

Exercice 1.

1.1. Soit P un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients réels C^∞ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\phi(x) = x_n - x_n^2 + \sum_{1 \leq j \leq n-1} x_j^2$. On suppose qu'il existe un voisinage ouvert Ω de 0, des constantes $C > 0$ et $\lambda_0 \geq 1$ tels que $\forall w \in C_c^\infty(\Omega), \forall \lambda \geq \lambda_0$ on ait

$$(*) \quad C \|e^{-\lambda\phi} Pw\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \lambda^{3/2} \|e^{-\lambda\phi} w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda^{1/2} \|e^{-\lambda\phi} \nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |(Pu)(x)| \leq |u(x)| + \sum_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|.$$

Montrer que u est nulle au voisinage de 0. On applique $(*)$ à χu où $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de 0. Il vient

$$\begin{aligned} \lambda^{3/2} \|e^{-\lambda\phi} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda^{1/2} \|e^{-\lambda\phi} \nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|e^{-\lambda\phi} [P, \chi] u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C \|e^{-\lambda\phi} \chi Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|e^{-\lambda\phi} [P, \chi] u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_1 \|e^{-\lambda\phi} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_1 \|e^{-\lambda\phi} \chi \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

et donc pour λ assez grand

$$\frac{1}{2} \lambda^{3/2} \|e^{-\lambda\phi} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|e^{-\lambda\phi} [P, \chi] u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On a, en supposant que χ est supportée dans $\{|x_n| \leq 1/2\}$,

$$\text{supp}([P, \chi]u) \subset \{x_n \geq 0\} \cap \text{supp } \nabla \chi \subset \{0 \leq x_n \leq 1/2\} \cap \text{supp } \nabla \chi = K.$$

La fonction ϕ est strictement positive sur K : pour $x_n \in [0, 1/2], x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\phi = x_n(1 - x_n) + |x'|^2 \leq 0 \implies x = 0$$

et comme $0 \notin \text{supp } \nabla \chi$ (χ vaut 1 au voisinage de 0), on a donc $\min_K \phi = \sigma_0 > 0$. Il vient avec $\omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) < \sigma_0/2\}$ (un voisinage de 0)

$$e^{-\lambda\sigma_0/2} \frac{1}{2} \lambda^{3/2} \|\chi u\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{1}{2} \lambda^{3/2} \|e^{-\lambda\phi} \chi u\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{1}{2} \lambda^{3/2} \|e^{-\lambda\phi} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq e^{-\lambda\sigma_0} C \| [P, \chi] u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

et donc

$$\frac{1}{2} \lambda^{3/2} \|\chi u\|_{L^2(\omega)} \leq e^{-\lambda\sigma_0/2} C \| [P, \chi] u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui implique $\chi u = 0$ sur ω et comme χ vaut 1 au voisinage de 0, on obtient que u est nulle sur un voisinage de 0.

1.2. Donner un exemple d'opérateur P satisfaisant $(*)$. Le laplacien (cf. cours).

Exercice 2. Soient u_1, u_2 des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\text{supp } u_1 \cup \text{supp } u_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}, \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n, & |(\Delta u_1)(x)| \leq |u_1(x)| + |u_2(x)|, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, & |(\Delta u_2)(x)| \leq |u_1(x)| + |u_2(x)|. \end{cases}$$

2.1. En utilisant les résultats du cours, donner une inégalité de Carleman satisfaite par le laplacien pour le poids ψ avec $\psi(x) = x_n - \mu \frac{x_n^2}{2} + \frac{|x'|^2}{2\mu}$, où μ est un paramètre strictement positif. On a vu en cours qu'il existe Ω ouvert voisinage de 0 tel que pour $w \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \geq \lambda_0$,

$$C\|e^{-\lambda\psi}\Delta w\| \geq \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}w\|.$$

2.2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert de 0, des constantes $C > 0$ et $\lambda_0 \geq 1$, tels que pour $\lambda \geq \lambda_0$, $w_1, w_2 \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$C\|e^{-\lambda\psi}\Delta w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C\|e^{-\lambda\psi}\Delta w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On ajoute deux estimations ci-dessus.

2.3. Montrer que u_1 et u_2 sont nulles au voisinage de $\{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de 0. Il vient

$$\begin{aligned} \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}\chi u_1\| + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}\chi u_2\| &\leq C\|e^{-\lambda\psi}\Delta\chi u_1\| + C\|e^{-\lambda\psi}\Delta\chi u_2\| \\ &\leq C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_1\| + C\|e^{-\lambda\psi}\chi\Delta u_1\| + C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_2\| + C\|e^{-\lambda\psi}\chi\Delta u_2\| \\ &\leq C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_1\| + C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_2\| + 2C\|e^{-\lambda\psi}\chi \cdot (|u_1| + |u_2|)\| \\ &\leq C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_1\| + C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_2\| + 2C\|e^{-\lambda\psi}\chi u_1\| + 2C\|e^{-\lambda\psi}\chi u_2\|. \end{aligned}$$

Par suite en supposant λ assez grand, il vient

$$\frac{1}{2}\lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}\chi u_1\| + \frac{1}{2}\lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}\chi u_2\| \leq C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_1\| + C\|e^{-\lambda\psi}[\Delta, \chi]u_2\|.$$

On a, en supposant que χ est supportée dans $\{|x_n| \leq 1/\mu\}$,

$$\text{supp}([\Delta, \chi]u) \subset \{x_n \geq 0\} \cap \text{supp } \nabla\chi \subset \{0 \leq x_n \leq 1/\mu\} \cap \text{supp } \nabla\chi = K.$$

La fonction ψ est strictement positive sur K : pour $x_n \in [0, 1/\mu]$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\psi = x_n(1 - \mu x_n/2) + |x'|^2/2\mu \leq 0 \implies x = 0$$

et comme $0 \notin \text{supp } \nabla\chi$ (χ vaut 1 au voisinage de 0), on a donc $\min_K \psi = \sigma_0 > 0$. Il vient avec $\omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \psi(x) < \sigma_0/2\}$ (un voisinage de 0)

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\sigma_0/2}\frac{1}{2}\lambda^{3/2}\|\chi u_1\|_{L^2(\omega)} + e^{-\lambda\sigma_0/2}\frac{1}{2}\lambda^{3/2}\|\chi u_2\|_{L^2(\omega)} \\ \leq \frac{1}{2}\lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}\chi u_1\|_{L^2(\omega)} + \frac{1}{2}\lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\psi}\chi u_2\|_{L^2(\omega)} \leq Ce^{-\lambda\sigma_0}\left(\|[\Delta, \chi]u_1\| + \|[\Delta, \chi]u_2\|\right), \end{aligned}$$

ce qui démontre que u_1, u_2 sont nulles au voisinage de 0.

Exercice 3.

On considère le champ de vecteurs complexes sur $\mathbb{R}_{t,x}^2$ donné par $L = D_t + it^2 D_x$ et l'on pose $f_\mu(t, x) = \int_0^t s^2(1-s)ds + \frac{x^2}{2\mu}$, où μ est un paramètre > 0 .

3.1. Calculer le symbole $p(t, x, \tau, \xi)$ du champ L . Calculer le crochet de Poisson $\{\bar{p}, p\}$ et montrer qu'il n'existe pas de voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\exists C > 0, \forall (t, x) \in W, \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad |\{\bar{p}, p\}(t, x, \tau, \xi)| \leq C|p(t, x, \tau, \xi)|.$$

On a $\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\} = \{\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p\} = \{\tau, t^2 \xi\} = 2t\xi$ et si on avait

$$|2t\xi| \leq C(|\tau| + t^2|\xi|)$$

cela impliquerait pour $\tau = 0, \xi = 1$, que $2 \leq C|t|$, ce qui est impossible au voisinage de $t = 0$.

3.2. Calculer $L_{\lambda, \mu} = e^{-\lambda f_\mu} L e^{\lambda f_\mu}$. On a $f = \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{x^2}{2\mu}$

$$L_{\lambda, \mu} = D_t - i\lambda t^2(1 - t) + it^2(D_x - i\lambda x/\mu) = D_t + \frac{\lambda t^2 x}{\mu} + it^2(D_x - \lambda + \lambda t)$$

3.3. Montrer que $D_t + xt^2 = e^{-ixt^3/3} D_t e^{ixt^3/3}$. Donner une expression de $L_{\lambda, \mu}$ en fonction de $M_{\lambda, \mu} = D_t + it^2(D_x - \lambda + \lambda t(1 - \frac{t^2}{3\mu}))$. Il vient

$$\begin{aligned} L_{\lambda, \mu} &= D_t + \frac{\lambda t^2 x}{\mu} + it^2(D_x - \lambda + \lambda t) = e^{-i\lambda x t^3/3\mu} D_t e^{i\lambda x t^3/3\mu} + it^2(D_x - \lambda + \lambda t) \\ &= e^{-i\lambda x t^3/3\mu} \left(D_t + it^2 \left(e^{i\lambda x t^3/3\mu} D_x e^{-i\lambda x t^3/3\mu} - \lambda + \lambda t \right) \right) e^{i\lambda x t^3/3\mu} \\ &= e^{-i\lambda x t^3/3\mu} \left(D_t + it^2 \left(D_x - \lambda \frac{t^3}{3\mu} - \lambda + \lambda t \right) \right) e^{i\lambda x t^3/3\mu} \\ &= e^{-i\lambda x t^3/3\mu} \left(D_t + it^2 \left(D_x - \lambda + \lambda t \left(1 - \frac{t^2}{3\mu} \right) \right) \right) e^{i\lambda x t^3/3\mu} \end{aligned}$$

3.4. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives C, μ, λ_0 et un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tels que $\forall v \in C_c^\infty(\Omega), \forall \lambda \geq \lambda_0, C\|L_{\lambda, \mu} v\|_{L^2} \geq \|v\|_{L^2}$. Il suffit d'examiner, après une transformation de Fourier dans la variable x ,

$$N = D_t + it^2(\eta + \lambda t(1 - \epsilon t^2)), \quad \epsilon = 1/(3\mu).$$

Prenons $\mu = 1/3$, et examinons

$$P = D_t + it^2 \underbrace{(\eta + \lambda t(1 - t^2))}_{\zeta}$$

où η est un paramètre réel. On peut supposer que les fonctions u sur lesquelles P agit sont supportées dans $|t| \leq 1/2$, de sorte que $1 - t^2 \geq 3/4$ et $\frac{d}{dt}t(1 - t^2) = 1 - 3t^2 \geq 1/4$. Le signe de ζ est donc une fonction croissante. On calcule pour $v \in C_c^\infty([-1/2, 1/2]; \mathbb{C})$,

$$2 \operatorname{Re} \langle Pv, i \underbrace{(\operatorname{sign} \zeta + t)}_{\substack{\text{de même signe que } \zeta \\ \text{sur } |t| \leq 1/2}} v \rangle \geq \|v\|^2 \implies \|v\| \leq 3\|Pv\|.$$

3.5. Montrer que si u est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, supportée dans le demi-plan $\{t \geq 0\}$ et telle que $Lu = 0$, alors u est identiquement nulle. On considère χ une fonction C_c^∞ égale à 1 au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ et supportée dans $|t| \leq 1/2$. Avec $\mu = 1/3$, il vient

$$C\|e^{-\lambda f} L \chi u\| \geq \|e^{-\lambda f} \chi u\|,$$

et par conséquent, comme $Lu = 0$,

$$\|e^{-\lambda f} \chi u\| \leq C \|e^{-\lambda f} [L, \chi] u\|.$$

Le support de $[L, \chi]u$ est un compact K inclus dans $1/2 \geq t \geq 0$, ne contenant pas $0_{\mathbb{R}^2}$. Par suite, la fonction f est strictement positive sur ce compact: sinon pour un $1/2 \geq t \geq 0$ et un $x \in \mathbb{R}$

$$\exists t \in [0, 1/2], \exists x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^t s^2(1-s) + \frac{3x^2}{2} \leq 0 \implies t = 0, x = 0.$$

Posons $\min_K f = \sigma_0 > 0$. On considère, l'ouvert

$$\omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, f(t, x) < \sigma_0/2\}.$$

On note que ω contient $0_{\mathbb{R}^2}$ et est donc un voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$. Il vient

$$e^{-\lambda \sigma_0/2} \|\chi u\|_{L^2(\omega)} \leq \|e^{-\lambda f} \chi u\|_{L^2(\omega)} \leq \|e^{-\lambda f} \chi u\| \leq C \|e^{-\lambda f} [L, \chi] u\| \leq C e^{-\lambda \sigma_0} \|[L, \chi] u\|$$

et donc

$$\|\chi u\|_{L^2(\omega)} \leq C e^{-\lambda \sigma_0/2} \|[L, \chi] u\|$$

ce qui implique $\chi u = 0$ sur ω et comme χ vaut 1 sur un voisinage de 0, ceci implique donc $u = 0$ sur un voisinage de 0. Ce problème étant invariant par translation horizontale (par rapport à x), on trouve que u est nulle au voisinage de la droite d'équation $t = 0$. Comme l'opérateur

$$Q = (D_t - it^2 D_x)(D_t + it^2 D_x)$$

est elliptique sur $\{t > 0\}$ avec une partie principale réelle et que $Qu = 0$, le résultat standard de continuation unique montre que la fonction continue u est nulle sur $\{t > 0\}$ et donc sur $\mathbb{R}^2$ ($\text{supp } u \subset \{t \geq 0\}$).