Théorie des nombres/*Number Theory*

Une formule du produit pour les périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe

Pierre COLMEZ

Résumé — On réinterprète l'existence (conjecturale) d'une formule du produit pour les périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe en termes de hauteurs. La vérification de cette formule pour les périodes des courbes de Fermat permet de donner une démonstration géométrique de la formule de Chowla-Selberg.

A product formula for periods of abelian varieties with complex multiplication

Abstract — *We interpret the (conjectural) product formula for periods of abelian varieties with complex multiplication in terms of heights. The verification of this formula for the periods of the Fermat curves allows us to give a geometric proof of the Chowla-Selberg formula.*

Abridged English Version — The aim of this Note is to discuss the existence of a product formula for periods of algebraic varieties analogous to the product formula for algebraic numbers. Let $\bar{\mathbf{Q}}$ be the algebraic closure of $\mathbf{Q}$ contained in $\mathbf{C}$ and, if p is a prime number, let us fix once and for all an embedding of $\bar{\mathbf{Q}}$ into $\bar{\mathbf{Q}}_p$. Let $\mathscr{P}$ be the set of places of $\mathbf{Q}$. If $p \in \mathscr{P}$ is finite, let $\mathbf{B}_p$ be the ring of p-adic periods constructed by Fontaine [11] (the "universal infinitesimal thickening of $\mathbf{C}_p$"). Let v_p be the p-adic valuation of $\bar{\mathbf{Q}}_p$ normalised by $v_p(p)=1$; then v_p has a natural extension to $\mathbf{B}_p$ [3] (but not as a valuation). Set $\mathbf{B}_\infty = \mathbf{C}$ and let $|\ \ |_\infty$ (resp. $|\ \ |_p$) be the usual norm on $\mathbf{C}$ (resp. the multiplicative function from $\mathbf{B}_p$ to $\mathbf{R}_+$ given by $|x|_p = p^{-v_p(x)}$).

Let X be an algebraic variety defined over a finite extension K of $\mathbf{Q}$. For each $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}, \bar{\mathbf{Q}})$, we obtain, via scalar extension, a variety X^σ defined over $\mathbf{C}$ and $\bar{\mathbf{Q}}_p$. The comparison theorems between the different cohomology theories (Betti-de Rham, Betti-étale p-adique, étale-p-adique de Rham) give us bilinear (period) maps $(\omega, u) \to \langle \omega^\sigma, u \rangle_p$ from $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}) \times \mathrm{H}_i(\mathrm{X}^\sigma(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ with values in $\mathbf{B}_p$ for all $i \in \mathbf{N}$, all $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}, \bar{\mathbf{Q}})$ and all $p \in \mathscr{P}$. Let us now choose a non-zero element ω of $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X})$ and for each $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}, \bar{\mathbf{Q}})$, a non-zero element u_σ of $\mathrm{H}_i(\mathrm{X}^\sigma(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. We would like to see the $\langle \omega^\sigma, u_\sigma \rangle_p$ as the conjugates of a single transcendental number (this cannot really be the case, as in general, there is no way to choose the u_σ in a compatible way). So, we can ask whether the product

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}, \bar{\mathbf{Q}})} |\langle \omega^\sigma, u_\sigma \rangle_p|_p \tag{1}$$

has a meaning, and if so, what its value is. We encounter three difficulties. The most serious one is that $|\langle \omega^\sigma, u_\sigma \rangle_p|_p$ depends in general on the embedding of $\bar{\mathbf{Q}}$ into $\bar{\mathbf{Q}}_p$ that we have chosen. One case in which this does not occur is the case where X is an abelian variety with complex multiplication (the same thing would be true of any motive with complex multiplication) and ω is an eigenvector for this complex multiplication. The second difficulty is that the product depends on the choices of the u_σ, but in the case of complex multiplication there is a way to deal with this problem as well. The last difficulty is that contrarily to the case of algebraic numbers where the infinite product is in fact finite, in the case of periods the product does not converge. For example in the case of $2\pi i$ (fundamental period of $\mathbf{G}_m$), we have $v_p(2\pi i) = 1/(p-1)$ and the logarithm of (1) is formally equal to

Note présentée par Jean-Marc FONTAINE.

0764-4442/91/03130899 $ 2.00 © Académie des Sciences

Source gallica.bnf.fr / Archives de l'Académie des sciences

$\log 2\pi + \zeta'(1)/\zeta(1)$. We renormalise this sum using the functional equation of ζ and setting $\zeta'(1)/\zeta(1) = -\zeta'(0)/\zeta(0) = -\log 2\pi$. Using this renormalization, we see that the value of the product is 1 as in the case of an algebraic number. The (conjectural) product formula states that this will be the case for the periods of abelian varieties with complex multiplication. The main result of this Note is the computation of $|\langle \omega^\sigma, u_\sigma \rangle_p|_p$ for p finite. This allows us to give a meaning to the product using the functional equation for Artin L-functions to renormalise it, to strengthen the monomial relations between periods of abelian varieties found by Shimura [8] and Deligne [5] (this, together with some computations of Coleman [2] on Fermat curves, gives a geometric proof of the exact Chowla-Selberg formula, thus strengthening a theorem of Gross [7]), and to interpret the product formula in terms of heights, thus giving a conjectural relation between logarithmic derivatives of Artin L-functions at $s=0$ and periods of abelian varieties with complex multiplication.

---

1. Formule du produit. — Soit $\bar{\mathbf{Q}}$ la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Notons c la conjugaison complexe. Pour tout nombre premier p, choisissons une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et un plongement de $\bar{\mathbf{Q}}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_p$. Soient $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\bar{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathbf{m}_p$ son idéal maximal. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$. Si $p \in \mathcal{P}$, on pose $\mathbf{B}_p = \mathbf{C}$ si $p = \infty$ et $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}^+_{\mathrm{DR},p}$ si $p < \infty$. On note v_p la valuation p-adique de $\bar{\mathbf{Q}}_p$ normalisée par $v_p(p) = 1$ et on prolonge v_p à $\mathbf{B}_p$ comme dans [3]. Si $p = \infty$, on désigne par $|\ |_p$ la norme usuelle sur $\mathbf{C}$ et si $p < \infty$, on pose $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.

Soit $\gamma \in \mathrm{H}_1(\mathbf{G}_m(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. Si $p \in \mathcal{P}$, posons $t_p = \int_\gamma dx/x \in \mathbf{B}_p$; en particulier, on a $t_\infty = 2i\pi$. Si X est une variété abélienne définie sur $\bar{\mathbf{Q}}$ (resp. $\bar{\mathbf{Q}}_p$) et $p \in \mathcal{P}$ (resp. $p < \infty$), notons $\langle\ ,\ \rangle_p$ l'accouplement périodes de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}) \times \mathrm{H}_1(\mathrm{X}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ (resp. $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}) \times \mathrm{T}_p(\mathrm{X})$) à valeurs dans $\mathbf{B}_p$ (*cf.* [4]).

Si K est un corps de nombres, on note $\mathcal{O}_\mathrm{K}$ son anneau d'entiers, Δ_K son discriminant, $\mathrm{H}_\mathrm{K} = \mathrm{Hom}(\mathrm{K}, \bar{\mathbf{Q}})$ et $h_\mathrm{K} = [\mathrm{K} : \mathbf{Q}]$. Si E est un corps **CM** et $\Phi \subset \mathrm{H}_\mathrm{E}$ est un type **CM** de E, on dit qu'une variété abélienne X définie sur un corps L (qui sera soit un corps de nombres, soit $\bar{\mathbf{Q}}$, soit $\bar{\mathbf{Q}}_p$) est de type (E, Φ) [resp. ($\mathcal{O}_\mathrm{E}$, Φ)], si X est de dimension $d = h_\mathrm{E}/2$, si on a une injection de E (resp. $\mathcal{O}_\mathrm{E}$) dans $\mathrm{End}(\mathrm{X}) \otimes \mathbf{Q}$ (resp. End (X)) et si le type **CM** de X est Φ.

Soient E un corps **CM**, Φ un type **CM** de E, $\mathrm{K} \subset \bar{\mathbf{Q}}$ une extension finie de $\mathbf{Q}$ contenant tous les conjugués de E et X une variété abélienne de type (E, Φ) définie sur K. Si $\tau \in \mathrm{H}_\mathrm{E}$, soit ω_τ un générateur du sous-K-espace vectoriel de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X})$ sur lequel $\alpha \in \mathrm{E}$ agit par multiplication par $\tau(\alpha)$. Si $\sigma \in \mathrm{H}_\mathrm{K}$, notons X^σ, ω^σ_τ les objets déduits de X, ω_τ par extension des scalaires. La conjugaison complexe induit un isomorphisme topologique de $\mathrm{X}^\sigma(\mathbf{C})$ sur $\mathrm{X}^{c\sigma}(\mathbf{C})$ et donc un isomorphisme encore noté c de $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}^\sigma(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ sur $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}^{c\sigma}(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$. Notons que si $\alpha \in \mathrm{E}$. on a $c(\alpha . u) = \alpha . c(u)$. Choisissons pour chaque $\sigma \in \mathrm{H}_\mathrm{K}$, un élément non nul u_σ de $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}^\sigma(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$, de telle sorte que l'on ait $u_{c\sigma} = c\, u_\sigma$) et posons

$$\langle \omega^\sigma_\tau, \omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma \rangle_p = \left(\langle \omega^\sigma_\tau, u_\sigma \rangle_p \frac{t_p}{\langle \omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma \rangle_p} \right)^{1/2}.$$

Remarquons que le quotient de $\langle \omega^\sigma_\tau, \omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma \rangle^2_p$ par $\langle \omega^\sigma_\tau, u_\sigma \rangle^2_p$ est un élément de K^* indépendant de $p \in \mathcal{P}$ (mais pas de σ) : c'est une conséquence des formules de Riemann.

CONJECTURE 1 (formule du produit) :

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \prod_{\sigma \in H_K} |\langle \omega_\tau^\sigma, \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma \rangle_p|_p = 1.$$

Remarque. — (i) Le produit dans le membre de gauche de la formule du produit n'est pas convergent; on le renormalise en utilisant la convention 3 ci-dessous et le corollaire 5.

(ii) Cette conjecture est une version plus précise des conjectures formulées dans [3]; en particulier, elle les implique.

(ii) La conjecture ne dépend en fait que du type **CM** de X. De manière plus précise, on a :

PROPOSITION 2. — *La quantité*

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{\sigma \in H_K} \log (|\langle \omega_\tau^\sigma, \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma \rangle_p|_p),$$

ne dépend que de E, τ, Φ *et pas des choix de* X, K, ω_τ *ou* u_σ.

2. CONSTRUCTIONS PRÉLIMINAIRES. — Soient $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et, pour $L = \mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Q}_p$, soit $\mathscr{C}(\mathscr{G}_L, \mathbf{Q})$ [resp. $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}_L, \mathbf{Q})$] le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel des fonctions (resp. fonctions centrales) localement constantes de $\mathscr{G}_L$ dans $\mathbf{Q}$. Soit $\mathbf{Q}^{cm} \subset \bar{\mathbf{Q}}$ le composé de toutes les extensions de type CM de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}^{ab} \subset \bar{\mathbf{Q}}$ le composé de toutes les extensions abéliennes de $\mathbf{Q}$. Alors $\mathbf{Q}^{ab} \subset \mathbf{Q}^{cm}$ sont deux extensions galoisiennes de $\mathbf{Q}$. Soit $\mathscr{C}\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{C}\mathscr{M}^{ab}$) le sous-espace des fonctions $a \in \mathscr{C}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ se factorisant à travers $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{cm}/\mathbf{Q})$ [resp. $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{ab}/\mathbf{Q})$] et telles que $a(g) + a(cg)$ ne dépende pas de $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$. On a alors $\mathscr{C}\mathscr{M}^{ab} \subset \mathscr{C}\mathscr{M}^0 = \mathscr{C}\mathscr{M} \cap \mathscr{C}^0(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$.

On montre facilement que $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C}$ (resp. $\mathscr{C}\mathscr{M}^0 \otimes \mathbf{C}$, resp. $\mathscr{C}\mathscr{M}^{ab} \otimes \mathbf{C}$) admet comme base les caractères d'Artin (resp. les caractères d'Artin, resp. les caractères de Dirichlet (vus comme caractères d'Artin), dont la fonction L ne s'annule pas en 0).

Si $s \in \mathbf{C}$, soit $Z(., s)$ (resp. μ_{Art}) l'application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathscr{C}^0(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C}$ définie par $Z(\chi, s) = L'(\chi, s)/L(\chi, s)$ [resp. $\mu_{\mathrm{Art}}(\chi) = \log f_\chi$, où f_χ est le conducteur de χ] si χ est un caractère d'Artin. L'inclusion de $\bar{\mathbf{Q}}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_p$ permet de considérer $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ comme un sous-groupe de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ et la restriction d'un élément a de $\mathscr{C}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ nous définit un élément de $\mathscr{C}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q})$ que nous noterons encore a. Les applications $Z(., s)$ pour $\Re(s) > 1$ et μ_{Art} se décomposent alors naturellement sous la forme

$$\mu_{\mathrm{Art}} = \sum_{p < \infty} (\log p) \mu_{\mathrm{Art}, p} \qquad \text{et} \qquad Z(., s) = -\sum_{p < \infty} (\log p) Z_p(., s),$$

où $Z_p(., s)$ (resp. $\mu_{\mathrm{Art}, p}$) est une application de $\mathscr{C}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q})$ à valeurs dans $\mathbf{Q}(p^{-s})$ (resp. $\mathbf{Q}$). Notons que la décomposition de $Z(., s)$ ne converge plus pour $s = 1$. Ceci nous permet de faire la convention suivante :

CONVENTION 3. — *Soit* $\Sigma = \sum_{p < \infty} x_p$ *une série. On suppose qu'il existe* $a \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0$ *tel que* $x_p = -(\log p) Z_p(a, 1)$ *pour tout* p *sauf un nombre fini. Soit* $a^* \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0$ *définie par* $a^*(g) = a(g^{-1})$. *On donnera alors à* Σ *la valeur*

$$-Z(a^*, 0) - \mu_{\mathrm{Art}}(a) + \sum_{p < \infty} (x_p + (\log p) Z_p(a, 1)),$$

valeur obtenue en évaluant formellement la série et en utilisant l'équation fonctionnelle reliant $Z(a, s)$ *à* $Z(a^*, 1-s)$ *débarrassée de ses facteurs* Γ'/Γ *et* $\log \pi$.

Si E est un corps **CM**, Φ est un type **CM** de E, $\tau \in H_E$ et $K \subset \bar{\mathbf{Q}}$ une extension finie de $\mathbf{Q}$ contenant tous les conjugués de E, soit $a_{E, \tau, \Phi}$ (resp. $a^0_{E, \tau, \Phi}$) l'élément de $\mathscr{C}\mathscr{M}$ (resp.

$\mathscr{CM}^0$) donné par la formule

$$a_{E,\tau,\Phi}(g)=\begin{cases}1 & \text{si } g\tau\in\Phi,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\qquad\left(\text{resp. } a^0_{E,\tau,\Phi}=\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in H_K} a_{E,\sigma\tau,\sigma\Phi}\right).$$

On montre facilement que les $a_{E,\tau,\Phi}$ (resp. les $a^0_{E,\tau,\Phi}$), E décrivant les corps CM, τ les éléments de H_E et Φ les types **CM** de E, forment une famille génératrice de $\mathscr{CM}$ (resp. $\mathscr{CM}^0$).

Finalement, posons $A_{E,\Phi}=\sum_{\tau\in\Phi} a_{E,\tau,\Phi}$ et $A^0_{E,\Phi}=\sum_{\tau\in\Phi} a^0_{E,\tau,\Phi}$.

3. Résultats p-adiques. — Soit X une variété de type $(\mathcal{O}_E, \Phi)$ définie sur $\bar{\mathbf{Q}}_p$. Soit $\mathscr{X}$ un modèle de X sur $\mathcal{O}_p$ ayant bonne réduction modulo $\mathbf{m}_p$ (un tel modèle existe toujours). Si $\tau\in H_E$, soit $H^\tau(X)$ le sous $\bar{\mathbf{Q}}_p$-espace vectoriel de $H^1_{DR}(X)$ sur lequel $\alpha\in\mathcal{O}_E$ agit par multiplication par $\tau(\alpha)$. On peut identifier $H^1_{DR}(\mathscr{X})$ [resp. $H^0(\mathscr{X}, \Omega^d_{\mathscr{X}})$] à un réseau de $H^1_{DR}(X)$ [resp. $H^0(X, \Omega^d_X)$] et on pose $H^\tau(\mathscr{X})=H^\tau(X)\cap H^1_{DR}(\mathscr{X})$. On définit alors $v_p(\omega)$ si $\omega\in H^\tau(X)$ [resp. $\omega\in H^0(X, \Omega^d_X)$] par $v_p(\omega)=0$ si ω est un générateur du $\mathcal{O}_p$-module $H^\tau(\mathscr{X})$ [resp. $H^0(\mathscr{X}, \Omega^d_{\mathscr{X}})$] et $v_p(x\omega)=v_p(x)+v_p(\omega)$ si $x\in\bar{\mathbf{Q}}_p$.

Théorème 4. — *Si* $\tau\in H_E, \omega_\tau\in H^\tau(X)$ *et u est un générateur du* $\mathcal{O}_E\otimes\mathbf{Z}_p$ *module* $T_p(X)$, *alors*

(i) $v_p(\langle\omega_\tau, u\rangle_p)=v_p(\omega_\tau)+Z_p(a_{E,\tau,\Phi}, 1)-\mu_{Art,p}(a_{E,\tau,\Phi})$.

(ii) $\omega_\Phi=\pm\bigwedge_{\tau\in\Phi}\omega_\tau\in H^0(X, \Omega^d_X)$ *et*

$$v_p(\omega_\Phi)=\sum_{\tau\in\Phi} v_p(\omega_\tau)+\frac{1}{4}v_p(\Delta_E)-\frac{1}{2}\mu_{Art,p}(A_{E,\Phi}).$$

Corollaire 5. — *Soient* K *un corps de nombres et* X *une variété abélienne de type* (E, Φ). *Alors on a, pour tout* $p<\infty$, *sauf pour un nombre fini,*

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in H_K}\log\left(|\langle\omega^\sigma_\tau, \omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma\rangle_p|_p\right)=-(\log p)Z_p(a^0_{E,\tau,\Phi}, 1).$$

On ramène la démonstration de ce théorème à l'étude des groupes p-divisibles à multiplication formelle dont un cas particulier particulièrement maniable est celui des groupes de Lubin-Tate. On utilise les renseignements fournis par ce cas particulier et un théorème de Fontaine [6] donnant une recette pour reconstruire (presque) un groupe formel à partir de son module de Dieudonné, pour traiter le cas général.

4. Réinterprétation de la formule du produit.

Lemme 6. — *La quantité*

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\left(\sum_{\sigma\in H_K}\log\left(|\langle\omega^\sigma_\tau, \omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma\rangle_\infty|_\infty\right)-\frac{1}{2}\sum_{p<\infty}\log p\sum_{\sigma\in H_K} v_p(\omega^\sigma_\tau)-v_p(\omega^\sigma_{c\tau})\right)$$

ne dépend que de E, τ, Φ *et pas des choix de* X, K, ω_τ, $\omega_{c\tau}$ *ou* u_σ; *on la notera* ht(E, τ, Φ).

C'est une conséquence immédiate de la proposion 2 et du (i) du théorème 4.

Théorème 7. — (i) *Il existe une unique application* **Q**-*linéaire que nous noterons* ht *de* $\mathscr{CM}^0$ *dans* **R** *telle que si* E *est un corps* CM, $\tau\in H_E$ *et* Φ *est un type* CM *de* E, *alors on a*

$$\mathrm{ht}(a^0_{E,\tau,\Phi})=\mathrm{ht}(E, \tau, \Phi).$$

(ii) *Soit* X *une variété abélienne de type* $(\mathcal{O}_E, \Phi)$ *définie sur* $\bar{\mathbf{Q}}$; *sa hauteur de Faltings est donnée par la formule*

$$h_{\mathrm{Fal}}(X) = \mathrm{ht}\,(A^0_{E,\Phi}) + \frac{1}{2}\,\mu_{\mathrm{Art}}(A^0_{E,\Phi}).$$

L'unicité est claire car les $a^0_{E,\tau,\Phi}$ engendrent $\mathscr{CM}^0$; l'existence est une conséquence des relations monomiales entre les périodes prouvées par Shimura [8] et Deligne [5] dans le cas $p=\infty$ et par Blasius, Gillard et Wintenberger [10] dans le cas $p<\infty$ et du (i) du théorème 4 qui permet de contrôler les nombres rationnels apparaissant naturellement quand on compare les valeurs de $\mathrm{ht}(a)$ obtenues à partir de deux décompositions différentes de a comme combinaison linéaire de $a^0_{E,\tau,\Phi}$. Le (ii) suit alors du (ii) du théorème 4.

CONJECTURE 8. — (i) *On a* $\mathrm{ht}(a) = Z(a^*, 0)$ *pour tout* $a \in \mathscr{CM}^0$.

(ii) *Si* X *est une variété abélienne de type* $(\mathcal{O}_E, \Phi)$ *définie sur* $\bar{\mathbf{Q}}$, *alors on a*

$$h_{\mathrm{Fal}}(X) = Z(A^0_{E,\Phi}, 0) + 1/2\,\mu_{\mathrm{Art}}(A^0_{E,\Phi}).$$

Notons que le (i) implique le (ii) [on a $(A^0_{E,\Phi})^* = A^0_{E,\Phi}$]. D'autre part, comme conséquence du théorème 4 (i) et de la convention 3, on obtient

THÉORÈME 9. — (i) *La formule du produit pour* E, τ, Φ *équivaut à l'égalité*

$$\mathrm{ht}(a^0_{E,\tau,\Phi}) = Z((a^0_{E,\tau,\Phi})^*, 0).$$

(ii) *La conjecture* 8 (i) *est équivalente à la véracité de la formule du produit pour les périodes de toutes les variétés abéliennes à multiplication complexe.*

Notons que la conjecture 8 permet d'exprimer une partie des périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe en termes de dérivées logarithmiques de fonctions-L d'Artin en $s=0$. Le résultat principal dans la direction de ces conjectures est le théorème suivant qui précise un théorème d'Anderson [1].

THÉORÈME 10. — (i) *La conjecture* 8 (i) *est vérifiée pour tout* $a \in \mathscr{CM}^{ab}$ *ou, de manière équivalente, la formule du produit est vraie pour les périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe par une extension abélienne de* $\mathbf{Q}$.

(ii) *La hauteur de Faltings d'une variété abélienne de type* $(\mathcal{O}_E, \Phi)$ *est donnée par la formule de la conjecture* 8 (ii) *si* E *est une extension abélienne de* $\mathbf{Q}$.

La démonstration se fait en calculant $\mathrm{ht}(a)$ et $Z(a^*, 0)$ séparément et en comparant les résultats ainsi obtenus. Le calcul de $\mathrm{ht}(a)$ utilise les jacobiennes des courbes de Fermat et en particulier les calculs de Coleman [2] sur la matrice de Frobenius des courbes de Fermat (en fait, on n'a pas besoin du résultat précis, on n'utilise que la valuation p-adique des termes de cette matrice). Le calcul de $Z(a^*, 0)$ quant à lui, utilise la formule de Lerch.

5. LA FORMULE DE CHOWLA-SELBERG. — Les théorèmes 7 et 10 permettent de donner une démonstration « géométrique » de la formule de Chowla-Selberg, précisant ainsi un théorème de Gross [7]. Soit $E = \mathbf{Q}(\sqrt{-D}) \subset \bar{\mathbf{Q}}$ un corps quadratique imaginaire de discriminant $-D$ et soit χ le caractère quadratique modulo D associé à l'extension $E/\mathbf{Q}$. Soient $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_h$ des représentants du groupe des classes d'idéaux fractionnaires de E que l'on considèrera comme des réseaux de $\mathbf{C}$ et soit w le nombre de racines de l'unité dans E. Soit Δ la forme modulaire de poids 12 habituelle. La formule de Chowla-Selberg

se lit alors (*cf.* [9], Ch. IX, § 4, (7)) :

$$\prod_{i=1}^{h} \Delta(\mathbf{a}_i)\Delta(\mathbf{a}_i^{-1}) = \left(\frac{2\pi}{D}\right)^{12h} \prod_{x=1}^{D-1} \Gamma\left(\frac{x}{D}\right)^{6w\chi(x)}.$$

Notons $\chi_{\mathrm{Art}} \in \mathscr{C}\mathscr{M}^{ab}$ le caractère d'Artin associé à χ et soit X une courbe elliptique à multiplication complexe par $\mathcal{O}_E$ définie sur $\bar{\mathbf{Q}}$; alors on a

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\zeta'_E(0)}{\zeta_E(0)} & = & \dfrac{1}{12h}\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \log(\Delta(\mathbf{a}_i)\Delta(\mathbf{a}_i^{-1})) & = 2h_{\mathrm{Fal}}(X) - \dfrac{1}{2}\log D \\ \| & & & \| \\ \dfrac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \dfrac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} & = & \log 2\pi - \log D + \dfrac{w}{2h}\displaystyle\sum_{x=1}^{D-1} \chi(x)\log\Gamma\left(\frac{x}{D}\right) & = \mathrm{ht}(1+\chi_{\mathrm{Art}}) \end{array}.$$

On obtient alors deux démonstrations de la formule de Chowla-Selberg; l'une « analytique » en passant par la gauche du diagramme et qui utilise la formule limite de Kronecker et la formule de Lerch, l'autre « géométrique » en passant par la droite du diagramme et qui utilise la définition de la hauteur de Faltings, le théorème 7 et des calculs sur les courbes de Fermat.

Note remise le 22 octobre 1991, acceptée le 4 novembre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. W. ANDERSON, Logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions and the periods of Abelian varieties, *Comp. Math.*, 45, 1982, p. 315-332.

[2] R. F. COLEMAN, On the Frobenius Matrices of Fermat Curves, dans *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 1454, 1989.

[3] P. COLMEZ, Périodes de variétés abéliennes à multiplication complexe, etc., *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, 1989, p. 139-142.

[4] P. COLMEZ, Périodes *p*-adiques des variétés abéliennes, *Math. Ann.* (à paraître).

[5] P. DELIGNE, Hodge cycles on abelian varieties, dans *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 900, 1982.

[6] J.-M. FONTAINE, Groupes *p*-divisibles sur les corps locaux, *Astérisque*, 47-48, Soc. Math. de France, 1977.

[7] B. H. GROSS, On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg, *Inv. Math.*, 45, 1978, p. 193-211.

[8] G. SHIMURA, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, *Ann. of Math.*, 111, 1980, p. 313-375.

[9] A. WEIL, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 88, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[10] J.-P. WINTENBERGER (en préparation).

[11] J.-M. FONTAINE, *Le corps des périodes p-adiques*, preprint.

C.N.R.S., L.M.E.N.S., U.R.A. n° 762, École normale supérieure,
45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.