C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 5-8, 1987 

Théorie des nombres/*Number Theory*

# Résidu en s = 1 des fonctions zêta p-adiques

Pierre COLMEZ

***Résumé*** — Nous démontrons que le résidu en $s=1$ de la fonction zêta $p$-adique d'un corps de nombres totalement réel est égal à sa valeur conjecturale.

## Residue at $s=1$ of $p$-adic zeta functions

***Abstract*** — *We prove that the residue at $s=1$ of the p-adic zeta function of a totally real number field equals its conjectured value.*

Soit F une extension totalement réelle de $\mathbf{Q}$ de degré $n$. Serre [5] a construit une fonction zêta $p$-adique que nous noterons $\zeta_{F,p}$ et qui interpole les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta de Dedekind de F. Sa construction utilise les formes modulaires et est en grande partie algébrique. Utilisant les méthodes de Shintani [7], Barsky [3] et Cassou-Noguès [4] ont donné une construction plus analytique de $\zeta_{F,p}$. Cette fonction zêta $p$-adique est holomorphe sur $\mathbf{Z}_p-\{1\}$ et possède au plus un pôle simple en $s=1$. Le but de cette Note est de calculer le résidu en $s=1$ de $\zeta_{F,p}$. On obtient :

THÉORÈME :

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{F,p}(s)=\frac{2^n h R_p E_p(1)}{w\sqrt{D}},$$

*où $h$ est le nombre de classes de* F, D *son discriminant,* $R_p$ *son régulateur p-adique, $w$ le nombre de racines de l'unité contenues dans* $F(w=2)$ *et* $E_p(s)=\prod_{\mathfrak{p}\mid p}(1-(N\mathfrak{p})^{-s})$.

Cette formule est l'analogue exact de la formule classique de Dedekind et avait été conjecturée depuis longtemps; elle avait été démontrée dans le cas abélien et Serre [6] avait prouvé que le premier membre de l'égalité a une valuation $p$-adique au moins égale à celle du second membre. Il est à noter que, si $R_p$ et $\sqrt{D}$ ne sont définis qu'au signe près, leur rapport est bien défini (*cf.* [2]).

COROLLAIRE. — *La fonction $\zeta_{F,p}(s)$ a un pôle en $s=1$ si et seulement si la conjecture de Leopoldt est vraie pour* (F, $p$).

1. MÉTHODE DE SHINTANI. — Plongeons F dans $\mathbf{R}^n$. Soient $p$ un nombre premier, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $U_p$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_F$ totalement positives et congrues à 1 modulo $p$. On définit la relation d'équivalence suivante sur les idéaux de $\mathcal{O}_F$ premiers à $p$ : $\mathfrak{a}\equiv\mathfrak{b}\Leftrightarrow\exists\,\alpha\in\mathfrak{a}^{-1}$, $\alpha$ totalement positif, $\alpha\equiv 1\,(p)$, tel que $\mathfrak{b}=(\alpha)\,\mathfrak{a}$. Soient G un système de représentants pour cette relation d'équivalence et $X=(\mathbf{R}_+^*)^n$. On définit alors pour $\mathfrak{a}\in G$,

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s)=\sum_{\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{b})^s}=\frac{1}{[U_p:V]}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}\sum_{\substack{\alpha\in X/V\\ \alpha\in 1+p\mathfrak{a}^{-1}}}\frac{1}{N(\alpha)^s},$$

cette dernière égalité étant valable pour tout sous-groupe V d'indice fini de $U_p$. Soit $D=X\cap\left\{z\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n}z_i=1\right\}$. Soient $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}$, $n-1$ vecteurs de D et $\mathfrak{S}_{n-1}$ le groupe des

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0249-6291/87/03050005 $2.00 © Académie des Sciences

Source gallica.bnf.fr / Archives de l'Académie des sciences

permutations de $n-1$ éléments. Si $\sigma \in S_{n-1}$, on pose $f_{1,\sigma}=1$ et $f_{i,\sigma}=\prod_{j<i} \varepsilon_{\sigma(j)}$ pour $2 \leqq i \leqq n$.

On dit que $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ vérifient (H) si :

1. le groupe multiplicatif V engendré par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ est discret et libre de rang $n-1$.
2. $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$, $\det(f_{i,\sigma})$ est de même signe que $\varepsilon(\sigma)$, la signature de $\sigma$.

Si J est une partie non vide de $[1, n]$, on note $C_{\sigma,J}$ le cône ouvert engendré par les $f_{\sigma,j}$ pour $j$ dans J et on définit une relation d'équivalence $\sim$ par : $(\sigma_1, J_1) \sim (\sigma_2, J_2)$ s'il existe $v \in V$ tel que $C_{\sigma_1,J_1}=v\,C_{\sigma_2,J_2}$. On note S un système de représentants.

LEMME 1. — *Si* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ *vérifient* (H), *alors* $X/V=\bigcup_{(\sigma,J)\in S} C_{\sigma,J}$.

LEMME 2. — *Si* U *est un sous-groupe discret de* D, *libre de rang* $n-1$, *il existe* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in U$, *tels que :* $\forall k \geqq 1$, $\varepsilon_1^k, \ldots, \varepsilon_{n-1}^k$ *vérifient* (H).

Nous pouvons appliquer le lemme 2 à $U=U_p$. Notons alors $V_r$ le groupe engendré par $\varepsilon_1^{p^r}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{p^r}$ pour $r \geqq 0$. Posons aussi $f_{i,\sigma,r}=(f_{i,\sigma})^{p^r}$ et $L_{i,\sigma,r}(z)=\mathrm{Tr}(f_{i,\sigma,r}z)$. Notons

$$D_{\sigma,J,r}=\{z=\sum_{j\in J} x_j p f_{j,\sigma,r} \mid 0<x_j \leqq 1\}$$

et

$$D_{\sigma,J,r,\mathfrak{a}}=D_{\sigma,J,r} \cap (1+p\,\mathfrak{a}^{-1});$$

l'ensemble $D_{\sigma,J,r,\mathfrak{a}}$ est fini. Posons

$$F_{y,\sigma,J,r}=e^{-\mathrm{Tr}(yz)} \prod_{j\in J} (1-e^{-p\,L_{j,\sigma,r}(z)})^{-1}$$

et

$$F_{\mathfrak{a},\sigma,r}=\sum_{J} \sum_{y\in D_{\sigma,J,r,\mathfrak{a}}} F_{y,\sigma,J,r}$$

[la somme sur J étant prise sur les J tels que $(\sigma, J) \in S$].

LEMME 3 :

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s)=\frac{1}{[U_p:V_r]}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}\frac{1}{\Gamma(s)^n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\int_X F_{\mathfrak{a},\sigma,r}(z)\prod_{i=1}^{n}(z_i^{s-1}\,dz_i).$$

## 2. PROLONGEMENT ANALYTIQUE ET VALEURS AUX ENTIERS NÉGATIFS.

LEMME 4. — *Soient* $\varphi$ *une fonction* $C^\infty$ *sur* $(\mathbb{R}_+)^n$, *à décroissance rapide à l'infini et* $\mathscr{L}=(L_1, \ldots, L_n)$ *une famille de formes linéaires à coefficients strictement positifs. Posons*

$$H(\varphi, \mathscr{L}, s)=\frac{1}{\Gamma(s)^n}\int_X \frac{\varphi(z)}{\prod_{i=1}^{n} L_i(z)}\prod_{i=1}^{n}(z_i^{s-1}\,dz_i).$$

*L'intégrale définissant* $H(\varphi, \mathscr{L}, s)$ *converge pour* $\mathrm{Re}(s)>1$ *et admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec au plus des pôles simples aux pôles de* $\Gamma(ns-n)/\Gamma(s)$. *De plus, soit* $k\in\mathbb{N}$ *et soit* $K_k=\{\mathfrak{k}=(k_1, \ldots, k_n) \mid k_1+\ldots+k_n=n(k+1)\}$; *il existe alors des constantes* $\alpha_{\mathfrak{k}}(\mathscr{L})$, *fractions rationnelles à coefficients dans* $\mathbf{Q}$ *en les coefficients des* $L_i$, *telles que*

$$H(\varphi, \mathscr{L}, -k)=\sum_{\mathfrak{k}\in K_k} \alpha_{\mathfrak{k}}(\mathscr{L})\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{k_i}\varphi\,|_{z=0}.$$

La démonstration de ce lemme repose sur l'idée suivante : on pose $X_i=\{z \mid \forall j\neq i,\ z_j<z_i\}$, on a $\int_X=\sum_{i=1}^{n}\int_{X_i}$ et on effectue sur $X_i$ le changement de variables $z_i=u_i$, $z_j=u_iu_j$ pour $j\neq i$, puis on utilise les résultats classiques sur la distribution $Pf(x^{s-1}/\Gamma(s))$.

*Remarque.* — Soit $\varphi_{\mathfrak{a},\sigma,r}=F_{\mathfrak{a},\sigma,r}\prod_{i=1}^{n}L_{i,\sigma,r}$. Appliquant le lemme 4 à $\varphi=\varphi_{\mathfrak{a},\sigma,r}$ et $L_i=L_{i,\sigma,r}$, nous en déduisons la valeur aux entiers négatifs de $\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, et regardant l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, leur rationalité.

3. Distributions $p$-adiques. — Plongeons F dans $\mathbf{C}_p^n$ et notons X l'adhérence de $\mathcal{O}_F$. Soit $(g_1,\ldots,g_n)$ une base de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathbf{Z}$, X s'identifie alors à $\mathbf{Z}_p^n$. Si $x\in X$, on a $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{C}_p^n$ et $x=y_1g_1+\ldots+y_ng_n$ avec $y_i\in\mathbf{Z}_p$. Soit LA l'espace des fonctions localement analytiques sur X, muni de sa topologie usuelle, et LA′ le dual topologique de LA. Soit $T\in LA'$, on définit $\varphi_T(z)=T(e^{\mathrm{Tr}(zx)})$ que l'on note $\int_X e^{\mathrm{Tr}(zx)}\,dT$ et

$$G_T(w)=\int_X\prod_{i=1}^{n}(1+w_i)^{y_i}\,dT.$$

*Remarque.* — $\varphi_T(z)=G_T(e^{\mathrm{Tr}(g_1z)}-1,\ldots,e^{\mathrm{Tr}(g_nz)}-1)$.

Théorème [1]. — *Soit* $B(0,1^-)=\{w\in\mathbf{C}_p \mid |w|_p<1\}$ *et soit* $T\in LA'$; *alors* $G_T(w)$ *est une série entière convergeant pour* $w\in B(0,1^-)^n$ *et réciproquement, si* $G(w)$ *est une série entière convergeant sur* $B(0,1^-)^n$, *il existe* $T\in LA'$ *telle que* $G=G_T$.

Lemme 5. — *Il existe* $T_{\mathfrak{a},\sigma,r}\in LA'$, *telle que* $\varphi_{T_{\mathfrak{a},\sigma,r}}=\varphi_{\mathfrak{a},\sigma,r}$; *de plus* $T_{\mathfrak{a},\sigma,r}$ *est restreinte à* $1+pX$.

Lemme 6. — *Soit* $P_{k,\mathscr{L}}(x)=\sum_{\mathfrak{k}\in K_k}\alpha_{\mathfrak{k}}(\mathscr{L})\prod_{i=1}^{n}x_i^{k_i}$ (*cf.* lemme 4), *et notons* $\mathscr{L}_{\sigma,r}$ *la famille de formes linéaires* $(L_{i,\sigma,r})_{1\leq i\leq n}$; *on a :*

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(-k)=\frac{1}{[U_p:V_r]}N(\mathfrak{a})^k\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\int_X P_{k,\mathscr{L}_{\sigma,r}}(x)\,dT_{\mathfrak{a},\sigma,r}.$$

Lemme 7 :

$$\int_X dT_{\mathfrak{a},\sigma,r}=\lim_{z\to 0}\varphi_{\mathfrak{a},\sigma,r}(z)=\frac{1}{p^n}\frac{\varepsilon(\sigma)\det(f_{i,\sigma,r})}{N(\mathfrak{a})^{-1}\sqrt{D}}.$$

Lemme 8. — *Soit* $\psi(x)$ *la fonction caractéristique de* $1+pX$ *et soit* $k_m=-1+(p-1)p^m$. *Écrivons* $L_i(z)=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}z_j$; *il existe alors une série entière* $F(\mathscr{L})$ *en les* $(a_{i,j}-1)$, *de terme constant* $-1/n!$ *convergeant si, pour tout* $(i,j)$, $|a_{i,j}-1|_p\leq p^{-1}$, *et telle que* $\lim_{m\to\infty}(k_m+1)P_{k_m,\mathscr{L}}(x)\psi(x)=F(\mathscr{L})\psi(x)$, *la limite étant prise pour la topologie de* LA.

4. Calcul du résidu. — Utilisant les lemmes 5, 6, 7, 8, on obtient :

$$\lim_{m\to\infty}(k_m+1)\zeta_{\mathfrak{a}}(-k_m)=\frac{1}{p^n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}F(\mathscr{L}_{\sigma,r})\frac{\varepsilon(\sigma)\det(f_{i,\sigma,r})}{\sqrt{D}\,[U_p:V_r]}$$

Le membre de gauche est indépendant de $r$ et est égal à l'opposé du résidu en $s=1$ de la fonction zêta $p$-adique partielle $\zeta_{\mathfrak{a},p}$. On va faire tendre $r$ vers l'infini dans le second membre. D'après la construction de $F(\mathscr{L})$, $F(\mathscr{L}_{\sigma,r})$ va tendre vers $-1/n!$, et utilisant les relations

$$f_{i,\sigma,r} \equiv 1 + p^r \sum_{j<i} \mathrm{Log}_p \varepsilon_{\sigma(j)} \quad [p^{2r-1}] \qquad \text{et} \qquad [U_p : V_r] = p^{(n-1)r}[U_p : V_0],$$

on obtient :

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varepsilon(\sigma)\det(f_{i,\sigma,r})}{\sqrt{D}\,[U_p : V_r]} = \frac{n R_p(V_0)}{\sqrt{D}\,[U_p : V_0]} = n\frac{R_p(U_p)}{\sqrt{D}},$$

$R_p(V)$ désignant le régulateur $p$-adique du groupe V.

COROLLAIRE :

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta_{\mathfrak{a},p}(s) = \frac{1}{p^n}\frac{R_p(U_p)}{\sqrt{D}}.$$

On a alors, $\zeta_{F,p} = \sum_{\mathfrak{a}\in G} \zeta_{\mathfrak{a},p}$, et donc, $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{F,p}(s) = (\mathrm{Card}\, G)\, R_p(U_p)/\sqrt{D}$. Un calcul de Card G en fonction de $h$ nous permet alors d'obtenir la formule annoncée dans l'introduction.

Reçue le 6 avril 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Y. AMICE, Duals, *Proceedings of the conference on p-adic analysis*, 1978, Nijmegen, p. 1-15, Nijmegen, Mathematische Institut Katholische Universität, 1978.

[2] Y. AMICE et J. FRESNEL, Fonctions zêta $p$-adiques des corps de nombres abéliens réels, *Acta Arith.*, 20, 1972, p. 353-384.

[3] D. BARSKY, Fonctions zéta $p$-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels, *Groupe d'études d'analyse ultramétrique*, 1977-1978; errata, 1978-1979.

[4] P. CASSOU-NOGUÈS, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta $p$-adiques, *Inv. Math.*, 51, 1979, p. 29-59.

[5] J.-P. SERRE, Formes modulaires et fonctions zêta $p$-adiques, dans *Modular functions of one variable III*, 1972, Antwerpen, p. 191-268, Berlin : Springer-Verlag, *Lecture Notes in Math.* n° 350.

[6] J.-P. SERRE, Sur le résidu de la fonction zêta $p$-adique d'un corps de nombres, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 83-126.

[7] T. SHINTANI, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers, *J. of Fac. of Sc., Univ. of Tokyo*, 23, 1976, p. 393-417.

*Institut Fourier, Université de Grenoble-I*, 38000 *Grenoble*.