de $\mathcal{U}_n$ dans k définie par

$$\varphi(x) = 0$$

$$\varphi(x_1) = 0$$

$$\varphi(x_2) = \beta(x, x_1)$$

$$\varphi(x_i) = \beta(x, x_{i-1})$$

$$\varphi(x_n) = \beta(x, x_{n-1})$$

alors le cocycle $\beta - d\varphi$ est tel

que $\beta - d\varphi\ (x, x_i) = \beta(x, x_i) - \varphi(x_{i+1}) = \beta(x, x_i) - \beta(x, x_i) = 0$ si $i < n$

$$\beta - d\varphi\ (x, x_n) = \beta(x, x_n) - \varphi(0) = \beta(x, x_n) = 0$$

On voit donc que l'espace des cocycles de dimension 2 de $\mathcal{U}_n$ est somme de l'espace des cobords, de l'espace engendré par β_0 et de l'espace des cocycles tels que $\beta(x, x_i) = 0$ pour tout i

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_2(\mathcal{U}_n, k) = B_2(\mathcal{U}_n, k) + k\,\beta_0 + Z_2'(\mathcal{U}_n, k) \\ \text{où } Z_2'(\mathcal{U}_n, k) = \{\beta \in Z_2(\mathcal{U}_n, k) \text{ tels que } \beta(x, x_i) = 0\ \forall i\} \end{array}}$$

et cette somme est directe, comme on le voit facilement.

b) Supposons que $\mathfrak{g}_n$ ne puisse s'étendre en aucune algèbre filiforme. Alors pour tout cocycle β, on aura $\beta(x, x_n) = 0$ et le même raisonnement que précédemment conduit à écrire

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_2(\mathfrak{g}_n, k) = B_2(\mathfrak{g}_n, k) + Z_2'(\mathfrak{g}_n, k) \\ \text{où } Z_2'(\mathfrak{g}_n, k) = \{\beta \in Z_2(\mathfrak{g}_n, k) \text{ tels que } \beta(x, x_i) = 0 \ \forall i\} \end{array}}$$

et cette somme est directe.

On a donc dans le premier cas :

$$H^2(\mathfrak{g}_n, k) \simeq k\beta_0 + Z_2'(\mathfrak{g}_n, k) \quad \text{et}$$

dim $H^2(\mathfrak{g}_n, k) = 1 + \dim Z_2'(\mathfrak{g}_n, k)$

et dans le deuxième cas :

$$H^2(\mathfrak{g}_n, k) \simeq Z_2'(\mathfrak{g}_n, k)$$

et dim $H^2(\mathfrak{g}_n, k) = \dim Z_2'(\mathfrak{g}_n, k)$

Etudions donc l'espace $Z_2'(\mathfrak{g}_n, k)$ des cocycles nuls sur $\{x\} \wedge \mathfrak{g}_n$

soit $\beta \in Z_2'(\mathfrak{g}_n, k)$

appelons $\mathfrak{h}$ la sous algèbre $\sum_{i=1}^{n} k x_i$ de $\mathfrak{g}_n$

β est entièrement déterminé par sa restriction à $\mathfrak{h}$

Appelons D l'application $x_i \longmapsto x_{i+1}$ dérivation induite sur $\mathfrak{h}$ par ad$x$.

Les équations $\beta([x, [y, z]]) + \beta(y, [z, x]) + \beta(z, [x, y]) = 0$

pour $y, z \in \mathfrak{h}$

donnent pour la restriction de β à $\mathfrak{h}$ la relation

$$\beta(z, Dy) = \beta(y, Dz) \quad \forall\ y, z \in \mathfrak{h}$$

D'autre part la restriction de β à $\mathfrak{h}$ est évidemment un cocycle de dimension 2 de $\mathfrak{h}$

On voit donc que la restriction de β à $\mathfrak{h}$ induit une bijection de l'espace $Z'_2(\mathcal{G}_{n}, k)$ sur l'espace des cocycles de $\mathfrak{h}$ vérifiant la condition $\beta(z, Dy) = \beta(y, Dz)$ pour tout $y, z \in \mathfrak{h}$

Soit b une application bilinéaire alternée sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$

On a la relation

$db(DX,Y,Z) + db(X,DY,Z) + db(X,Y,DZ) =$

$b(D[X\ Y], Z) + b([X\ Y], DZ) + b(D[Y, Z], X) + b([Y, Z], DX)$

$+ b(D[Z, X], Y) + b([Z, X], DY)$

car D est une dérivation de $\mathfrak{h}$

les relations $b(Z, DY) = b(Y, DZ)$

entraînent donc $db(dX,Y,Z) + db(X,DY,Z) + db(X,Y,DZ) = 0$

Soit donc une application bilinéaire alternée b vérifiant

$b((Z,DY) = b(Y,DZ)$

et $db(X_1, X_j, X_k) = 0$ si $1 < j < k$

Alors on démontre facilement par récurrence que les équations

$db(X_i,X_j,X_k) = 0$ seront vérifiés pour $i \geqslant 2$

car $X_i = D\, X_{i-1}$ et $db(D\, X_{i-1}, X_j, X_k) + db(X_{i-1}, DX_j, X_k)$

$+ db(X_i-1, X_j, DX_i) = 0$

Donc pour qu'une application bilinéaire b vérifiant

$b(DZ,Y) = b(Y,DZ)$ soit un cocycle de

Il faut et il suffit que :

$db(X_1, X_i, X_j) = 0$

$1 < i < j \leqslant n$

La relation $b(Z,DY) = b(Y,DZ)$

donne par récurrence $\underline{b(z,D^j y) = (-1)^{j+1}\, b(y,D^j z)}$

Posons alors $b(x_i\ x_j) = b_{ij}$ $\qquad i, j \geqslant 1$

$x_j = D^{j+1} x_1$

On alors $b(x_i, D^{j-1}x_1) = (-1)^j\, b(x_1, D^{j-1}x_i) =$

$(-1)^j\, b(x_i, x_{i+j-1})$

on a donc $b_{ij} = (-1)^j\, b_{1,i+j-1}$ en posant $b_{1,q} = 0$ si $q > n$

On déduit de cette relation $b_{i,i} = 0 = (-1)^i\, b_{1,2i+1}$

c'est-à-dire $\underline{b_{1,q} = 0 \text{ si } q \text{ est impair}}$

On voit donc que $b(X_i,X_j)$ est entièrement déterminé par $b(X_1\ X_j)$ avec $b(X_1\ X_j) = 0$ si j est impair.

<u>Posons $\alpha(X) = b(X_1, X)$</u> ; α est une application linéaire de $\mathfrak{h}$ dans K.

Cherchons les conditions pour que l'application bilinéaire définie par $b(X_i,X_j) = (-1)^j \alpha(X_{i+j-1})$ définisse un cocycle sur $\mathfrak{h}$ tel que $b(DZ,Y) = b(Y,DZ)$

<u>Il faut évidemment que $b(X_i,X_i) = 0$ c'est-à-dire que α soit nul sur l'espace engendré par les vecteurs d'indices impairs</u>.

D'autre part la condition $\beta(X_i, DX_j) + \beta(DX_i, X_j) = 0$ est bien vérifiée.

La seule condition supplémentaire c'est donc que

$b(X_1, [X_i\ X_j]) + b(X_i, [X_j X_1]) + b(X_j, [X_1\ X_i]) = 0$

$i \geqslant 2$ on a $X_i = D^{i-1} X_1$

$j \geqslant 2$ $X_j = D^{j-1} X_1$

d'où $b(X_1, [X_i\ X_j]) + b(D^{i-1}X_1, [X_j\ X_1]) + b(D^{j-1}X_1, [X_1 X_i])$

$= b(X_1, [X_i\ X_j]) + (-1)^i b(X_1, D^{i-1}[X_1, X_j]) + (-1)^{j-1}$
$b(X_1, D^{j-1}[X_1\ X_i]) = 0$

c'est-à-dire

$\alpha\left([X_i, X_j] + (-1)^i D^{i-1}[X_1, X_j] + (-1)^{j-1} D^{j-1}[X_1, X_i]\right) = 0$

<u>finalement α doit être nulle sur le sous espace vectoriel</u>

<u>A de $\mathfrak{h}$ engendré par les X_{2p+1} $p \geqslant 0$ et les vecteurs</u>

$$\boxed{[X_i, X_j] + (-1)^i D^{i-1}[X_1\ X_j] + (-1)^{j-1} D^{j-1}[X_1\ X_i]}$$

$i, j \geqslant 2$

et on a <u>$\dim Z'_2(\mathcal{G}/K) = \dim \mathfrak{h} - \dim A$</u>

<u>Exemples</u>

Soit $\mathcal{G}_0^n$ l'algèbre définie par $[x, x_i] = x_{i+1}$ -

Cette algèbre peut s'étendre en une algèbre de lie filiforme de dimension n+1

$\mathfrak{h}$ est abélienne donc l'espace A est l'espace engendré par les vecteurs impairs de $\mathfrak{h}$

on a donc si dim $\mathfrak{g} = 2p+1$ dim $Z_2'(\mathfrak{g}, K) = p$

et dim $Z_2(\mathfrak{g}, K) = 2p-1+1+p = 3p$

si dim $\mathfrak{g} = 2p$ dim $Z_2'(\mathfrak{g}, K) = p-1$

et dim $Z_2(\mathfrak{g}, K) = 2p-2+1+p-1 = 3p-1$

- Soit $\mathfrak{g}_2^n$ l'algèbre définie par $[x, x_i] = x_{i+1}$
de dimension n
$[x_1, x_i] = x_{i+2}$ $\left(\begin{smallmatrix} i \geq 1 \\ i < n-1 \end{smallmatrix}\right)$

C'est bien une algèbre de lie. En effet, l'algèbre $\mathfrak{h}$ définie sur $Kx_1 + \dots + Kx_n$ par restriction de $\mathfrak{g}_2^n$ à $Kx_1 + \dots + Kx_n$ est bien une algèbre de lie; il suffit donc de vérifier que l'application définie sur $\mathfrak{h}$ par restriction de adx, est une dérivation de $\mathfrak{h}$

Or on a simplement à vérifier que

$D[x_1, x_i] = [Dx_1, x_i] + [x_1, Dx_i]$

ce qui est immédiat car $D[x_1, x_i] = D\,x_{i+2} = x_{i+3}$

$[Dx_1, x_i] = 0$ et

$[x_1, Dx_i] = [x_1, x_{i+1}] = x_{i+3}$

(les formules étant valables pour tout i si on pose $x_i = 0$ si $i > n$)

Cette algèbre peut s'étendre sur une algèbre de lie filiforme de dimension n+1, l'espace A est l'espace engendré par les vecteurs impairs de

et les vecteurs $[X_i\, X_j] + (-1)^i D^{i-1} [X_1\, X_j] + (-1)^{j-1} D^{j-1} [X_1\, X_i]$

Prenons $\frac{i}{j} \geqslant 2$ et $\underline{j = i+1}$; A contient alors les vecteurs $X = (-1)^i D^{i-1} (X_{i+3}) + (-1)^i D^i (X_{i+2})$

On trouve donc $2(-1)^i X_{2i+2}$ $\quad i \geqslant 2$

On voit que A contient tous les vecteurs pairs à partir de 6

On a donc $\dim \mathfrak{b} - \dim A = 2$

et $\dim Z_2 (\mathfrak{g}_2^n , k) = \dim B_2 (\mathfrak{g}_2^n , k) + 2 + 1$

$\dim H_2 (\mathfrak{g}_2^n , k) = 3$

$\dim B_2 (\mathfrak{g}_2^n , k) = n - 2$

5 - Une composante de petite dimension dans N_n

Nous allons donc montrer que toute composante irréductible contenant l'algèbre $\mathfrak{g}_2^n$ définie précédemment, avec $H_2 (\mathfrak{g}_2^n , k)$ de dimension 3 pour tout n, est de dimension inférieure à n^2.

a) Définition de quelques morphismes

Considérons dans N_n l'ouvert $U^n{}_1$ des algèbres $\mathfrak{g}$ telles que $\dim \mathcal{C}, \mathfrak{g} = 1$

alors l'application $\mathfrak{g} \longmapsto \mathcal{C}, \mathfrak{g}$ est un morphisme de dans l'espace projectif P, K^n.

En effet pour montrer que c'est un morphisme il suffit de le montrer localement. Soit donc $\mathfrak{g}_0$ une algèbre dont le centre soit de dimension 1. Considérons une base

$(x_1\ x_2 \dots x_n)$ de K^n telle que $k\, x_n = \mathcal{C}_1 \mathcal{G}$

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de lie, appartenant à U_1^n

pour que $x = \sum a_i X_i$ soit dans le centre de $\mathcal{G}$,

il faut et il suffit que $\sum a_i [X_i, X_p] = 0 \quad \forall p$

c'est-à-dire que $\sum a_i\, c_{ip\ell} = 0 \quad \forall p, \ell$

Considérons la matrice définie par ce système d'équations. Pour toute algèbre $\mathcal{G}$ appartenant à U_1^n, il existe un déterminant d'ordre n-1 extrait de cette matrice non nul, Sinon le centre serait de dimension ≥ 2.

Donc pour $\mathcal{G}_0$ il existe un déterminant D_{n+1} d'ordre n-1 non nul en $\mathcal{G}_0$, $D_{n-1}(\mathcal{G}_0) \neq 0$ comme $\{a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \dots a_{n-1} = 0 \ a_n = 1\}$ sont solutions pour $\mathcal{G}_0$ du système d'équations linéaires, on voit que c'est nécessairement le déterminant par rapport aux n-1 premières variables qui est non nul en $\mathcal{G}_0$

Plaçons nous alors dans l'ouvert de N_n définie par

$D_n(\mathcal{G}) \neq 0$

c'est un voisinage de $\mathcal{G}_0$, et dans ce voisinage, on peut exprimer les $a_1\ a_2 \dots a_{n-1}$ par des fractions rationelles

$$a_1 = \frac{P_1(c_{ijk})}{D_{n-1}(c_{ijk})}\, a_n$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = \frac{P_{n-1}(c_{ijk})}{D_{n-1}(c_{ijk})}\, a_n$$

Z est donc bien un morphisme

On considère alors en particulier la sous variété ouverte E_n de $P_1(K^n)$ définie par

$E_n = \{ d$ espace vectoriel de dimension 1 tel que $d \not\subset K e_1 + K e_2 + \dots + K e_{n-1} \}$

E_n est une variété affine ouverte de $P_1(K^n)$ isomorphe à K^{n-1} par l'application $d \longmapsto (a_1\ a_2 \dots a_{n-1})$ tel que $x = e_n + a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}$ appartienne à d.

Et on considère l'ouvert de U_n image réciproque de cet ouvert ; $U_{n,n} = \{ \mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{C}_1 \mathcal{Y} \in E_n \}$

on a un morphisme de $U_{n,n}$ dans K^{n+1} défini par

$\mathcal{Y} \longmapsto (a_1\ a_2 \dots a_{n-1})$ tel que

$x = e_n + a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}$ appartienne au centre de $\mathcal{Y}$

D'autre part on a un morphisme de K^{n-1} dans $GL(K^n)$ défini par $a_1\ a_2 \dots a_{n-1} \longmapsto \varphi(a_1 \dots a_{n-1})$ tel que $\varphi(e_i) = e_i$ $i<n$

$\varphi(e_n) = e_n - a_1 e_1 - \dots - a_{n-1} e_{n-1}$

en composant ces 2 morphismes, on trouve donc un morphisme $\Phi : U_{n,n} \longrightarrow GL(k^n)$

tel que si $\mathcal{Y} \in U_{n,n}$ $(\Phi(\mathcal{Y}))^{-1}(k e_n) = \mathcal{C}_1 \mathcal{Y}$

Considérons alors $U_{n,n} \xrightarrow{\Phi \times id} GL k^n \times U_{n,n} \xrightarrow{R} U_{n,n}$

R définie par $R(\varphi, \mathcal{Y}) = \varphi * \mathcal{Y}$ avec $[x, y]_{\varphi * \mathcal{Y}} = \varphi [\varphi^{-1} x, \varphi^{-1} y]_{\mathcal{Y}}$

Appellons Fe_n le fermé de N_n défini par :

$Fe_n = \{ \mathcal{Y}$ tel que $e_n \in \mathcal{C}_1 \mathcal{Y})$

Montrons que pour tout $\mathcal{Y} \in U_{n,n}$ on a $\Phi(\mathcal{Y}) * \mathcal{Y} \in Fe_n$

en effet on a $[e_n, y]_{\Phi(\mathcal{Y}) * \mathcal{Y}} = \Phi(\mathcal{Y}) [\Phi(\mathcal{Y})^{-1} e_n, (\Phi(\mathcal{Y}))^{-1} y]_{\mathcal{Y}}$

et on a justement construit Φ tel que $(\Phi(\mathcal{Y}))(ke_n) = \mathcal{C}_1 \mathcal{Y}$

<u>On obtient donc un morphisme ρ</u> qui transforme une

algèbre appartenant à U_{nn} dont le centre est de dimension 1, en une algèbre isomorphe dont le centre est Ke_n. On voit que ρ est l'indentité sur $U_n \cap F_{en}$

$\rho : U_{n,n} \longrightarrow Fe_n$

l'image $\rho(U_{n,n})$ est l'ensemble des algèbres de lie dont le centre est Ke_n.

Soit $\mathcal{G}$ un point de $Fe_n \cap U_{n,n}$ l'image réciproque de $\mathcal{G}$ par ρ sera l'ensemble $H * \mathcal{G}$ où H est le sous groupe de $GL(K^n)$ défini par $h \in H$ si $h e_i = e_i$ si $i < n$

$$h e_n \equiv e_n \ (\mathrm{mod} \sum_{i=1}^{n-1} k e_i)$$

or on a dim $H * \mathcal{G}$ = dim H

car si $h \in H$ est tel que $h * \mathcal{G} = \mathcal{G}$ h laisse fixe le centre de $\mathcal{G}$ qui n'est autre que Ke_n donc h = id

et dim $\rho^{-1}(\mathcal{G})$ = n-1 pour tout $\mathcal{G} \in Fe_n \cap U_{n,n}$

D'autre part on a un morphisme évident

$Q : Fe_n \longrightarrow N_{n-1}$

Q application de passage au quotient par e_n

Si $\mathcal{G}_{n-1}$ est une algèbre de lie de N_{n-1} on a déjà remarqué au chapitre 2 que $Q^{-1}(\mathcal{G}_{n-1})$ s'identifiait à $Z_2(\mathcal{G}_{n-1}, k)$ espace des cocycles de dimension 2 de $\mathcal{G}_{n-1}$ à valeur dans K

donc $Q^{-1}(\mathcal{G}_{n-1})$ est un ensemble irréductible quelque soit $\mathcal{G}_{n-1}$ appartenant à N_{n-1} et on a

dim $Q^{-1}(\mathcal{G}_{n-1}) = \dim Z_2(\mathcal{G}_{n-1}, k)$

En composant Q et ρ on obtient un morphisme α de ~~[illegible]~~ U_{nn} ouvert dans N_n dans N_{n-1}

b) Minoration de la dimension d'une composante irréductible de N_n.

Considérons l'algèbre $\mathcal{G}_2^n$ de dimension n définie précédemment $[e_1, e_i] = e_{i+1}$

$[e_2, e_i] = e_{i+2}$

$\mathcal{G}_2^n$ est une algèbre de lie filiforme de dimension n telle que dim $H^2(\mathcal{G}_{2,n}, k) = 3$

Nous allons montrer que toute composante irréductible de N_n contenant $\mathcal{G}_{2,n}$ est de dimension $\leqslant n^2 - 9$ pour $n \geqslant 7$

Raisonnons par récurrence-Supposons le vrai pour n = 7

Soit C_{n+1} une composante irréductible de N_{n+1} contenant $\mathcal{G}_{2,n+1}$

on a $\mathcal{C}_1(\mathcal{G}_{2,n+1}) = k\, e_{n+1}$.

on a donc $\mathcal{G}_{2,n+1} \in F_{e_{n+1}} \cap U_{n+1,n+1}$

$C_{n+1} \cap U_{n+1,n+1}$ est non vide et comme $U_{n+1,n+1}$ est ouvert dans N_{n+1} on a $\dim(C_{n+1} \cap U_{n+1,n+1}) = \dim C_{n+1}$

Restreignons le morphisme α à $C_{n+1} \cap U_{n+1,n+1}$

on a $\alpha(\mathcal{U}_{2,n+1}) = \mathcal{U}_{2,n}$

Soit alors C_n une composante irréductible contenant $\alpha(C_{n+1} \cap U_{n+1,n+1})$

α induit un morphisme de $C_{n+1} \cap U_{n+1,n+1}$ dans C_n qu'on notera $\alpha|C_{n+1}$

on a donc dim $\alpha^{-1}_{|C_{n+1}}(\mathcal{U}_{2,n}) \geqslant \dim C_{n+1} - \dim C_n$

or dim $\alpha^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) \geqslant \dim \alpha^{-1}_{|C_{n+1}}(\mathcal{U}_{2,n})$

on a donc $\dim C_{n+1} \leqslant \dim C_n + \dim \alpha^{-1}(\mathcal{U}_{2,n})$

Nous avons donc à calculer $\underline{\dim \alpha^{-1}(\mathcal{U}_{2,n})}$

$$\underline{\alpha^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) = \rho^{-1}(Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}))}$$

or dim $Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) = \dim Z_2(\mathcal{U}_{2,n}) = 3+n-2 = n+1$

$Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n})$ est irréductible

et $Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) \cap U_{n+1,n+1}$ est non vide puisque il contient $\mathcal{U}_{2,n+1}$

on a donc $\underline{\dim Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) \cap U_{n+1,n+1} = n+1}$

et $\rho^{-1}(Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n})) = H * (Q^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) \cap U_{n+1,n+1})$

donc dim $\alpha^{-1}(\mathcal{U}_{2,n}) = n+1+n$

$$= 2n+1$$

on a donc $\dim C_{n+1} \leqslant \dim C_n + 2n+1 \leqslant n^2 - 9 + 2n + 1$

$$\leqslant (n+1)^2 - 9$$

- Il nous reste donc à montrer que toute composante irréductible contenant $\mathcal{U}_2^7$ dans N_7 est de dimension supérieure ou égale à $7^2 - 9$.

En effet soit C une composante irréductible de N_7 contenant $\mathcal{U}_2^7$

Considérons alors l'ouvert $\Omega_{7,7}$ des algèbres filiformes $\mathfrak{g}$ de dimension 7 telles que $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} \not\subset ke_1 + \cdots + ke_6$

$\Omega_{7,7}$ est ouvert dans U_7, ouvert des algèbres filiformes. On a vu que U_7 était irréductible en dimension 7 donc $\Omega_{7,7}$ est irréductible.

On peut envoyer de la manière décrite précédemment l'ouvert $\Omega_{7,7}$ par un morphisme sur l'ensemble des algèbres filiformes ayant comme centre Ke_7, et par passage au quotient sur l'ouvert des algèbres filiformes de dimension 6.

Appelons j ce morphisme, $j : \Omega_{7,7} \longrightarrow U_6$

U_6 ouvert des algèbres filiformes de dimension 6.

$j(\Omega_{7,7})$ est un ensemble irréductible et d'après le chapitre II, paragraphe 3, position 1,

$$j(\Omega_{7,7}) \text{ n'est pas dense dans } U_6$$

donc $\dim j(\Omega_{7,7}) < \dim U_6 = \dim N_6 = 6^2 - 8$

on a donc $\dim j(\Omega_{7,7}) \leqslant 6^2 - 9$

Si C est une composante irréductible de N_7 contenant $\mathcal{Y}_2^7$ on voit comme précedemment que $C \cap \Omega_{7,7} \neq \emptyset$

donc $\dim C \cap \Omega_{7,7} = \dim C$

et en restreignant le morphisme j à $\Omega_{7,7} \cap C$ on obtient

$\dim C \leqslant \dim j(\Omega_{7,7}) + \dim j^{-1}(\mathcal{Y}_{6,2})$

d'où $\dim C \leqslant (7)^2 - 9$

On a donc montré qu'il existait dans N_n une composante de dimension inférieure à $n^2 - 9$ et d'autre part on a montré que la dimension de l'ouvert des algèbres filiformes était de dimension inférieure à $\frac{5n^2}{4}$

6 - Un ensemble irréductible de grande dimension dans N_n

Considérons dans N_n l'ensemble des $\mathfrak{g}$ telles que

dim $\mathcal{C}^1\mathfrak{g} \leqslant p$ dim $\mathcal{C}_1\mathfrak{g} \geqslant p$

dim $\mathcal{C}^2\mathfrak{g} = 0$

Cet ensemble est un fermé, appellons le $F_{n,p}$

si $\mathfrak{g} \in F_{n,p}$ on a $[\mathcal{C}^1\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ donc $\mathcal{C}^1\mathfrak{g} \subset \mathcal{C}_1\mathfrak{g}$

et pour tout $n \geqslant 3$ et p on a $F_{np} \neq N_n$

soit $\mathfrak{g} \in F_{n,p}$ on peut alors trouver une base $(x_1\ x_2 \dots\ x_{n-p})\ (y_1\ y_2 \dots\ y_p)$ de k^n telle que $\mathcal{C}^1\mathfrak{g} \subset \sum_{i=1}^{p} k y_i \subset \mathcal{C}_1\mathfrak{g}$

on a alors
$$[x_i, y_j]_{\mathfrak{g}} = 0$$
$$[y_i\ y_j]_{\mathfrak{g}} = 0$$
$$[x_i, x_j]_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{p} c_{ijk}\ y_k$$

Soit donc l'ensemble $R_{n,p} \subsetneq N_n$ des algèbres de lie définie par les conditions

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \subset \sum_{k=1}^{p} k\ e_{n-p+k} \subset \mathcal{C}_1\mathfrak{g}$$

on a alors si $\mathfrak{g} \in R_{n,p}$

$$1 \leqslant i,j \leqslant n-p,\ [e_i, e_j]_{\mathfrak{g}} = \sum_{k \geqslant 1}^{p} c_{ijk}\ e_{n-p+k}$$
$$[e_i, e_{n-p+k}]_{\mathfrak{g}} = 0$$
$$[e_{n-p+k_1}, e_{n-p+k_2}]_{\mathfrak{g}} = 0$$

alors $\mathcal{C}'\mathfrak{g} \subset \mathcal{C}_1\mathfrak{g}$ et donc si on se donne des coéfficients cijk arbitraires, les équations de Jacobi sont automatiquement vérifiées

on a dim $R_{n,p} = \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} \times p$

et on a GL $K^n * R_{n,p} = F_{n,p}$

Calculons dim $F_{n,p}$ - on a d'après le paragraphe 1 proposition 2 dim $F_{n,p}$ = dim $R_{n,p}$ - $\inf\limits_{\mathfrak{g} \in R_{n,p}} H_p(\mathfrak{g})$

où $H_p(\mathfrak{g}) = \{ h \in GLK^n$ tels que $h * \mathfrak{g} \in R_{n,p} \}$

soit donc $\mathfrak{g} \in R_{n,p}$

On voit donc immédiatement que si $\mathfrak{g} \in R_{n,p}$ et si h laisse invariant $\sum_{k=1}^{p} K\, e_{n-p+k}$ alors $h * \mathfrak{g} \in R_{n,p}$

réciproquement si $\mathfrak{g} \in R_{n,p}$; si $h * \mathfrak{g} \in R_{n,p}$ et si l'un ou l'autre des espaces $\mathcal{C}_1\mathfrak{g}$ ou $\mathcal{C}'\mathfrak{g}$ est égal à $\sum_{k=1}^{p} K\, e_{n-p+k}$ alors h conserve $\sum_{1}^{p} K\, e_{n-p+k}$

car $\mathcal{C}_1(h * \mathfrak{g}) = h(\mathcal{C}_1\mathfrak{g})$

et $\mathcal{C}'(h * \mathfrak{g}) = h(\mathcal{C}'\mathfrak{g})$

et si $h * \mathfrak{g} \in R_{n,p}$ on a

$$h(\mathcal{C}_1\mathfrak{g}) \supset \sum_{k=1}^{p} K\, e_{n-p+k}$$

$$h(\mathcal{C}'\mathfrak{g}) \subset \sum_{k=1}^{p} K\, e_{n-p+k}$$

Montrons donc pour tout n et p il existe une algèbre $\mathcal{G}$ telle que soit $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} = \sum_1^p K\, e_{n-p+k}$

ou $\mathcal{C}' \mathcal{G} = \sum_1^p K\, e_{n-p+k}$

supposons $2 \leqslant p \leqslant n-2$

et considérons l'algèbre de $R_{n,p}$, suivante

$[e_1, e_2] = e_{n-p+1}$

$[e_2, e_3] = e_{n-p+2}$

$[e_3, e_4] = e_{n-p+1}$

$[e_4, e_5] = e_{n-p+2}$

c.à.d.

$[e_i, e_{i+1}] = e_{n-p+1}$ si i est impair

$[e_i, e_{i+1}] = e_{n-p+2}$ si i est pair

les crochets non exprimés étant nuls.

alors on a $\mathcal{C}_1 \mathcal{G} = \sum_1^p K\, e_{n-p+k}$

en effet pour que $X = \sum a^i e_i$ appartienne à $\mathcal{C}_1 \mathcal{G}$

on doit avoir $[X, e_k] = 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-p$

or $[e_i, e_k] = 0$ sauf pour $i = k-1$, $i = k+1$)

on a alors $[X, e_k] = a^{k-1}[e_{k-1}, e_k] - a^{k+1}[e_k, e_{k+1}]$

comme $[e_{k-1}, e_k]$ et $[e_k, e_{k+1}]$ sont linéairement indépendan...

cette condition entraîne $a^k = 0 \quad \forall\, k \leqslant n-p$

si p = 0 ou 1 on peut évidemmment trouver $\mathcal{G}$ tel que

dim $\mathcal{C}' \mathcal{G} = 1$ si $n \geqslant 3$

dim $\mathcal{C}' \mathcal{G} = 0$

Notons H_p le sous groupe de GLK^n laissant invariant le sous espace $\left(\sum_{k=1}^{p} K e_{n-p+k} \right)$

on a donc pour tout $\mathcal{V}$ dans $R_{n.p}$

$H_p(\mathcal{V}) \supset H_p$

et on a vu que si $0 \leqslant p \leqslant n-2$ $n \geqslant 3$

il existe $\mathcal{V}$ dans $R_{n.p}$ telle que

$H_p(\mathcal{V}) = H_p$

on a donc $\min\limits_{\mathcal{V} \in R_{n,p}} \dim H_p(\mathcal{V}) = \dim H_p$

et $\dim F_{n.p} = \dim R_{n.p} + n^2 - \dim H_p$

ce qui donne $\dim F_{n.p} = \dim R_{n.p} + n(n-p)$ $0 \leqslant p \leqslant n-2$

d'où $\boxed{\dim F_{n,p} = \frac{p(n-p)(n-p-1)}{2} + n(n-p) = \frac{p(n-p)(n-p+1)}{2}}$

On a donc le résultat suivant :

> Il existe dans N_n un fermé $F_{n.p}$ différent de N_n irréductible et de dimension $\frac{p(n-p)(n-p+1)}{2}$ $1 \leqslant p \leqslant n-2$

7 - Réductibilité de N_n pour $n \geqslant 11$

On considère le fermé irréductible $F_{n.p}$ de dim $\frac{p(n-p)\ (n-p+1)}{2}$

On voit alors qu'évidemment si n est assez grand on aura $\dim F_{n.p} > \frac{5n^2}{4}$ pour p convenable.

et dim $F_{np} > n^2 - 9$ pour p convenable, n assez grand.

Calculons de manière précise

On calcule le maximum de la fonction

$x \longmapsto x(n-x)(n-x+1)$ pour $0 \leq x \leq n$

on trouve que le maximum est compris entre $\frac{n}{3}$ et $\frac{n+1}{3}$

pour $\frac{n}{3}$ on trouve $F_{n\frac{n}{3}} = \dfrac{\frac{n}{3} \cdot \frac{2n}{3} \cdot (\frac{2n}{3} + 1)}{2}$

$$F_{n\frac{n}{3}} = \frac{n^2}{9}\left(\frac{2n}{3} + 1\right) = \frac{2n^3}{27} + \frac{n^2}{9}$$

On voit donc qu'il existe un ensemble irréductible dans N_n dont la dimension est de l'ordre de $\frac{2n^3}{27}$ lorsque n est grand.

Montrons que dim $F_{n,4} \geqslant n^2 - 9$ pour $n \geqslant 11$

on a dim $F_{n,4} = \dfrac{4 \times (n-4)(n-3)}{2} = 2(n-4)(n-3)$

nous avons dim $F_{n,4} - (n^2 - 9) = 2n^2 - 14n + 24 - (n^2 - 9) =$

$n^2 - 14n + 33$

or la fonction $x \longmapsto x^2 - 14x + 33$ est croissante pour $x \geqslant 7$

pour n = 11 on a $n^2 - 14x + 33 = 0$

on a donc

pour $n = 11$ dim $F_{n,4} = n^2 - 9$

pour $n \geqslant 12$ dim $F_{n,4} > n^2 - 9$

Dans les deux cas on peut conclure que N_n n'est pas irréductible pour $n \geqslant 11$. En effet, on sait qu'il existe une compesante irréductible de N_n de dimension $\leqslant n^2-9$. Si N_n était irréductible on aurait dim $N_n \leqslant n^2 - 9$

Or $F_{n,4}$ est un fermé irréductible de N_n différent de N_n.

donc on devrait avoir dim $F_{n,4} <$ dim N_n

or ceci n'est pas vrai pour $n \geqslant 11$

Il reste donc à voir si N_n est irréductible pour $n = 7,8,9,10$.

On peut montrer que N_7 est réductible par une démonstration particulière. Il est sans doute très probable que N_8, N_9 et N_{10} le sont également mais je n'ai pu établir de démonstration jusqu'à présent.

8 - Réductibilité de N_7

Considérons l'ouvert des algèbres filiformes U_7

Il admet la représentation rationelle suivante.

(Chapitre III, paragraphe V)

$[x_1 \ x_2] = x_3$ $\qquad [x_3, x_4] = (\alpha - \delta)x_7$

$[x_1 \ x_3] = x_4$ $\qquad [x_3 \ x_5] = 0$

$[x_1 \ x_4] = x_5$

$[x_1 \ x_6] = x_7$

$[x_2 \ x_3] = \alpha x_5 + \beta x_6 + \gamma x_7$

$[x_2 \ x_4] = \alpha x_6 + \beta x_7$

$[x_2 \ x_5] = \delta x_7$

$[x_2 \ x_6] = 0$

Cet ouvert est contenu dans l'ouvert U_{12} défini par

dim $\mathcal{C}_1 \mathfrak{g} = 1$

dim $\mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = 2$

Calculons sur l'ouvert U_7 des algèbres filiformes la dimension de $\mathrm{Tr}\left(\mathcal{C}'\mathfrak{g}, \mathfrak{Im}\, \mathcal{C}'\mathfrak{g}\right) \cap \mathfrak{Im}\, \mathcal{C}_2 \mathfrak{g}$

on a $\mathfrak{Im}\, \mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = (x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7)$

et $\mathfrak{Im}\, \mathcal{C}' \mathfrak{g} \supset (x_5\ x_6\ x_7)$

donc $[\mathfrak{Im}\, \mathcal{C}_2 \mathfrak{g}, \mathcal{C}'\mathfrak{g}] \subset (x_5\ x_6\ x_7)$

et $\mathrm{Tr}\left(\mathcal{C}'\mathfrak{g} ; \mathfrak{Im}\, \mathcal{C}'\mathfrak{g}\right) \cap \mathfrak{Im}\, \mathcal{C}_2 \mathfrak{g} = (x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7)$

<u>Donc ce sous espace vectoriel est de dimension 6 sur tout l'ouvert des algèbres filiformes.</u>

Considérons maintenant l'algèbre de lie :

$$\mathfrak{g}_1 \qquad \begin{aligned}
[x_1\ x_2] &= x_3 \\
[x_1\ x_3] &= x_4 \\
[x_1\ x_4] &= x_6 \\
[x_1\ x_5] &= 0 \\
[x_1\ x_6] &= x_7 \\
[x_2\ x_3] &= x_5 \\
[x_2\ x_4] &= 0 \\
[x_2\ x_5] &= x_6 \\
[x_2\ x_6] &= -x_7 \\
[x_3\ x_4] &= x_7 \\
[x_3\ x_5] &= x_7
\end{aligned}$$

C'est une algèbre de lie nilpotente.

on a $\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1 = (X_3\ X_4\ X_5\ X_6\ X_7)$

$$\mathcal{C}_1\,\mathfrak{g}_1 = (X_7)$$

$$\mathcal{C}_2\,\mathfrak{g}_1 = (X_6\ X_7)$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1 = (X_4 - X_5\,,\ X_6\,,\ X_7)$$

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1\,,\ \mathrm{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1) = (X_1 - X_2\,,\ X_3\,,\ X_4\,,\ X_5\,,\ X_6\,,\ X_7)$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{C}_2\,\mathfrak{g}_1 = (X_1 + X_2\,,\ X_3\,,\ X_4\,,\ X_5\,,\ X_6\,,\ X_7)$$

donc $\mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1\,,\ \mathrm{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1) \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}_1 = (X_3\ X_4\ X_5\ X_6\ X_7)$

et est de dimension 5

Nous allons montrer à partir de ce résultat que N_7 est réductible.

Considérons l'ouvert U_{12}

$$U_{12} = \left\{ \mathfrak{g} \text{ telles que } \begin{array}{l} \dim \mathcal{C}_1\mathfrak{g} = 1 \\ \dim \mathcal{C}_2\mathfrak{g} = 2 \end{array} \right\}$$

l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ appartient à U_{12} ainsi que l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ de U_7 définie pour $\beta = 1 \quad \alpha = \gamma = d^2 = 0$

Considérons le système φ_{ijk} d'équations linéaires définies par composante sur X_k de $[[X, X_i]\, X_j] = 0$ sur l'ouvert U_{12} ce système d'équations linéaires dont les coéfficients sont des polynômes homogènes de degré 2 des variables C_{ijk} est de rang 5.

C'est-à-dire pour tout $\mathfrak{g}$ dans U_{12} il existe un déterminant $D_{\mathfrak{g}}(c_{ijk})$ d'ordre 5 extrait de la matrice définie par le système d'équations linéaires φ_{ijk} non nul pour $\mathfrak{g}$

Sur l'ouvert de N_n défini par $D_{\mathfrak{g}}(c_{ijk}) \neq 0$
qui contient $\mathfrak{g}$, on pourra exprimer une base de $\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$
dont les coordonnées soient des fonctions rationelles de
c_{ijk}

Plus précisément il existe des fonctions rationelles
$R_1^j(c_{ijk})$, $R_2^j(c_{ijk})$ définies en tout point de
l'ouvert $D_{\mathfrak{g}}(c_{ijk}) \neq 0$ et telles que
si $\mathfrak{g}$ appartient à cet ouvert alors si $y_i = \sum R_i^j(c_{ijk}) X_k$ $i=1,2$
y_1, y_2 forment une base de $\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$

Considérons l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ et l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ définies
plus haut.

Nous allons montrer qu'il existe un déterminant d'ordre 5
extrait de la matrice définie par les équations :
composantes sur X_k de $[[X, X_i], X_j] = 0$
non nul à la fois pour $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$

On considère les 5 équations linéaires

$$\text{composantes de } \quad \begin{array}{lll} [[x \;\; x_1] \;\; x_1] & \text{sur } x_4,\ x_6,\ x_7 & = 0 \\ [[x \;\; x_2] \;\; x_1] & \text{sur } x_4 \;\; x_7 & = 0 \end{array}$$

Elles s'écrivent pour $x = \sum a^i X_i$

$$\sum a^i \left(\sum_k c_{i1k}\; c_{k14}\right) = 0 \qquad \sum a^i \left(\sum_k c_{i2k}\; c_{k14}\right) = 0$$

$$\sum a^i \left(\sum_k c_{i1k}\; c_{k16}\right) = 0 \qquad \sum a^i \left(\sum_k c_{i2k}\; c_{k17}\right) = 0$$

$$\sum a^i \left(\sum_k c_{i1k}\; c_{k17}\right) = 0$$

pour $\mathcal{G}_1$ les équations s'écrivent

$$a^2 = 0$$
$$a^3 = 0$$
$$a^4 = 0$$
$$-a^1 = 0$$
$$a^5 = 0$$

pour $\mathcal{G}_0$ les équations s'écrivent

$$a^2 = 0$$
$$a^4 = 0$$
$$a^5 = 0$$
$$-a^1 = 0$$
$$a^3 = 0$$

On voit donc que le déterminant D_0 d'ordre 5 par rapport aux 5 premières variables a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 est différent de 0 pour $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_0$

Considérons donc l'ouvert U_0 défini par $D_0 \neq 0$
Cet ouvert contient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_0$

Montrons que sur cet ouvert l'ensemble des $\mathcal{G} \in U_0$ tels que dim $\quad Tn\,(\mathcal{C}'\mathcal{G}\,;\,\mathcal{A}nn\;\mathcal{C}'\mathcal{G}) \cap \mathcal{A}nn\;\mathcal{C}^2\mathcal{G} \geqslant p$
est un fermé dans U_0 .

En effet soit $\quad y_{ij} = \sum_k c_{ijk}\, X_k$ un système de générateurs de l'espace $\quad \mathcal{C}'\mathcal{G}$

et $\quad y_1 = \sum R_1^k(c_{ijk})\, X_k \quad$ une base de $\quad \mathcal{C}_2\,\mathcal{G}$

$$y_2 = \sum R_2^k(c_{ijk})\; X_k$$

pour que $x = \sum a^i X_i$ appartienne à $\mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}, \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$

il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} \big[[x \quad y_{ij}]\ y_{kl}\big] &= 0 \\ [x \quad y_1] &= 0 \\ [x \quad y_2] &= 0 \end{aligned}$$

Ceci donne un système d'équations linéaires dont les coéfficients sont des fonctions rationelles des C_{ijk} définis sur U_o.

Donc l'ensemble des $\mathfrak{g} \in U_o$ tels que $\dim \mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}; \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$ est l'ensemble des zéros d'un certain nombre de déterminants; c'est un fermé.

Donc l'ensemble des $\mathfrak{g}$ de U_o tels que $\dim \mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}, \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}$ soit minimum est un ouvert de U_o

Or cet ouvert ne rencontre pas $U_o \cap U_7$ non vide

puisque sur $U_o \cap U_7$ nous avons

$\dim \mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}, \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g} = 6$

et au point $\mathfrak{g}_1$ de U_o

nous avons $\dim \mathrm{Tr}(\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1, \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}'\mathfrak{g}_1) \cap \mathfrak{Im}\,\mathcal{C}_2\mathfrak{g}_1 = 5$

Il y a donc 2 ouverts non vides ne se remontrant pas dans U_7 - Donc U_7 n'est pas irréductible.

9 - Réductibilité de T_n pour $n \geq 7$.

T_n : algèbres triangulaires

nous avons $GL\,K^7 * T_7 = N_7$

donc T_7 est réductible, sinon N_7 serait irréductible

D'autre part on a un morphisme surjectif de T_n dans T_{n-1}.

On en déduit que T_n est réductible pour $n \geqslant 7$.

B I B L I O G R A P H I E

(1) BOURBAKI — Algèbres de Lie.

2 Séminaire — So phus lie Théorie des algèbres de Lie 1954-1955

3 J. DIXMIER — Sur les algèbres dérivées d'une algèbre de Lie. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Volume 51. Part 4 pp.541-544 (1955)

4 J. DIXMIER — Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Acta Scientiarum Mathematicarum. Tom XVI, fasc. 3-4 (1955)

5 C. CHEVALLEY — Fondements de la géométrie algébrique. Cours de Mathématiques approfondies (1957-1958)

6 G. HOCHSCHILD & J.P. SERRE — Cohomology of lie algebras. Annals of Mathematics (1955) p. 591-603.