LA SÉRIE PRINCIPALE UNITAIRE DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Pierre Colmez

Résumé. — Cet article s'inscrit dans le cadre de la correspondance de Langlands locale p-adique pour la série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Nous utilisons la théorie des (φ,Γ)-modules de Fontaine pour établir, dans les cas semi-stable et non géométrique, un lien direct entre (le dual de) la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et le (φ,Γ)-module associés à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Abstract. — This paper is devoted to the p-adic local Langlands correspondence for the unitary principal series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. We use Fontaine's theory of (φ,Γ)-modules to establish, in the semistable and non geometric cases, a direct link between the (dual of the) representation of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and the (φ,Γ)-module attached to the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Table des matières

Introduction

Cet article est une fusion partielle de **[24]** et **[25]** qui sont destinés à rester inédits. Certaines questions qui y sont soulevées sont traitées dans **[28]** ; quand c'est le cas, ceci est indiqué par une note de bas de page.

0.1. Notations

Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier(1). On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\deg(g) \in \mathbf{Z}$ l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$.

Soit $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, alors le noyau $\mathscr{H}$ de χ est aussi égal à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on note σ_a l'élément de Γ défini par $\chi(\sigma_a) = a$.

Dans tout l'article, L désigne une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et de corps résiduel k_L. Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est l'ensemble des points L-rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathscr{T}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans L, et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $w(\delta)$ son *poids*, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

(1) L'extension à $p = 2$ ne devrait pas poser de problèmes autres que rédactionnels...

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)).$$

Si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de la représentation $L(\delta)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ définie par δ. Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1.

0.2. L'espace des paramètres $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$

On note (δ_1, δ_2) un élément générique de $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$, et on définit $\mathscr{S}$ comme la variété analytique obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On a donc une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L} = \infty \in \mathbf{P}^0(L)$ si la fibre au-dessus de (δ_1, δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0.$$

Si $s \in \mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où

- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} = \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} \neq \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) = w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) > w(s)$.

Remarque 0.1. — Les exposants "ng", "cris", "st", "ord" et "ncl" sont respectivement censés faire penser à "non géométrique", "cristalline", "semi-stable", "ordinaire" et "non classique". Cette terminologie vient de la classification des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires surconvergentes.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_0 \coprod \mathscr{S}_*$, où

- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si truc $\in \{\mathrm{ng}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{ord}, \mathrm{ncl}\}$ et machin $\in \{+, 0, *\}$, on note $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}_{\mathrm{machin}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}} = \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

Remarque 0.2. — L'application $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \mapsto s' = (x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1, \infty)$ est une involution de $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$

0.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Si $\mathscr{L} \in L$, on note $\log_{\mathscr{L}}$ le logarithme normalisé par $\log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}$, et si $\mathscr{L} = \infty$, on définit $\log_{\mathscr{L}}$ par $\log_\infty = v_p$; on a donc $\log_\infty(x) = \lim_{\mathscr{L}\to\infty} \mathscr{L}^{-1} \log_{\mathscr{L}}(x)$.

Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+$, on note δ_s le caractère $(x|x|)^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$. Remarquons que, si $s \in \mathscr{S}_*$, on ne peut avoir $\mathscr{L} \neq \infty$ que si δ_s est de la forme x^i, avec $i \in \mathbf{N}$. On associe à s les représentations $B(s)$, $M(s)$ et $\Pi(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ définies de la manière suivante.

• $B(s)$ est l'ensemble des $\phi : \mathbf{Q}_p \to L$ de classe[(2)] $\mathscr{C}^{u(s)}$ telles que $x \mapsto \delta_s(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^{u(s)}$ en 0. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est donnée par la formule

$$\big(\phi \star_s \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big)(x) = (x|x|\delta_1^{-1})(ad - bc)\, \delta_s(cx + d)\phi\Big(\frac{ax + b}{cx + d}\Big).$$

• Si δ_s n'est pas de la forme x^i, avec $i \in \mathbf{N}$, on prend pour $M(s)$ l'espace vectoriel engendré par 1, et les $\delta_s(x - a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$.

Si $\delta_s = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, on note $M(s)$ l'intersection avec $B(s)$ de l'espace vectoriel engendré par les $\delta_s(x - a)$ et les $\delta_s(x - a)\log_{\mathscr{L}}(x - a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$.

• Finalement, si $s \in \mathscr{S}_*$, on pose $\Pi(s) = B(s)/\widehat{M(s)}$, où $\widehat{M(s)}$ désigne l'adhérence de $M(s)$ dans $B(s)$.

Remarque 0.3. — Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_0$, on a $M(s) = 0$, mais il ne semble pas qu'il faille prendre $\Pi(s) = B(s)$ si on veut étendre la correspondance de Langlands p-adique aux représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui ne sont pas irréductibles. En fait, le cas des représentations ordinaires (cf. [**11**]) suggère que le bon espace à considérer pour $\Pi(s)$ doit être une extension[(3)] de $B(s)$ par $B(s')$, où $s' = (\delta_2, \delta_1, \mathscr{L})$.

Compte-tenu de la remarque ci-dessus, nous nous restreindrons au cas $s \in \mathscr{S}_*$. L'énoncé ci-dessous est maintenant démontré sauf dans le *cas exceptionnel* où $s \in \mathscr{S}^{\mathrm{cris}}$ et la représentation de Weil-Deligne associée n'est pas semi-simple.

---

(2) Rappelons [**26**] que ϕ est de classe $\mathscr{C}^u$ si $\phi(a + x)$ a un développement limité à l'ordre $[u]$ en tout a, et si le reste est $o(|x|^u)$, uniformément (en a) sur tout compact. L'application qui à $\phi \in B(s)$ associe les restrictions de ϕ et $\delta_s(x)\phi(1/x)$ à $\mathbf{Z}_p$ et $p\mathbf{Z}_p$ est un isomorphisme de $B(s)$ sur $\mathscr{C}^{u(s)}(\mathbf{Z}_p) \oplus \mathscr{C}^{u(s)}(p\mathbf{Z}_p)$, ce qui munit $B(s)$ d'une structure de L-banach.

(3) C'est effectivement ce que donne la construction de [**28**].

Théorème 0.4. — (i) *Si* $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*$, *alors* $\Pi(s) \neq 0$ *et est unitaire sauf si* $s \in \mathscr{S}_*^{\rm ncl}$. *De plus,*

- *si* $s \in \mathscr{S}_{\rm irr}$, *alors* $\Pi(s)$ *est irréductible et admissible,*
- *si* $s \in \mathscr{S}_*^{\rm ord} \coprod \mathscr{S}_*^{\rm ncl}$, *alors* $\Pi(s)$ *n'est pas irréductible : si* $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \mathscr{L})$, *alors* $(\frac{d}{dx})^{w(s)}$ *induit un morphisme* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*-équivariant de* $B(s)$ *dans* $B(s')$ *tuant* $M(s)$, *et* $\Pi(s)$ *est une extension de* $B(s')$ *par l'adhérence de l'image des fonctions localement polynomiales de degré* $< w(s)$ *dans* $\Pi(s)$.

(ii) *Si* $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ *et* $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$ *sont deux éléments distincts de* $\mathscr{S}_{\rm irr}$, *alors il existe un morphisme* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*-équivariant non nul* $\Pi(s) \to \Pi(s')$ *si et seulement si* $s, s' \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$ *et* $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.

Remarque 0.5. — (i) Il semble difficile de démontrer le th. 0.4 directement, et la démonstration dont on dispose passe par les (φ, Γ)-modules attachés aux représentations triangulines de dimension 2 (cf. th. 0.6). Elle établit en même temps une correspondance de Langlands locale p-adique pour ces représentations.

(ii) Breuil [**7**] a démontré une bonne partie du (i) pour $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$ et $w(s)$ petit ($w(s) \leqslant 2p$), en calculant la réduction modulo p de $\Pi(s)$. Par la même méthode (mais avec des calculs nettement plus compliqués), Breuil et Mézard [**10**] ont démontré une bonne partie du (i) pour $s \in \mathscr{S}_*^{\rm st}$ et $w(s)$ petit ($w(s) \leqslant p-1$). Leur calculs suggèrent une compatibilité(4) entre la correspondance en caractéristique 0 et celle en caractéristique p (cf. [**6**]) et laissent entrevoir la possibilité d'obtenir une réalisation géométrique de la correspondance de Langlands locale p-adique analogue à celle obtenue par Harris et Taylor [**35**] (cf. aussi [**33**]) dans le cas classique.

(iii) Breuil [**8, 9**] a démontré une bonne partie du point (i) dans le cas d'une représentation semi-stable associée à une forme modulaire f. Il a en fait démontré que la représentation $\Pi(s)$ intervient dans le morceau correspondant à f dans le complété p-adique de la cohomologie de la tour des courbes modulaires, si et seulement si s est le paramètre correspondant à la représentation(5) de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à f via la correspondance ci-dessus, ce qui tend à indiquer que cette correspondance est compatible avec une correspondance de Langlands p-adique globale qui reste à définir(6).

(4) Cette compatibilité est une des constituantes de la correspondance de [**28**].
(5) C'est la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ construite par Deligne [**29**].
(6) La correspondance globale modulo p, pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$, n'est autre que la conjecture de Serre ; pour la p-adique, le lecteur est renvoyé à [**11, 31, 32**].

0.4. Représentations triangulines de dimension 2

Fontaine a établi une équivalence de catégories entre les L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et les (φ,Γ)-modules étales sur le corps[(7)] $\mathscr{E}$. Cette équivalence de catégories a, par la suite, été complétée [**12, 39**] par des équivalences de catégories entre les (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$.

En utilisant ces équivalences de catégories, on construit [**22**], pour tout $s\in\mathscr{S}_*-\mathscr{S}_*^{\rm ncl}$, une L-représentation $V(s)$ de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La construction de $V(s)$ passe par celle du (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{R}$ qui lui correspond, duquel on déduit le (φ,Γ)-module $D(s)^\dagger$, étale sur $\mathscr{E}^\dagger$, attaché à $V(s)$, puis le (φ,Γ)-module $D(s)=\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D(s)^\dagger$, étale sur $\mathscr{E}$ correspondant à $V(s)$ via l'équivalence de catégories de Fontaine.

Par ailleurs, un (φ,Γ)-module étale D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est muni d'un inverse à gauche ψ de φ commutant à l'action de Γ. L'ensemble $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, des suites bornées[(8)] $x=(x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ de D vérifiant $\psi(x^{(n+1)})=x^{(n)}$ quel que soit $n\in\mathbf{Z}$, est alors muni d'une action naturelle [**27**, § III.2] du sous-groupe mirabolique $P(\mathbf{Q}_p)=\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ a\in\mathbf{Q}_p^*,\ b\in\mathbf{Q}_p\right\}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Le lien entre $\Pi(s)$ et $V(s)$ est donné par le résultat suivant, où $\check{D}$ désigne le dual de Tate[(9)] de D, si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$.

Théorème 0.6. — *Si $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$ n'est pas exceptionnel[(10)], le module $(\check{D}(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ est naturellement isomorphe au dual $\Pi(s)^*$ de $\Pi(s)$ en tant que module sous l'action du mirabolique.*

Remarque 0.7. — (i) Le th. 0.6 permet de démontrer une grande partie du th. 0.4. L'admissibilité de $\Pi(s)$ peut, par exemple, se déduire de [**6**], en utilisant la compatibilité [**2**] de la correspondance ci-dessus avec la correspondance de Langlands locale modulo p. L'irréductibilité et les cas d'isomorphisme peuvent se prouver en extrayant le module $D(s)$ de $(\check{D}^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$. En fait, il résulte de [**27**, th. 0.4] que $\Pi(s)$ est déjà irréductible comme représentation du mirabolique et de [**27**, th. 0.6] que $\Pi(s)\cong\Pi(s')$ si et seulement si c'est le cas en restriction au mirabolique.

(ii) On a $\mathscr{S}_{\rm irr}=\mathscr{S}_*^{\rm ng}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm cris}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm st}$. Dans cet article on ne traite que les cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$ et $s\in=\mathscr{S}_*^{\rm ng}$ (la méthode permet de traiter aussi la moitié du cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$) ; le lecteur est renvoyé à [**3**] pour les cas restants. Historiquement, le premier cas à avoir été traité [**24**] est le cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$; la démonstration a été adaptée par Berger et Breuil [**3**] pour traiter le cas où $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ (à part le cas exceptionnel) qui est particulièrement intéressant car c'est le seul où des isomorphismes non triviaux apparaissent (cf. (ii) du th. 0.4). La démonstration dans le cas $\mathscr{S}_*^{\rm ng}$ présente de grandes similarités avec celle du cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$, les nouveautés se trouvant plutôt dans la construction [**22**] des (φ,Γ)-modules $D(s)$ que dans la construction de l'isomorphisme du théorème 0.6.

(7) Cf. n° 1.1 pour la construction des corps $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et de l'anneau $\mathscr{R}$.

(8) Dans cet article, une suite est bornée si elle est contenue dans un compact.

(9) Le déterminant de $V(s)$ est $L(\delta_1\delta_2)$ et comme on est en dimension 2, on a $\check{D}(s)=D(s)\otimes(x|x|\,\delta_1^{-1}\delta_2^{-1})$.

(10) Le résultat s'étend surement au cas exceptionnel, mais cela demanderait à être rédigé.

(iii) La démonstration dans le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\rm st}$ a été inspirée par un sous-produit du résultat de Breuil [**9**] mentionné ci-dessus. Si $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n$ est une forme modulaire primitive de poids $k \geqslant 3$ dont le coefficient a_p vaut $p^{(k-2)/2}$, la représentation V_f de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui lui est associée est semi-stable de dimension 2 et de poids de Hodge-Tate 0 et $1-k$. Elle correspond à un point $s_f = (p^{(k-2)v_p(x)/2}, |x|^{-1}x^{1-k}p^{(k-2)v_p(x)/2}, \mathscr{L}_f)$ de $\mathscr{S}_*^{\rm st}$ (11). Par ailleurs, en utilisant la théorie des symboles modulaires, on sait associer à f une fonction L p-adique

$$L_p(f,s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{k/2}\langle x\rangle^{s-k/2}\ \mu_f, \quad \text{où } \mu_f \in \mathscr{D}_{(k-2)/2}(\mathbf{Q}_p) \text{ est vecteur propre de } \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right).$$

Le théorème de Breuil auquel il a été fait allusion plus haut affirme que $\mu_f \in \Pi(s_f)^*$. Maintenant, Kato [**38**] a construit un élément $\mathbf{z}_{\rm Kato}(f)$ du module d'Iwasawa $H^1_{\rm Iw}(\mathbf{Q}, V_f)$, et a montré, en utilisant une loi de réciprocité explicite [**37**], que $\mathbf{z}_{\rm Kato}(f)$ permettait de retrouver μ_f en utilisant la machine de Perrin-Riou [**43, 44, 16, 18**]. En réinterprétant la machine de Perrin-Riou en termes de (φ,Γ)-modules [**13, 17**], on en déduit [**20**] le fait que l'élément $\mathbf{z}_{\rm Kato}(f)$ donne naissance à la distribution μ_f quand on utilise l'isomorphisme $H^1_{\rm Iw}(\mathbf{Q}_p, V_f) \cong D(s_f)^{\psi=1}$ de Fontaine [**13**]. Tous les résultats mentionnés ci-dessus sont des résultats globaux qui utilisent des objets globaux, mais il est possible d'en dégager le principe purement local selon lequel les éléments de $D(s_f)^{\psi=1}$ fournissent des éléments de $\Pi(s_f)^*$ propres sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Une analyse plus détaillée de la situation mène au théorème 0.6.

(iv) Comme nous l'avons signalé plus haut, la correspondance de Langlands locale p-adique semble devoir s'étendre [**11**] au cas $s \in \mathscr{S}^{\rm ord}$; l'intérêt de ce cas est que les représentations ne sont plus irréductibles.

(v) Le module $\Pi(s)^*$ est muni d'une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il serait *très* intéressant(12) de pouvoir lire, directement en termes de (φ,Γ)-modules, l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que l'isomorphisme ci-dessus induit sur $(\check{D}^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$. Comme on sait déjà lire l'action du sous-groupe mirabolique, il « n'y a que » l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ qui reste à comprendre.

(vi) L'idée selon laquelle la correspondance de Langlands locale p-adique pouvait s'étendre à toute la série principale unitaire et pas seulement au cas localement algébrique a été inspirée par l'espoir que cette correspondance se comporte bien en famille. Cet espoir s'est trouvé confirmé (au moins dans le cas de la série principale) par les résultats de [**3**] qui, réinterprétés en termes

(11) L'invariant $\mathscr{L}_f$ est l'opposé de celui intervenant dans la conjecture de Mazur-Tate-Teiltelbaum [**41**] : Un petit calcul montre que $L_p(f,k/2)=0$ et cette conjecture (démontrée depuis, par des méthodes diverses et variées, par Stevens, Kato-Kurihara-Tsuji, Orton, Perrin-Riou, Emerton) prédit que $L'_p(f,k/2) = -\mathscr{L}_f \cdot L(f,k/2)$.

(12) Depuis la rédaction de cet article, la situation a beaucoup évolué : nous avons défini [**28**], directement en termes de (φ,Γ)-modules, une action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, ce qui permet d'étendre la correspondance à toute représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Cette extension utilise l'existence des représentations de la série principale et un procédé de prolongement analytique qui montre, en même temps, que la correspondance se comporte bien en famille. Les points (iv), (v) et (vi) de la remarque peuvent donc être considérablement renforcés.

de caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ au lieu de valeurs propres de frobenius, faisaient ressortir un parallélisme éclatant avec ceux de Kisin [**40**].

(vii) En vue d'une correspondance de Langlands locale p-adique en famille, le cas de $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ pose un petit problème. Une manière de remédier à ce problème serait de définir $V(s)$ et $\Pi(s)$ comme étant respectivement $V(s')$ et $\Pi(s')$, où $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \infty)$ si $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Du point de vue des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, cela se justifie de la manière suivante. Définissons le sous-espace $\widetilde{M}(s)$ de $B(s)$ comme étant :

• l'espace vectoriel engendré par les x^j, pour $0 \leqslant j < u(s)$ et les $(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant j < u(s)$, si δ_s n'est pas de la forme x^i, avec $i \in \mathbf{N}$;

• l'intersection avec $B(s)$ de l'espace vectoriel engendré par les x^j, pour $0 \leqslant j \leqslant i$ et les $(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant j < u(s) = \frac{i}{2}$, si $\delta_s = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$.

Si $s \in \mathscr{S}_+$, la fonction $a \mapsto \delta_s(x-a)$ (resp. $a \mapsto \delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$) est une fonction sur $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans $B(s)$, qui est de classe $\mathscr{C}^j$ si $j < u(s)$. La dérivée j-ième de cette fonction est de la forme $c_s(j)(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)$ (resp. $c_s'(j)(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)+c_s(j)(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$), où $c_s(j)$ est une constante non nulle sauf si $w(s) \in \{1, \dots, j\}$. On en déduit que $\widehat{M(s)}$ est aussi l'adhérence de $\widetilde{M}(s)$ dans $B(s)$ si les $c_j(s)$ ne s'annulent pas, c'est-à-dire, si $s \notin \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Par contre, si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, alors l'adhérence $\widehat{M(s)}'$ de $\widetilde{M}(s)$ est nettement plus grosse que $\widehat{M(s)}$, et on montre (cf. n$^{\mathrm{o}}$ 5.3) que l'application $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}} : B(s) \to B(s')$ induit un isomorphisme $B(s)/\widehat{M(s)}' \cong \Pi(s')$.

0.5. Remerciements. — L'élément qui a provoqué le déclic menant aux résultats exposés dans cet article a été la réception de la version préliminaire de [**9**] lors d'un séjour que j'effectuais au Tata Institute de Bombay. Je voudrais en profiter pour remercier Christophe Breuil de m'avoir communiqué ses résultats, le Tata Institute pour les remarquables conditions de travail que j'y ai trouvées, et le CEFIPRA qui a partiellement financé ce séjour à Bombay.

L'extension des résultats au cas non géométrique a été entrevue et annoncée lors de la conférence « L-functions and Galois representations » de Durham, organisée par D. Burns et J. Nekovář. L'atmosphère de cette conférence, où il a beaucoup été question de familles (de formes modulaires, de représentations galoisiennes...) a joué un grand rôle dans la cristallisation des résultats.

La réception, juste avant la conférence, des notes « Towards a p-adic Langlands programme » de L. Berger et C. Breuil, contenant une définition de la représentation $\Pi(s)$ dans le cas cristallin, a joué un rôle évident, mais les travaux de M. Kisin et une question de G. Chenevier ont aussi eu une influence décisive en me mettant sur la piste de la représentation galoisienne $V(s)$. Ma première construction de $V(s)$ reposait sur la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie [**19, 21**] ; elle avait l'inconvénient de ne pas fournir directement le (φ,Γ)-module associé, et c'est l'exposé de L. Berger à la conférence de Durham qui m'a fait réaliser la puissance du théorème de Kedlaya pour ce genre de questions.

1. L'anneau de Robba et ses sous-objets

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Nous allons définir dans ce § un certain nombre (et même un nombre certain...) d'anneaux et d'espaces de fonctions analytiques « à valeurs dans L », dont l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ des fonctions analytiques sur une « couronne infiniment fine de valuation 0 », à l'intérieur duquel vivent la plupart des autres objets (à l'exception notable du corps $\mathscr{E}$ des fonctions analytiques sur une « couronne vide de valuation 0 »). Ces espaces interviendront naturellement dans les constructions et les démonstrations de la suite de l'article, mais le lecteur est invité à ignorer ce § qui ne comporte que des résultats purement techniques pas très éclairants.

1.1. Séries de Laurent

1.1.1. Le corps $\mathscr{E}$. — Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, avec $a_k \in L$, telles que la suite $(v_p(a_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ soit minorée et vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. On munit $\mathscr{E}$ de la valuation $v^{\{0\}}$ définie par $v^{\{0\}}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k)$, ce qui fait de $\mathscr{E}$ un corps complet pour la valuation $v^{\{0\}}$. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des entiers de $\mathscr{E}$ qui est donc l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, avec $a_k \in \mathscr{O}_L$, telles que la suite $v_p(a_k)$ vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. Le corps résiduel $k_{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ est donc $k_L((T))$. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_L[[T]]$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $k_{\mathscr{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathscr{E}}$.

Il faut faire un peu attention à la topologie que l'on met sur $\mathscr{E}$ car il y a deux choix naturels possibles qui ont chacun leur utilité. La *topologie forte*, donnée par la valuation $v^{\{0\}}$, rend continue la réduction $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to k_{\mathscr{E}}$ modulo $\mathfrak{m}_L$, si $k_{\mathscr{E}}$ est muni de la topologie discrète.

La *topologie faible* rend continue la réduction $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to k_{\mathscr{E}}$ modulo $\mathfrak{m}_L$, si $k_{\mathscr{E}}$ est muni de la topologie induite par la valuation v_T ; c'est la topologie obtenue en munissant $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la base de voisinages de 0 donnée par les $p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}} + T^n\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, pour $k, n \in \mathbf{N}$ et en munissant $\mathscr{E} = \cup_{m\in\mathbf{N}} p^{-m}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la topologie de la limite inductive.

1.1.2. Fonctions analytiques sur des couronnes. — Si $r \in \mathbf{Q}$ et $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, on pose $v^{\{r\}}(f) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k) + kr \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si f converge sur le cercle $v_p(x) = r$, c'est-à-dire si $v_p(a_k) + kr$ tend vers $+\infty$ si k tend vers $\pm\infty$, alors $v^{\{r\}}(f) = \inf_{v_p(x)=r} v_p(f(x))$, et on a

$$v^{\{r\}}(fg) = v^{\{r\}}(f) + v^{\{r\}}(g)$$

si f et g convergent sur le cercle $v_p(x) = r$.

Si $r_1 < r_2 \in \mathbf{Q}$, soient $\mathscr{E}^{[r_1,r_2]} \subset \mathscr{E}^{(r_1,r_2]} \subset \mathscr{E}^{]r_1,r_2]}$ les anneaux de séries de Laurent définis par

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^{[r_1,r_2]} &= \{\text{fonctions analytiques sur la couronne } r_1 \leqslant v_p(T) \leqslant r_2\},\\
\mathscr{E}^{(r_1,r_2]} &= \{\text{fonctions analytiques bornées sur la couronne } r_1 < v_p(T) \leqslant r_2\},\\
\mathscr{E}^{]r_1,r_2]} &= \{\text{fonctions analytiques sur la couronne } r_1 < v_p(T) \leqslant r_2\}.
\end{aligned}$$

Si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k\in\mathscr{E}^{(r_1,r_2]}$, on pose

$$v^{[r_1,r_2]}=\inf_{s\in]r_1,r_2[} v^{\{s\}}(f)=\min\big(\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k)+r_1k),\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k)+r_2k)\big).$$

Les anneaux $\mathscr{E}^{[r_1,r_2]}\subset\mathscr{E}^{(r_1,r_2]}$ sont des anneaux principaux (car L est de valuation discrète), et $v^{[r_1,r_2]}$ en fait des anneaux de Banach. Quant à $\mathscr{E}^{]r_1,r_2]}$, c'est la limite projective (i.e. l'intersection) des $\mathscr{E}^{[s,r_2]}$ pour $s\in]r_1,r_2[$; c'est donc algébriquement un anneau de Bézout (tout idéal de type fini est un principal) et topologiquement un anneau de Fréchet comme limite projective dénombrable d'anneau principaux de Banach.

1.1.3. L'anneau de Robba. — On définit le sous-corps $\mathscr{E}^\dagger$ des éléments surconvergents de $\mathscr{E}$ comme la réunion des $\mathscr{E}^{(0,r]}$ pour $r>0$, et l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ comme la réunion des $\mathscr{E}^{]0,r]}$ pour $r>0$, ce qui en fait un anneau de Bézout. On note $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{R}^+$ les intersections respectives de $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ avec $L[[T]]$. On a aussi $\mathscr{E}^+=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$ et on aurait pu noter $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{R}^+$ respectivement $\mathscr{E}^{(0,+\infty]}$ et $\mathscr{E}^{]0,+\infty]}$.

Notons $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ l'intersection de $\mathscr{E}^{(0,+\infty]}$ avec $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $Z^{(0,r]}$ le sous-anneau de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ des f vérifiant $v^{[0,r]}(f)\geqslant 0$. Alors $Z^{(0,r]}$ est aussi le sous-anneau de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ des f vérifiant $v^{[0,r]}(f)\geqslant 0$, et on a $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}=Z^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$ et $\mathscr{E}^{(0,r]}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{p}]=Z^{(0,r]}[\frac{1}{p}]$. On définit la *topologie faible* sur $\mathscr{E}^{(0,r]}$ en munissant $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ de la topologie induite par la valuation $v^{\{r\}}$ pour laquelle il est complet, et $\mathscr{E}^{(0,r]}=\cup_{m\in\mathbf{N}}p^{-m}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$ de la topologie de la limite inductive. La grande différence entre les topologies forte et faible est que T^k tend, quand k tend vers $+\infty$, vers 0 pour la topologie faible mais pas pour la topologie forte.

Lemme 1.1. — *Si $f\in Z^{(0,r]}\cap p^i\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $s\in]0,r[$, alors*

$$v^{\{s\}}(f)\geqslant i\cdot\inf\Big(\frac{1}{2},\frac{r-s}{2s}\Big).$$

Démonstration. — Si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, les hypothèses se traduisent par

$$v_p(a_k)\geqslant i\quad\text{et}\quad v_p(a_k)+kr\geqslant 0,\ \text{quel que soit } k\in\mathbf{Z}.$$

On en déduit les inégalités

$$v_p(a_k)+ks\geqslant\begin{cases} i+ks\geqslant\frac{i}{2} & \text{si } k\geqslant-\frac{i}{2s},\\ v_p(a_k)+kr-k(r-s)\geqslant i\frac{r-s}{2s} & \text{si } k\leqslant-\frac{i}{2s},\end{cases}$$

qui permettent de conclure.

1.1.4. éléments d'ordre fini. — Si $u\geqslant 0$, un élément $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$ de $\mathscr{R}$ est *d'ordre fini* s'il existe $u\geqslant 0$ tel que la suite de terme général $v_p(a_k)+u\frac{\log k}{\log p}$, $k\geqslant 1$, soit minorée. Si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$ est d'ordre fini, et si u_f est la borne inférieure de l'ensemble U_f des $u\geqslant 0$ tels que la suite de terme général $v_p(a_k)+u\frac{\log k}{\log p}$, pour $k\geqslant 1$, soit minorée, on dit que *l'ordre* $\mathrm{ord}(f)$ *de f* est u_f si $u_f\in U_f$ et que $\mathrm{ord}(f)=u_f^+$ si $u_f\notin U_f$. On remarquera qu'un élément de $\mathscr{R}$

est d'ordre 0 si et seulement s'il appartient à $\mathscr{E}^\dagger$, ce qui fournit un moyen de récupérer $\mathscr{E}^\dagger$ à l'intérieur de $\mathscr{R}$.

Si u est un réel $\geqslant 0$, on note $\mathscr{R}_u^+$ l'ensemble des éléments d'ordre $\leqslant u$ de $\mathscr{R}^+$. On munit $\mathscr{R}_u^+$ de la valuation v_u définie par

$$v_u(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k) = \inf_{k\in\mathbf{N}} \Big(v_p(a_k) + u\frac{\log(1+k)}{\log p}\Big),$$

ce qui en fait un espace de Banach.

Lemme 1.2. — *La valuation v_u est équivalente à la valuation v'_u définie par*

$$v'_u(f) = \inf_{\frac{u}{\log p}\geqslant s>0} \Big(v^{\{s\}}(f) - \frac{u}{\log p}\log s\Big).$$

Démonstration. — Si $f(T) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k T^k \in \mathscr{R}_u^+$, on a

$$v'_u(f) = \inf_{\frac{u}{\log p}\geqslant s>0} \Big(\inf_{k\in\mathbf{N}} \Big(v_p(a_k) + ks - \frac{u}{\log p}\log s\Big)\Big) = \inf_{k\in\mathbf{N}} \Big(v_p(a_k) + \inf_{\frac{u}{\log p}\geqslant s>0} \Big(ks - \frac{u}{\log p}\log s\Big)\Big)$$

La fonction $s\mapsto ks - \frac{u}{\log p}\log s$ atteint son minimum en $\frac{u}{k\log p}$ si $k>0$. L'expression ci-dessus est donc aussi égale à

$$\min\Big(v_p(a_0) - \frac{u}{\log p}\log\frac{u}{\log p}, \inf_{k\geqslant 1}\big(v_p(a_k) + \frac{u}{\log p}(1+\log k - \log\frac{u}{\log p})\big)\Big).$$

Le résultat s'en déduit.

Si $u>0$ et $r>0$, on note $\mathscr{E}_u^{]0,r]} \subset \mathscr{E}^{]0,r]}$ l'ensemble des éléments d'ordre $\leqslant u$; on munit cet espace de la valuation $v_u^{[0,r]}$ définie par

$$v_u^{[0,r]}(f) = \inf_{s\in]0,r]} \Big(v^{\{s\}}(f) - \frac{u}{\log p}\log\frac{s}{r}\Big)$$

qui en fait un espace de Banach.

Lemme 1.3. — (i) *Il existe $C(u,r)\geqslant 0$ tel que, si $f\in\mathscr{R}_u^+$, alors*

$$v_u(f) - C(u,r) \leqslant v_u^{[0,r]}(f) \leqslant v_u(f) + C(u,r).$$

(ii) *Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ appartient au sous-L-espace vectoriel de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ des séries sans terme positif* (i.e. $a_k = 0$ si $k\geqslant 0$)*, alors $v_u^{[0,r]}(f) = v^{[0,r]}(f) = v^{\{r\}}(f)$.*

Démonstration. — Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que l'on a

$$v_u^{[0,r]}(f) = \min\Big(\inf_{k\leqslant\frac{u}{r\log p}}\big(v_p(a_k) + kr\big), \inf_{k\geqslant\frac{u}{r\log p}}\big(v_p(a_k) + \frac{u}{\log p}(1+\log k - \log\frac{u}{r\log p})\big)\Big).$$

Le (i) s'en déduit et le (ii) étant immédiat, cela permet de conclure.

Lemme 1.4. — *Si $f\in\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ et si $g\in Z^{(0,r]}\cap p^i\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors*

$$v_u^{[0,r/2]}(gf) \geqslant v_u^{[0,r]}(f) + \frac{i}{2} - u\frac{\log 2}{\log p}.$$

Démonstration. — D'après le lemme 1.1, on a $v^{\{s\}}(g) \geqslant \frac{i}{2}$, si $s \in]0, \frac{r}{2}]$, et comme $v^{\{s\}}(gf) = v^{\{s\}}(g) + v^{\{s\}}(f)$, on en déduit la minoration $v^{\{s\}}(gf) \geqslant v^{\{s\}}(f) + \frac{i}{2}$, pour tout $s \in]0, \frac{r}{2}]$. En revenant à la définition de $v_u^{[0,r/2]}$, cela nous donne

$$\begin{aligned} v_u^{[0,r/2]}(gf) &\geqslant \inf_{s\in]0,\frac{r}{2}]} \big(v^{\{s\}}(f) + \frac{i}{2} - \frac{u}{\log p}\log\frac{2s}{r}\big) \\ &\geqslant \inf_{s\in]0,r]} \big(v^{\{s\}}(f) + \frac{i}{2} - \frac{u}{\log p}\log\frac{2s}{r}\big) = v_u^{[0,r]}(f) + \frac{i}{2} - u\frac{\log 2}{\log p}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

1.2. Les opérateurs φ et ψ, et l'action de Γ

On munit les anneaux $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ d'un frobenius φ : c'est un endomorphisme de L-algèbres, continu, envoyant T sur $(1+T)^p - 1$. On munit aussi $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ d'une action continue de Γ, respectant les structures de L-algèbres, σ_a envoyant T sur $(1+T)^a - 1$. Les actions de φ et Γ commutent entre elles.

Soit $t = \log(1+T)$. C'est un élément de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\varphi(t) = pt$ et $\sigma_a(t) = a\,t$ si $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Lemme 1.5. — (i) *Si $\alpha \in L^*$ n'est pas de la forme p^{-i}, $i \in \mathbf{N}$, alors $\alpha\varphi - 1 : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\alpha = p^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors le noyau de $\alpha\varphi - 1 : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est la droite $L \cdot t^i$, et si $k > i$, alors $T^k g + \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell t^\ell$ est dans l'image de $\alpha\varphi - 1$ si et seulement si $a_i = 0$.*

Démonstration. — On a $\frac{\varphi^n(T)}{p^n} - t = \sum_{k=2}^{+\infty} p^{n(k-1)}\frac{t^k}{k!}$. On en déduit que, si $s > 0$ et si $n \in \mathbf{N}$ est assez grand, alors

$$v^{\{s\}}\big(\frac{\varphi^n(T)}{p^n} - t\big) \geqslant \inf_{k\geqslant 2}\big(n(k-1) - \frac{k}{p-1} + kv^{\{s\}}(t)\big),$$

et donc que $v^{\{s\}}(\varphi^n(T)) = n + C_s$, où $C_s = v^{\{s\}}(t)$, si n est assez grand. Il en résulte que $v^{\{s\}}(\varphi^n(f)) \geqslant v^{\{s\}}(f) + k(n + C_s - s)$, si $f \in T^k\mathscr{R}^+$, et donc que, si $k > -v_p(\alpha)$, alors $-\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\varphi)^n$ est un inverse continu de $\alpha\varphi - 1$ sur $T^k\mathscr{R}^+$. Le résultat se déduit alors de ce que $\mathscr{R}^+ = \oplus_{i=0}^{k-1} L \cdot t^i \oplus T^k\mathscr{R}^+$ et de ce que $\varphi(t^i) = p^i t^i$.

Les $(1+T)^i$, pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$ forment une base de $\mathscr{E}$ sur $\varphi(\mathscr{E})$ et de $\mathscr{R}$ sur $\varphi(\mathscr{R})$, ce qui nous permet de définir un inverse à gauche ψ de φ qui commute à l'action de Γ, en posant

$$\psi\Big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(f_i)\Big) = f_0.$$

L'application ψ envoie $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$; elle induit donc un morphisme k_L-linéaire $\psi : k_{\mathscr{E}} \to k_{\mathscr{E}}$.

Par ailleurs, comme la trace de $(1+T)^i$ sur $\varphi(\mathscr{E})$ ou $\varphi(\mathscr{R})$ est égale à p si $i = 0$ et à 0 si $1 \leqslant i \leqslant p-1$, on a aussi, si $A = \mathscr{E}, \mathscr{R}$ et $f \in A$,

$$\psi(f) = p^{-1}\varphi^{-1}\big(\mathrm{Tr}_{A/\varphi(A)}(f)\big).$$

De plus, si $f\in\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$, alors $f((1+T)\eta-1)$ définit un élément de $\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$, et on a

$$\psi(f)\big((1+T)^p-1\big)=\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}f\big((1+T)\eta-1\big).$$

Remarque 1.6. — φ a tendance à diminuer la couronne de convergence d'un élément de $\mathscr{R}$, ce qui fait que ψ, qui en est un inverse à gauche, a tendance à améliorer la convergence. Une illustration frappante de ce phénomène se trouve dans la proposition 1.12.

1.2.1. Estimées préliminaires

Lemme 1.8. — *Si $k\geqslant 0$, alors $\psi(T^k)=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{p}]}b_{k,i}T^i$ avec $b_{k,i}\in\mathbf{Z}$ et $v_p(b_{k,i})\geqslant[\frac{k}{p}]-i$.*

Démonstration. — Soit $\ell=[\frac{k}{p}]$. Écrivons k sous la forme $k=p\ell+r$; on a donc $0\leqslant r\leqslant p-1$. Si $0\leqslant j\leqslant k$, soit $a_{k,j}=\binom{k}{j}\cdot\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}\eta^j(\eta-1)^{k-j}$. On a $a_{k,j}=0$ si $p\ell+1\leqslant j\leqslant k$ et $a_{k,j}=(-1)^r\binom{p\ell+r}{r}$ est de valuation 0 si $j=p\ell$. Par ailleurs, si $j\leqslant k-1$, alors $a_{k,j}$ est la trace de $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_p)$ à $\mathbf{Q}_p$ de $\binom{k}{j}\cdot\frac{1}{p}\eta^j(\eta-1)^{k-j}$ qui est de valuation $\geqslant\frac{k-j}{p-1}-1$. Comme la valuation de $a_{k,j}$ est un entier, on en déduit le fait que, si on pose

$$w(j)=\begin{cases}+\infty & \text{si } j\geqslant p\ell+1,\\ 0 & \text{si } k-(p-1)\leqslant j\leqslant p\ell,\\ i & \text{si } k-(i+1)(p-1)\leqslant j\leqslant k-i(p-1)-1,\end{cases}$$

alors $v_p(a_{k,j})\geqslant w(j)$.

Maintenant, si on pose $G=\psi(T^k)$, on obtient

$$G((1+T)^p-1)=\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}((1+T)\eta-1)^k=\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}T^j.$$

Comme le membre de droite est un polynôme de degré $\leqslant k$ en $1+T$, cela implique que G est un polynôme de degré $\leqslant\ell$ et on peut donc l'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^{\ell}b_{k,i}T^{\ell}$. Par ailleurs, l'image du disque $v_p(T)\geqslant\frac{1}{p-1}$ par l'application $T\mapsto(1+T)^p-1$ est le disque $v_p(T)\geqslant\frac{p}{p-1}$; on en déduit la suite d'(in)égalités :

$$\begin{aligned}v_p(b_{k,i})+i\frac{p}{p-1}&\geqslant\inf_{v_p(X)\geqslant\frac{p}{p-1}}v_p\Big(\sum_{i=0}^{\ell}b_{k,i}X^i\Big)=\inf_{v_p(T)\geqslant\frac{1}{p-1}}v_p\Big(\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}T^j\Big)\\&=\inf_{0\leqslant j\leqslant k}v_p(a_{k,j})+\frac{j}{p-1}\geqslant\inf_{0\leqslant j\leqslant k}w(j)+\frac{j}{p-1}=\frac{k}{p-1}-1.\end{aligned}$$

Finalement, cela implique que $v_p(b_{k,i})$ est supérieure ou égale au plus petit entier $\geqslant\frac{k-ip}{p-1}-1$. Maintenant, si $i\leqslant\ell-1=[\frac{k}{p}]-1$, on a

$$\frac{k-ip}{p-1}-1\geqslant\frac{k-([\frac{k}{p}]-1)}{p-1}-i-1\geqslant[\frac{k}{p}]-i+\frac{1}{p-1}-1,$$

ce qui permet de conclure si $i \leqslant \ell - 1$, et comme $b_{k,\ell} = (-1)^r \binom{p\ell+r}{r}$ est de valuation 0, cela termine la démonstration du lemme.

Lemme 1.9. — *Si $k \leqslant -1$, alors $\psi(T^k) = \sum_{i=k}^{[\frac{k}{p}]} b_{k,i} T^i$, avec $b_{k,i} \in \mathbf{Z}$ et $v_p(b_{k,i}) \geqslant \frac{k}{p-1} - 1 - \frac{p}{p-1} i$.*

Démonstration. — Si $\ell \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{p} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p} \frac{1}{(1-(1+T)\eta)^\ell} = \frac{\frac{1}{p} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p} (\sum_{i=0}^{p-1} A_i(\eta) T^i)^\ell}{(1-(1+T)^p)^\ell},$$

avec

$$\sum_{i=0}^{p-1} A_i(\eta) T^i = 1 + (1+T)\eta + \cdots (1+T)^{p-1}\eta^{p-1} = \prod_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_p - \{\eta\}} (1 - \zeta - \zeta T).$$

La première de ces formules montre que $A_i \in \mathbf{Z}[X]$, et la seconde, en utilisant la minoration $v_p(\zeta - 1) \geqslant \frac{1}{p-1}$, que $v_p(A_i(\eta)) \geqslant 1 - \frac{i}{p-1}$. On peut donc écrire $(\sum_{i=0}^{p-1} A_i(\eta) T^i)^\ell$ sous la forme $\sum_{i=0}^{\ell(p-1)} A_{\ell,i}(\eta) T^i$ avec $A_{\ell,i} \in \mathbf{Z}[X]$ et $v_p(A_{\ell,i}(\eta)) \geqslant \ell - \frac{i}{p-1}$. Soit alors $a_{\ell,i} = \frac{1}{p} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p} A_{\ell,i}(\eta)$. Il résulte de ce qui précède que

$$a_{\ell,i} \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad v_p(a_{\ell,i}) \geqslant \ell - [\frac{i}{p-1}] - 1.$$

Par ailleurs, le polynôme $\sum_{i=0}^{\ell(p-1)} a_{\ell,i} T^i$ étant invariant par $T \mapsto (1+T)\eta - 1$ si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_p$, il peut s'écrire sous la forme $\sum_{j=0}^{[\frac{\ell(p-1)}{p}]} c_{\ell,j} ((1+T)^p - 1)^j$. En comparant, comme au cours de la démonstration du lemme 1.8, la norme du sup. de ces deux polynômes sur le disque $v_p(T) \geqslant \frac{1}{p-1}$, on en déduit la minoration

$$v_p(c_{\ell,j}) \geqslant \inf_{0 \leqslant i \leqslant \ell(p-1)} v_p(a_{\ell,i}) + \frac{i}{p-1} - j\frac{p}{p-1} \geqslant \ell - j\frac{p}{p-1} - 1.$$

Comme $\psi(T^{-\ell}) = \sum_{j=0}^{[\frac{\ell(p-1)}{p}]} c_{\ell,j} T^{j-\ell} = \sum_{i=-\ell}^{[\frac{-\ell}{p}]} b_{-\ell,i} T^i$, avec

$$b_{-\ell,i} = c_{\ell,i+\ell} \quad \text{et} \quad v_p(b_{-\ell,i}) \geqslant \ell - (i+\ell)\frac{p}{p-1} - 1 = \frac{-\ell}{p-1} - 1 - \frac{p}{p-1} i,$$

cela permet de conclure.

1.2.2. Amélioration de la convergence par ψ

Lemme 1.10. — *Si $x \in k_{\mathscr{E}}$ vérifie $v_T(x) \leqslant -2$, alors $v_T(\psi(x)) > v_T(x)$.*

Démonstration. — Soit $n_0 = v_T(x) \leqslant -2$. On peut donc écrire x sous la forme $x = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n T^n$, avec $a_n \in k_L$ si $n \geqslant n_0$, et $a_{n_0} \neq 0$. On a alors $\psi(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \psi(T^n)$. Écrivant n sous la forme $n = pm + a$ avec $0 \leqslant a \leqslant p-1$, on obtient $\psi(T^n) = \psi(T^{pm}((1+T)-1)^a) = (-1)^a T^m$. En particulier, si $n \geqslant n_0$, alors $v_T(\psi(T^n)) \geqslant v_T(\psi(T^{n_0})) = [\frac{n_0}{p}] > n_0$ car $n_0 \leqslant -2$. Ceci permet de conclure.

Proposition 1.11. — *Si $\alpha \in L$ vérifie $v_p(\alpha) \leqslant 0$, et si $x \in \mathscr{R}$ est tel que $\psi(x) - \alpha x \in \mathscr{R}^+$, alors $x \in \mathscr{R}^+$ (resp. $x \in \mathscr{R}^+ \oplus L \cdot \frac{1}{T}$) si $\alpha \neq 1$ (resp. si $\alpha = 1$).*

Démonstration. — Écrivons x sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ et posons $y = \sum_{k\leqslant -2} a_k T^k \in \mathscr{E}^\dagger$. Si $y \neq 0$, on peut s'arranger, quitte à multiplier x par un élément de L pour que $\inf_{k\leqslant -2} v_p(a_k) = 0$. Comme $\psi(T^{-1}) = T^{-1}$ et $\psi(T^k) \in \mathscr{R}^+$ si $k \geqslant 0$, on voit que

$$y - \alpha^{-1}\psi(y) = \alpha^{-1}(\alpha x - \psi(x)) + (\alpha^{-1} - 1)a_{-1}T^{-1} + \sum_{k\geqslant 0} a_k(\alpha^{-1}\psi(T^k) - T^k)$$

appartient à $\mathscr{O}_{\mathscr{E}^\dagger} \cap T^{-1}\mathscr{R}^+ = T^{-1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. En réduisant le tout modulo $\mathfrak{m}_L$, on en déduit l'inégalité $v_T(\overline{y} - \overline{\alpha}\psi(\overline{y})) \geqslant -1$, ce qui est en contradiction avec le lemme précédent et le fait que $v_T(\overline{y}) \leqslant -2$. On en déduit la nullité de y et le résultat.

Proposition 1.12. — *Si $\alpha \in L$ vérifie $v_p(\alpha) \leqslant 0$ et si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathscr{E}^{]0,r]}$ telle que l'on ait $\psi(x_{n+1}) = \alpha x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $x_n \in \mathscr{R}^+$ (resp. $x_n \in \mathscr{R}^+ \oplus L \cdot \frac{1}{T}$) si $v_p(\alpha) < 0$ (resp. si $v_p(\alpha) = 0$), quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Écrivons x_n sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{n,k}T^k$ et posons $y_n = \sum_{k\leqslant -1} a_{n,k}T^k \in \mathscr{E}^\dagger$. Comme $\psi(T^k)$ ne fait intervenir que des puissances positives (resp. strictement négatives) de T si $k \geqslant 0$ (resp. si $k \leqslant -1$), la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ vérifiant $\psi(y_{n+1}) = \alpha y_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soit C la borne inférieure des $v_p(a_{n,k})$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \leqslant -2$. Comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$, C n'est pas égal à $-\infty$ et, si $C \neq +\infty$, il existe $k_0 \leqslant -2$ tel que l'on ait $v_p(a_{n,k}) > C$ si $k < k_0$, et $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $v_p(a_{n_0,k_0}) = C$. Le lemme 1.9, la relation $\psi(y_{n+1}) = \alpha y_n$, et le fait $k_0 \leqslant -2$, nous fournissent les inégalités

$$C = v_p(a_{n_0,k_0}) > -v_p(\alpha) + v_p(a_{n_0+1,k_0}) \geqslant C,$$

ce qui conduit à une contradiction. On a donc $a_{n,k} = 0$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $k \leqslant -2$, ce qui, au vu de la formule $\psi(T^{-1}) = T^{-1}$, permet de conclure.

1.2.3. Action de ψ sur les éléments surconvergents

Soit $s : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ la fonction définie par $s(r) = r + 1$ si $r \geqslant \frac{1}{p-1}$ et $s(r) = pr$ si $r \leqslant \frac{1}{p-1}$. On note $\mathscr{E}^{[-\infty,r]}$ le sous-espace de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ des $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ vérifiant $a_k = 0$, si $k \geqslant 0$.

Proposition 1.13. — *Si $r > 0$, alors ψ induit un morphisme de $\mathscr{E}^{[-\infty,r]}$ sur $\mathscr{E}^{[-\infty,s(r)]}$, et on a $v^{\{s(r)\}}(\psi(f)) \geqslant v^{\{r\}}(f) - 1$ si $f \in \mathscr{E}^{[-\infty,r]}$.*

Démonstration. — Il résulte du lemme 1.9 que, si $k \leqslant -1$, alors $\psi(T^k)$ ne comporte que des puissances < 0 de T, et

$$v^{\{s(r)\}}(\psi(T^k)) \geqslant \inf_{k\leqslant i\leqslant [\frac{k}{p}]} \frac{k}{p-1} - 1 - \frac{p}{p-1}i + s(r)i.$$

• si $r \geqslant \frac{1}{p-1}$, alors $s(r) \geqslant \frac{p}{p-1}$ et le minimum est atteint pour $i = k$ et vaut $-1 + kr = v^{\{r\}}(T^k) - 1$.

• si $r \leqslant \frac{1}{p-1}$, alors $s(r) = pr \leqslant \frac{p}{p-1}$ et le maximum est atteint pour $i = [\frac{k}{p}]$ et vaut

$$\frac{k}{p-1} - 1 + (pr - \frac{p}{p-1})[\frac{k}{p}] \geqslant \frac{k}{p-1} - 1 + (pr - \frac{p}{p-1})\frac{k}{p} = v^{\{r\}}(T^k) - 1.$$

Il résulte de ce qui précède que $v^{\{s(r)\}}(\psi(a_k T^k)) \geqslant v^{\{r\}}(a_k T^k) - 1$, pour tous $k \in \mathbf{Z}$ et $a_k \in L$. Le résultat s'en déduit en utilisant le fait que $v^{\{r\}}(f) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v^{\{r\}}(a_k T^k)$, si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, et $v^{\{s(r)\}}(\psi(f)) \geqslant \inf_{k\in\mathbf{Z}} v^{\{s(r)\}}(\psi(a_k T^k))$.

Si $b \in \mathbf{Z}$, notons $\tau^{\leqslant b}$ l'application $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k \mapsto \sum_{k\leqslant b} a_k T^k$. La restriction de $\tau^{\leqslant b}$ à $\mathscr{E}^{(0,r]}$ est un endomorphisme continu pour la topologie faible.

Lemme 1.14. — *Si $r > 0$, il existe $b \leqslant -1$ tel que, quel que soit $f \in \mathscr{E}^{(0,r]}$, on ait $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(f)) \geqslant v^{\{r\}}(f)$.*

Démonstration. — On a $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(T^k)) = +\infty$ si $k > b$ et, si $k \leqslant b \leqslant -1$, le lemme 1.9 nous fournit la minoration

$$v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(T^k)) \geqslant \inf_{k\leqslant i\leqslant \inf(b,[\frac{k}{p}])} \frac{k}{p-1} - 1 - \frac{pi}{p-1} + ri.$$

• Si $r \geqslant \frac{p}{p-1}$, ce minimum est atteint en $i = k$ et est $\geqslant rk$ quel que soit $b \leqslant -1$. On a donc $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(T^k)) \geqslant v^{\{r\}}(T^k)$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$ et on peut prendre $b = -1$.

• Si $r \leqslant \frac{p}{p-1}$, ce minimum est atteint en $i = \inf(b, [\frac{k}{p}])$ et est supérieur ou égal à ce que l'on obtiendrait pour $i = [\frac{k}{p}]$, et donc à $rk + \big(r\frac{1-p}{p}k - 1\big)$. Si $b \leqslant \frac{-p}{r(p-1)}$, on a $r\frac{1-p}{p}k - 1 \geqslant 0$ pour tout $k \leqslant b$, et donc $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(T^k)) \geqslant v^{\{r\}}(T^k)$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$. On peut donc prendre $b = \big[\frac{-p}{r(p-1)}\big]$.

Ceci permet de conclure.

Proposition 1.15. — *Si $f \in \mathscr{E}^{(0,r]}$, alors la suite $\psi^n(f)$, $n \in \mathbf{N}$, est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$ pour la topologie faible.*

Démonstration. — Écrivons $\psi^n(f)$ sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{n,k} T^k$. Quitte à multiplier f par un élément de L, on peut supposer que $a_{0,k} \in \mathscr{O}_L$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$. On a alors $a_{n,k} \in \mathscr{O}_L$ quels que soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. En particulier, si on fixe b, la suite $\sum_{k>b} a_{n,k} T^k$, $n \in \mathbf{N}$, est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$, et il suffit de prouver qu'il en est de même de la suite $\sum_{k\leqslant b} a_{n,k} T^k$, $n \in \mathbf{N}$. Or on a $\sum_{k\leqslant b} a_{n,k} T^k = \tau^{\leqslant b} \circ \psi^n(f)$, et, si $b \leqslant -1$, $\tau^{\leqslant b} \circ \psi = \tau^{\leqslant b} \circ \psi \circ \tau^{\leqslant b}$ car $\psi(T^k)$ ne fait intervenir que des T^i avec $i > b$ si $k > b$ (cf. lemme 1.9). Ceci permet d'écrire $\sum_{k\leqslant b} a_{n,k} T^k$ sous la forme $(\tau^{\leqslant b} \circ \psi)^n(f)$ et le lemme 1.14 permet de conclure.

1.2.4. Action de ψ sur les éléments d'ordre fini

Proposition 1.16. — *La restriction de ψ à $\mathscr{R}_u^+$ est un endomorphisme continu de $\mathscr{R}_u^+$ et il existe $C(u) \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_u(\psi^n(f)) \geqslant v_u(f) - nu - C(u)$ quels que soient $f \in \mathscr{R}_u^+$ et $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Soit $A \geqslant \sup(\frac{1}{p}, \frac{u}{\log p})$. La valuation $v_{u,A}$ définie par

$$v_{u,A}(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) + u\frac{\log(A+k)}{\log p}$$

est équivalente à v_u car $k \mapsto \log(A+k) - \log(1+k)$ est bornée.

En reprenant les notations du lemme 1.8, on obtient, si $k \in \mathbf{N}$,

$$v_{u,A}(\psi(T^k)) = \inf_{i\leqslant[\frac{k}{p}]} v_p(b_{k,i}) + u\frac{\log(A+i)}{\log p} \geqslant \inf_{i\leqslant[\frac{k}{p}]} [\frac{k}{p}] - i + u\frac{\log(A+i)}{\log p}.$$

La fonction $x \mapsto -x + u\frac{\log(A+x)}{\log p}$ est décroissante pour $x > \frac{u}{\log p} - A$ et donc le minimum ci-dessus est atteint en $i = [\frac{k}{p}]$ puisque $\frac{u}{\log p} - A \leqslant 0$ par hypothèse. On obtient donc

$$v_{u,A}(\psi(T^k)) - v_{u,A}(T^k) \geqslant \frac{u}{\log p}\cdot\frac{\log(A+[\frac{k}{p}])}{\log(A+k)} = -u + \frac{u}{\log p}\cdot\frac{\log(pA+p[\frac{k}{p}])}{\log(A+k)} \geqslant -u$$

car $pA + p[\frac{k}{p}] \geqslant A + k$ puisque $A \geqslant \frac{1}{p}$ par hypothèse. Ceci implique que l'on a $v_{u,A}(\psi(f)) \geqslant v_{u,A}(f) - u$ quel que soit $f \in \mathscr{R}_u^+$, et une récurrence immédiate montre que l'on a

$$v_{u,A}(\psi^n(f)) \geqslant v_{u,A}(f) - nu$$

quel que soit $f \in \mathscr{R}_u^+$. La valuation v_u étant équivalente à $v_{u,A}$, ceci permet de conclure.

Proposition 1.17. — *Soit $u \geqslant 0$. Si $f \in \mathscr{E}_u^{]0,r]}$ et si $\beta \in L$ vérifie $v_p(\beta) > u$, la suite de terme général $\beta^n\psi^n(f)$ tend vers 0 dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ et $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n\psi^n(f)$ est un élément de $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ vérifiant $g - \beta\psi(g) = f$.*

Démonstration. — Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, soit $f_1 = \sum_{k\leqslant -1} a_kT^k \in \mathscr{E}^{(0,r]}$ et $f_2 = \sum_{k\geqslant 0} a_kT^k \in \mathscr{R}_u^+$. La suite $\psi^n(f_1)$ est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$ muni de la topologie faible d'après la prop. 1.15 ; elle l'est donc aussi dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ d'après le (ii) du lemme 1.3, ce qui implique que $\beta^n\psi^n(f_1)$ tend vers 0 dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ puisque $v_p(\beta) > u \geqslant 0$. Par ailleurs, $v_u(\psi^n(f_2)) \geqslant v_u(f_2) - nu - C(u)$ d'après la prop. 1.16, ce qui implique, puisque $v_p(\beta) > u$, que $\beta^n\psi^n(f_1)$ tend vers 0 dans $\mathscr{R}_u^+$ et donc aussi dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ d'après le (i) du lemme 1.3. On en déduit le résultat.

1.3. L'anneau $\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}} T]$

Soit $\mathscr{L} \in L$. On adjoint à $\mathscr{R}$ l'élément $\log_{\mathscr{L}} T$ dont la valeur en $x \neq 0$ est $\log_{\mathscr{L}} x$. On étend l'action de φ et Γ à $\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}} T]$ par les formules

$$\varphi(\log_{\mathscr{L}} T) = \log\varphi(T) = p\log_{\mathscr{L}} T + \log\frac{\varphi(T)}{T^p} \quad \text{et} \quad \gamma(\log_{\mathscr{L}} T) = \log\gamma(T) = \log_{\mathscr{L}} T + \log\frac{\gamma(T)}{T},$$

ces formules ayant un sens car la série définissant $\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$ converge dans $\mathscr{E}^\dagger$, et celle définissant $\log\frac{\gamma(T)}{T}$, dans $\mathscr{R}^+$, vers un élément d'ordre 1. L'opérateur ψ s'étend lui aussi de manière unique à $\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}} T]$ en un inverse à gauche de φ : si $f \in \mathscr{R}$ et $k \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}\psi(f \cdot (p \log_{\mathscr{L}} T)^k) =& \psi\big(f \cdot \big(\log_{\mathscr{L}} \varphi(T) - \log \frac{\varphi(T)}{T^p}\big)^k\big) \\ =& \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (\log_{\mathscr{L}} T)^i \psi\big(f \cdot \big(\log \frac{\varphi(T)}{T^p}\big)^{k-i}\big).\end{aligned}$$

On remarquera que les formules ci-dessus ne dépendent pas de $\mathscr{L}$; ce qui en dépend, c'est la valeur d'un élément de $\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}} T]$ en un point où il converge.

2. Objets attachés aux caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$

Ce § contient un certain nombre de résultats qui ne prendront leur sens qu'au § suivant lorsqu'il s'agira d'interpréter, en termes de distributions, certaines congruences provenant de la théorie des (φ, Γ)-modules. Comme de coutume, les résultats sont présentés dans l'ordre inverse de celui dans lequel ils ont été trouvés : les expressions un peu monstrueuses provenant des calculs sur les (φ, Γ)-modules attachés aux représentations semi-stables n'ont commencé à prendre une forme raisonnable que grâce à l'apparition de la formule de Leopoldt de ce § (prop. 2.4).

2.1. Rappels sur les distributions [26]

Transformée d'Amice.— Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, on définit sa transformée d'Amice $\mathscr{A}_\mu$ par $\mathscr{A}_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \, \mu$. La transformée d'Amice induit un isomorphisme d'anneaux de Fréchet de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, muni de la convolution, sur $\mathscr{R}^+$.

Multiplication par une fonction.— Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$ et f est une fonction localement analytique sur $\mathbf{Z}_p$, on définit la distribution $f\mu$ par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \, (f\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} (f\phi) \, \mu$.

• Multiplication par x. On a

$$\mathscr{A}_{x\mu} = \partial \mathscr{A}_\mu, \quad \text{avec } \partial = (1+T)\frac{d}{dT}.$$

• Multiplication par z^x si $v_p(z-1) > 0$ (ce qui inclut le cas $z \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$) :

$$\mathscr{A}_{z^x \mu}(T) = \mathscr{A}_\mu((1+T)z - 1).$$

• Division par x. Le résultat n'est bien défini qu'à addition près d'un multiple de la masse de Dirac en 0. La transformée d'Amice de $x^{-1}\mu$ est alors une primitive de $(1+T)^{-1}\mathscr{A}_\mu(T)$, le choix de la constante d'intégration correspondant à l'indétermination mentionnée ci-dessus.

Restriction à un ouvert compact.— C'est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ouvert compact. Si $n \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{Z}_p$, la fonction caractéristique de $b + p^n\mathbf{Z}_p$ est $x \mapsto p^{-n} \sum_{\eta^{p^n}=1} \eta^{-b}\eta^x$. Cela se traduit, au niveau des transformées d'Amice, par la formule

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{b+p^n\mathbf{Z}_p}(\mu)}(T) = p^{-n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b} \mathscr{A}_\mu((1+T)\eta - 1).$$

La transformée d'Amice de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\mu$ est $(1-\varphi\psi)\mathscr{A}_\mu$.

Si $k \geqslant 1$ et $F \in \mathscr{R}^+$, notons $\partial^{-k}F$ une solution G de l'équation différentielle $\partial^k G = F$, ce qui fait que $\partial^{-k}F$ n'est bien déterminé qu'à addition près d'un polynôme de degré $\leqslant k-1$ en $\log(1+T)$. On a alors

$$\int_{b+p^n\mathbf{Z}_p} x^k\,\mu = p^{-n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b}\partial^k\mathscr{A}_\mu(\eta-1),$$

si $k \geqslant 0$ ou si $k \leqslant -1$ et $b \notin p^n\mathbf{Z}_p$.

Dérivée d'une distribution.— Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, on définit sa dérivée $\mathrm{d}\mu$ par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{Z}_p}\phi'(x)\,\mu \quad \text{et donc} \quad \mathscr{A}_{\mathrm{d}\mu}(T) = \log(1+T)\cdot\mathscr{A}_\mu(T).$$

Actions de P^+ et ψ.— On note P^+ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

- On fait agir $\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in P^+$, avec $k\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et $b\in\mathbf{Z}_p$, sur une distribution μ, par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu = \int_{\mathbf{Z}_p}\phi(p^k ax+b)\,\mu \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu}(T) = (1+T)^b\varphi^k(\sigma_a(\mathscr{A}_\mu)).$$

- Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, on note $\psi(\mu)$ la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\,\psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p}\phi(p^{-1}x)\,\mu \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\psi(\mu)}((1+T)^p-1) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\mathscr{A}_\mu((1+T)\zeta-1),$$

et donc $\mathscr{A}_{\psi(\mu)} = \psi(\mathscr{A}_\mu)$.

2.2. La distribution de Kubota-Leopoldt

Soit μ_{KL} la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée d'Amice est $(1+T^{-1})\log(1+T)$; c'est une distribution d'ordre 1.

Proposition 2.1. — $\psi(\mu_{\mathrm{KL}}) = p^{-1}\mu_{\mathrm{KL}}$.

Démonstration. — Il suffit de prouver l'énoncé correspondant sur les transformées d'Amice, et celui-ci découle des identités suivantes

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}\Big(\frac{\log((1+T)\eta)}{(1+T)\eta-1}+\log((1+T)\eta)\Big) &= \Big(\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}\Big(\frac{1}{(1+T)\eta-1}+1\Big)\Big)\log(1+T)\\ &= \frac{1}{p}\Big(\frac{1}{(1+T)^p-1}+1\Big)\log(1+T)^p.\end{aligned}$$

On note encore μ_{KL} l'unique distribution sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ est μ_{KL} et qui vérifie l'équation fonctionnelle $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu_{\mathrm{KL}} = p\,\mu_{\mathrm{KL}}$. Elle est globalement d'ordre 1, et c'est ce que l'on peut imaginer de plus ressemblant à la mesure de Haar comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.2. — *Si $n\in\mathbf{Z}$ et $b\in\mathbf{Q}_p$, alors $\int_{D(b,n)}\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}$.*

Démonstration. — Si $b \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\int_{D(b,n)} \mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\Big(1 + \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}^*} \eta^{-b}\Big(\frac{\log\eta}{\eta-1} + \log\eta\Big)\Big) = p^{-n}$$

puisque $\log\eta = 0$ quel que soit $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}^*$. Ceci permet de conclure si $b \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$; le cas général s'en déduit via l'équation fonctionnelle $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_{\mathrm{KL}} = p\,\mu_{\mathrm{KL}}$ qui implique que l'on a

$$\int_{p^m X} \phi(p^{-m}x)\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-m}\int_X \phi\mu_{\mathrm{KL}}$$

quels que soient X ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, $m \in \mathbf{Z}$ et ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur X.

Soit $\mathscr{L} \in L$. On rappelle que $\log_{\mathscr{L}}$ est la branche du logarithme définie par $\log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}$; sa restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ (ou même à $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}^*$) ne dépend pas du choix de $\mathscr{L}$ et est notée simplement log. On étend μ_{KL} en une forme linéaire sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p) \oplus L\cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr{L}}$ en posant

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}}\,\mu_{\mathrm{KL}} = \gamma_{p,\mathscr{L}}, \quad \text{avec } \gamma_{p,\mathscr{L}} = \gamma_p + \frac{\mathscr{L}}{p-1} \text{ et } \gamma_p = \frac{p}{p-1}\int_{\mathbf{Z}_p^*} \log\,\mu_{\mathrm{KL}}.$$

Remarque 2.3. — On a

$$\begin{aligned} p\int_{p\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}}(p^{-1}x)\,\mu_{\mathrm{KL}} &= -\,p\int_{p\mathbf{Z}_p} \mathscr{L}\,\mu_{\mathrm{KL}} + p\int_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr{L}}\,\mu_{\mathrm{KL}} - p\int_{\mathbf{Z}_p^*}\log\,\mu_{\mathrm{KL}} \\ &= -\,\mathscr{L} + p\Big(\gamma_p + \frac{\mathscr{L}}{p-1}\Big) - p\frac{p-1}{p}\gamma_p = \gamma_p + \frac{\mathscr{L}}{p-1} = \int_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr{L}}\,\mu_{\mathrm{KL}}. \end{aligned}$$

La relation $\int_{p^m X}\phi(p^{-m}x)\,\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-m}\int_X \phi\,\mu_{\mathrm{KL}}$ s'étend donc à $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p) \oplus L\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr{L}}$.

2.3. La formule de Leopoldt

Proposition 2.4. — *Si $b \in \mathbf{Z}_p$, alors*

$$\int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}}\,\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\Big(\gamma_{p,\mathscr{L}} + \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}} \eta^{-b}\log_{\mathscr{L}}(\eta-1)\Big).$$

Démonstration. — Si $b \in p^n\mathbf{Z}_p$, on a

$$\int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}}\,\mu_{\mathrm{KL}} = \int_{D(0,n)} \log_{\mathscr{L}}\,\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\int_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr{L}}(p^n x)\,\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}(\gamma_{p,\mathscr{L}} + n\mathscr{L}),$$

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}} \eta^{-b}\log_{\mathscr{L}}(\eta-1) = \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}}\log_{\mathscr{L}}(\eta-1) = \log_{\mathscr{L}}\Big(\prod_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}}(\eta-1)\Big) = \log_{\mathscr{L}} p^n = n\mathscr{L},$$

ce qui permet de démontrer la formule souhaitée dans ce cas.

Supposons maintenant $b \in \mathbf{Z}_p - p^n\mathbf{Z}_p$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, soit λ_a la distribution dont la transformée d'Amice est $\frac{a}{(1+T)^a-1} - \frac{1}{T}$; c'est en fait une mesure, et un petit calcul de transformées d'Amice montre que l'on a

$$\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\big)\cdot\mu_{\mathrm{KL}} = \mathrm{d}\lambda_a.$$

On en déduit la formule

$$\int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}} \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1 \right) \cdot \mu_{\mathrm{KL}} = \int_{D(b,n)} x^{-1}\, \lambda_a.$$

Par ailleurs, la transformée d'Amice de $x^{-1}\lambda_a$ est, à constante près, égale à $\log_{\mathscr{L}}((1+T)^a - 1) - \log_{\mathscr{L}} T - (a-1)\log_{\mathscr{L}}(1+T)$ et donc

$$\int_{D(b,n)} x^{-1}\, \lambda_a = p^{-n}\Big(\log_{\mathscr{L}} a + \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}} \eta^{-b}(\log_{\mathscr{L}}(\eta^a - 1) - \log_{\mathscr{L}}(\eta - 1))\Big).$$

Maintenant, si on revient à la définition de l'opération $\mu \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu$, on obtient

$$\int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}} \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1 \right) \cdot \mu_{\mathrm{KL}} = \frac{\log_{\mathscr{L}} a}{p^n} + \int_{D(a^{-1}b,n)} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}} - \int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}}.$$

En comparant les deux formules ci-dessus pour $\int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}} \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1 \right) \cdot \mu_{\mathrm{KL}}$, on en déduit le fait qu'il existe une constante $C(n,k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ telle que l'on ait

$$\int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\Big(C(n,k) + \sum_{\eta^{p^n}=1,\, \eta\neq 1} \eta^{-b} \log_{\mathscr{L}}(\eta - 1)\Big) \quad \text{si } b \in \mathbf{Z}_p \text{ et } v_p(b) = k.$$

Fixant alors k et sommant sur un système de représentants de $p^k\mathbf{Z}_p^*$ modulo $p^n\mathbf{Z}_p$, on obtient

$$\int_{p^k\mathbf{Z}_p^*} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\big((p-1)p^{n-k-1} C(n,k) + A(n,k) \big),$$

avec $A(n,k) = \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}} \log_{\mathscr{L}}(\eta - 1) \sum_{b\in p^k\mathbf{Z}_p^*/p^n\mathbf{Z}_p} \eta^{-b}$. Comme

$$\sum_{b\in p^k\mathbf{Z}_p^*/p^n\mathbf{Z}_p} \eta^{-b} = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta \notin \boldsymbol{\mu}_{p^{k+1}}\,; \\ -p^{n-k-1} & \text{si } \eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{k+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^k}\,; \\ p^{n-k} - p^{n-k-1} & \text{si } \eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^k}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} A(n,k) =& \big(p^{n-k} \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^k}-\{1\}} \log_{\mathscr{L}}(\eta - 1)\big) - \big(p^{n-k-1} \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{k+1}}-\{1\}} \log_{\mathscr{L}}(\eta - 1)\big) \\ =& p^{n-k} \log_{\mathscr{L}} p^k - p^{n-k-1} \log_{\mathscr{L}} p^{k+1} = p^n(kp^{-k} - (k+1)p^{-(k+1)})\mathscr{L}, \end{aligned}$$

et comme par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{p^k\mathbf{Z}_p^*} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}} &= \int_{D(0,k)} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}} - \int_{D(0,k+1)} \log_{\mathscr{L}}\, \mu_{\mathrm{KL}} \\ &= (p^{-k} - p^{-(k+1)})\gamma_{p,\mathscr{L}} + \mathscr{L}(kp^{-k} - (k+1)p^{-(k+1)}), \end{aligned}$$

on en déduit $C(n,k) = \gamma_{p,\mathscr{L}}$, ce qui permet de conclure.

Proposition 2.5. — *Soient* $c_{0,\mathscr{L}} = \int_{\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}} \mu_{\mathrm{KL}}$ *et, si* $i \geqslant 1$, $c_{i,\mathscr{L}} = \int_{\mathbf{Z}_p} \frac{x^i}{i}\mu_{\mathrm{KL}}$. *Alors, si* $n \in \mathbf{N}$ *et* $b \in \mathbf{Z}_p$,

$$c_{i,\mathscr{L}} + \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}} \eta^{-b}\partial^i \log_{\mathscr{L}}(\eta-1) = \begin{cases} p^n \int_{D(b,n)} \log_{\mathscr{L}} \mu_{\mathrm{KL}} & si\ i=0\,; \\ p^n \int_{D(b,n)} \frac{x^i}{i}\, \mu_{\mathrm{KL}} & si\ i \geqslant 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Si $i=0$, c'est une réécriture de la prop. 2.4. Si $i \geqslant 1$, on a

$$p^n \int_{D(b,n)} \frac{x^i}{i}\,\mu_{\mathrm{KL}} - \int_{\mathbf{Z}_p} \frac{x^i}{i}\mu_{\mathrm{KL}} = \frac{1}{i} \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\{1\}} \eta^{-b}\partial^i\big((1+T^{-1})\log(1+T)\big)\big)_{|T=\eta-1}.$$

Or $\partial^j \log(1+T)_{|T=\eta-1}$ vaut 0 si $j \neq 1$ et 1 si $i=1$, pour tout $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$. On en déduit, en utilisant la formule de Leibnitz, l'identité

$$\partial^i\big((1+T^{-1})\log(1+T)\big)_{|T=\eta-1} = i\partial^{i-1}(T^{-1}+1)_{|T=\eta-1} = i\partial^i \log_{\mathscr{L}}(\eta-1),$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 2.6. — La distribution μ_{KL} est intimement liée à la fonction zêta de Kubota-Leopoldt et aux fonctions L p-adiques des caractères de Dirichlet de conducteur une puissance de p. Un petit calcul montre que, si $\chi : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$ est un tel caractère et si $k \in \mathbf{N}$, alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \chi(x)x^k\,\mu_{\mathrm{KL}} = (-1)^{k-1}kL^{\{p\}}(\chi, 1-k),$$

où $L^{\{p\}}(\chi,s)$ est la fonction L complexe de χ privée de son facteur d'Euler en p. En particulier, si χ est un caractère pair, alors la fonction L p-adique $L_p(\chi,s)$ associée à χ est donnée par la formule

$$L_p(\chi,s) = \frac{1}{s-1}\int_{\mathbf{Z}_p^*} \chi(x)\langle x\rangle^{1-s}\,\mu_{\mathrm{KL}},$$

et la proposition 2.4 est équivalente à la formule de Leopoldt pour $L_p(\chi,1)$.

2.4. La distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$

Soit u un générateur topologique de $\mathbf{Z}_p^*$. Soit μ_{KL}^* la distribution sur $\mathbf{Z}_p^*$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha\,\mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{w(\alpha)}{\alpha(u)-1} \quad \text{si } \alpha : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^* \text{ est un caractère continu} \neq 1, \text{ et } \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{1}{\log u}.$$

Cette distribution est l'analogue multiplicatif de la distribution de Kubota-Leopoldt, ce qui justifie la notation. Elle dépend du choix de u et est d'ordre 1.

Lemme 2.7. — *Si* $n \geqslant 1$, *si* $0 \leqslant i \leqslant (p-1)p^{n-1}-1$, *et si* $\alpha : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$ *est un caractère continu, alors*

$$\int_{D(u^i,n)} \alpha\,\mu_{\mathrm{KL}}^* = \begin{cases} \frac{\alpha(u)^i w(\alpha)}{\alpha(u)^{(p-1)p^{n-1}}-1} = \frac{\alpha(u)^{-((p-1)p^{n-1}-i)}w(\alpha)}{1-\alpha(u)^{-(p-1)p^{n-1}}} & si\ \alpha^{(p-1)p^{n-1}} \neq 1, \\ p^{-n}\frac{p\,\alpha(u)^i}{(p-1)\log u} & si\ \alpha^{(p-1)p^{n-1}} = 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Si X_n désigne l'ensemble des caractères $\beta : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{D(u^i,n)}(x) =& \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \sum_{\beta\in X_n} \beta(u)^{-i}\beta(x)\\ \int_{D(u^i,n)} \alpha\,\mu_{\mathrm{KL}}^* =& \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \sum_{\beta\in X_n} \beta(u)^{-i} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \beta\alpha\,\mu_{\mathrm{KL}}^*.\end{aligned}$$

Si $\alpha^{(p-1)p^{n-1}} = 1$, on a $w(\beta\alpha) = 0$ quel que soit $\beta \in X_n$; tous les termes de la somme sont donc nuls sauf celui correspondant à $\beta = \alpha^{-1}$, ce qui nous donne $\int_{D(u^i,n)} \alpha\,\mu_{\mathrm{KL}}^* = p^{-n}\frac{p\,\alpha(u)^i}{(p-1)\log u}$.

Si $\alpha^{(p-1)p^{n-1}} \neq 1$, comme $w(\alpha\beta) = w(\alpha)$, et comme β est déterminé par $\eta = \beta(u) \in \boldsymbol{\mu}_{(p-1)p^{n-1}}$, on obtient

$$\int_{D(u^i,n)} \alpha\,\mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{(p-1)p^{n-1}}} \eta^{-i}\frac{w(\alpha)}{\alpha(u)\eta - 1} = \frac{\alpha(u)^i w(\alpha)}{\alpha(u)^{(p-1)p^{n-1}} - 1}.$$

La dernière identité peut se montrer, par exemple, en développant en séries entières en $z = \alpha(u)$. Ceci permet de conclure.

On se fixe, pour toute la suite de ce §, un élément α de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$, tel que α^{-1} n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, et une mesure λ sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha^{-1}\,\lambda = \frac{(p-1)\log u}{p} \quad \text{et} \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda = 0, \text{ si } \alpha(p) = p^{1-i}, \text{ avec } i \in \mathbf{N}.$$

(L'hypothèse selon laquelle α^{-1} n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, sert juste à assurer que les deux conditions $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha^{-1}\,\lambda \neq 0$ et $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda = 0$ sont compatibles.)

On note $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ le produit de convolution sur $\mathbf{Z}_p^*$ de λ et $\alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$. On a donc

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\,\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^* = \int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*} \phi(zt)\alpha(z)\,\lambda(t)\,\mu_{\mathrm{KL}}^*(z).$$

Lemme 2.8. — (i) *Si $\alpha(p)$ n'est pas de la forme p^{1-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, il existe une unique distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ et qui vérifie $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1}\mu_{\alpha,\lambda}$.*

(ii) *Si $\alpha(p) = p^{1-i}$, il existe une unique distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbf{Q}_p$, dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ et qui vérifie $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1}\mu_{\alpha,\lambda}$ et $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu_{\alpha,\lambda} = 0$.*

Démonstration. — L'application $\mu \mapsto A_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu$ induit [**26**, prop. 2.15] une bijection de l'ensemble des distributions sur $\mathbf{Q}_p$ vérifiant $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = p\alpha(p)^{-1}\mu$, sur l'ensemble des éléments de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\psi(f) = p^{-1}\alpha(p)f$. D'autre part, si μ est une telle distribution, alors $(1 - p^{-1}\alpha(p)\varphi)A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\mu$. Le lemme est donc une simple traduction du lemme 1.5.

Lemme 2.9. — *Si $y \in \mathbf{Z}_p^*$, si $w(\alpha) \neq 0$ et si $1 \leqslant m \leqslant n$, alors*

$$\frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)p^{n-1}}} \sum_{a=1}^{(p-1)p^{n-1}} \alpha(u)^{-a} \int_{D(-u^a y,m)} \lambda(x) = \int_{D(-y,m)} \mu_{\alpha,\lambda}(x).$$

Démonstration. — On a

$$\mathbf{1}_{D(-y,m)}(zt) = \sum_{a=1}^{(p-1)p^{n-1}} \mathbf{1}_{D(-u^a y,m)}(t)\mathbf{1}_{D(u^{-a},n)}(z).$$

En revenant à la définition de la distribution $\lambda \star \alpha\mu^*_{\mathrm{KL}}$, on en déduit la formule

$$\int_{D(-y,m)} \mu_{\alpha,\lambda} = \sum_{a=1}^{(p-1)p^{n-1}} \Big(\int_{D(-u^a y,m)} \lambda\Big)\Big(\int_{D(u^{-a},n)} \alpha\, \mu^*_{\mathrm{KL}}\Big),$$

et on conclut en utilisant le lemme 2.7 avec $i = (p-1)p^{n-1} - a$.

Lemme 2.10. — *Si $v_p(y) < n$, alors*

$$\int_{D(-y,n)} \alpha^{-1}\, \mu_{\alpha,\lambda} = p^{-n}.$$

Démonstration. — On se ramène au cas $v_p(y) = 0$ et $n \geqslant 1$, en faisant le changement de variable $x = p^{v_p(y)}x'$ et en utilisant la relation $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1}\mu_{\alpha,\lambda}$. On utilise alors les formules

$$\mathbf{1}_{D(-y,n)}(zt) = \sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}} \mathbf{1}_{D(-yu^i,n)}(t)\mathbf{1}_{D(u^{-i},n)}(z) \quad \text{et} \quad \int_{D(u^{-i},n)} \mu^*_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\frac{p}{(p-1)\log u},$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{D(-y,n)} \alpha^{-1}(x)\, \mu_{\alpha,\lambda} &= \int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*} \mathbf{1}_{D(-y,n)}(zt)\ \alpha(zt)^{-1}\lambda(t)\ \alpha(z)\mu^*_{\mathrm{KL}}(z)\\ &= \sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}} \Big(\int_{D(-yu^i,n)} \alpha(z)^{-1}\lambda\Big)\Big(\int_{D(u^{-i},n)} \mu^*_{\mathrm{KL}}\Big)\\ &=\frac{p^{1-n}}{(p-1)\log u} \sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}} \int_{D(-yu^i,n)} \alpha^{-1}\lambda = \frac{p^{1-n}}{(p-1)\log u} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha^{-1}\lambda = p^{-n}.\end{aligned}$$

2.5. Les éléments $A_{\alpha,\lambda}$, $B_{\alpha,\lambda}$ et $C_{\alpha,\lambda}$

• Soit $A_{\alpha,\lambda} \in \mathscr{R}^+$ la solution (cf. lemme 1.5) de l'équation $(p^{-1}\alpha(p)\varphi-1)A_{\alpha,\lambda} = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\, \lambda$ vérifiant $\partial^i A_{\alpha,\lambda}(0) = 0$ si $\alpha(p) = p^{1-i}$. Soit $\mu'_{\alpha,\lambda}$ la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée d'Amice est $A_{\alpha,\lambda}$. Comme λ est à support dans $\mathbf{Z}_p^*$, la relation $(p^{-1}\alpha(p)\varphi-1)A_{\alpha,\lambda} = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\, \lambda$ implique que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\mu'_{\alpha,\lambda} = -\lambda$ et que $\mu'_{\alpha,\lambda}$ est vecteur propre de ψ pour la valeur propre $p^{-1}\alpha(p)$.

Lemme 2.11. — *Si $w(\alpha) + i \neq 0$ et si $n \in \mathbf{N}$, alors*

$$\int_{p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu'_{\alpha,\lambda} = -\frac{u^i\alpha(u) - 1}{w(\alpha) + i} \int_{p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $\alpha(p) = p^{1-i}$, alors toutes les quantités ci-dessus sont nulles. Nous supposerons donc $\alpha(p) \neq p^{1-i}$ dans ce qui suit. Par ailleurs, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu_{\alpha,\lambda}$ et $\mu'_{\alpha,\lambda}$ étant vecteurs propres de ψ pour la même valeur propre $p^{-1}\alpha(p)$, le cas n quelconque suit du cas $n = 0$.

Soit $F = \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu_{\alpha,\lambda}$. Comme $(p^{-1}\alpha(p)\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1)\cdot\mu_{\alpha,\lambda} = 0$, on a

$$(p^{-1}\alpha(p)\varphi - 1)F = -\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\mu_{\alpha,\lambda} = -\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda\star\alpha\mu^*_{\mathrm{KL}}.$$

En appliquant ∂^i et en évaluant le résultat en $T = 0$, cela nous donne

$$\begin{aligned}(p^{i-1}\alpha(p) - 1)\partial^i F(0) = -\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda\star\alpha\mu^*_{\mathrm{KL}} &= -\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda\Big)\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\alpha(x)\,\mu^*_{\mathrm{KL}}\Big)\\ &= \frac{-(w(\alpha)+i)}{u^i\alpha(u)-1}\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda.\end{aligned}$$

Comme $(p^{i-1}\alpha(p) - 1)\partial^i A_{\alpha,\lambda}(0) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda$ et $\partial^i F(0) = \int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu_{\alpha,\lambda}$, cela permet de conclure.

Lemme 2.12. — *Si $y \in \mathbf{Z}_p$ et si $n \geqslant m \geqslant 1$, alors*

$$\frac{w(\alpha)}{1-\alpha(u)^{-(p-1)p^{n-1}}}\sum_{a=1}^{(p-1)p^{n-1}}\alpha(u)^{-a}\int_{D(-u^a y,m)}\mu'_{\alpha,\lambda} = -\int_{D(-y,m)}\mu_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — Si $v_p(y) = 0$, cela suit du lemme 2.9, la restriction de $\mu'_{\alpha,\lambda}$ à $\mathbf{Z}_p^*$ étant $-\lambda$.

Si $v_p(y) = i < m$, on peut appliquer ce qui précède à $p^{-i}y$ et $m-i$ au lieu de y et m, en utilisant le fait que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu_{\alpha,\lambda}$ et $\mu'_{\alpha,\lambda}$ sont vecteurs propres de ψ pour la valeur propre $p^{-1}\alpha(p)$.

Enfin, si $v_p(y) \geqslant m$, cela suit du lemme 2.11

• Soit k un entier $\geqslant 1$. On suppose que $w(\alpha) \notin \{0, -1, \dots, 1-k\}$, ce qui implique que $\alpha(u)\sigma_u - 1$ est bijectif sur $\mathscr{R}^+/t^k$ (qui est, d'après le théorème des restes chinois et la factorisation de $t = \log(1+T)$, isomorphe à $\prod_{n\in\mathbf{N}} L_n[t]/t^k$). Il existe donc $C_{\alpha,\lambda} \in \mathscr{R}^+$ vérifiant $(\alpha(u)\sigma_u - 1)C_{\alpha,\lambda} \equiv -A_{\alpha,\lambda} \bmod t^k\mathscr{R}^+$. Un tel $C_{\alpha,\lambda}$ est unique modulo $t^k\mathscr{R}^+$.

Proposition 2.13. — *Si $n \in \mathbf{N}$, si $0 \leqslant i \leqslant k-1$, et si $y \in \mathbf{Z}_p$, alors*

$$(w(\alpha)+i)\cdot\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\eta^y\partial^i C_{\alpha,\lambda}(\eta-1) = p^n\int_{D(-y,n)} x^i\mu_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — On a $w(x^i\alpha) = w(\alpha) + i$ et, avec des notations évidentes,

$$\partial^i C_{\alpha,\lambda} = C_{x^i\alpha,x^i\lambda} \quad\text{et}\quad x^i\mu_{\alpha,\lambda} = \mu_{x^i\alpha,x^i\lambda},$$

ce qui permet de se ramener à $i = 0$ pour faire les calculs.

La relation $(\alpha(u)\sigma_u - 1)C_{\alpha,\lambda} \equiv -\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\mu'_{\alpha,\lambda} \bmod t^k$ se traduit par

$$\alpha(u)C_{\alpha,\lambda}(\eta^u - 1) - C_{\alpha,\lambda}(\eta-1) = -\int_{\mathbf{Z}_p^*}\eta^x\,\mu'_{\alpha,\lambda},$$

quel que soit $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}$. Soit

$$g(y) = w(\alpha) \cdot \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^y C_{\alpha,\lambda}(\eta - 1).$$

En multipliant la relation ci-dessus par η^{uy}, on obtient la relation

$$\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{uy} C_{\alpha,\lambda}(\eta^u - 1) = \alpha(u)^{-1} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \Big(\eta^{uy} C_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) + \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^{x+uy}\, \mu'_{\alpha,\lambda}\Big).$$

Comme $\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^z = p^n \mathbf{1}_{D(0,n)}(z)$, on en déduit l'équation fonctionnelle $g(y) = \alpha(u)^{-1}(g(uy) + w(\alpha)v(uy))$, avec

$$v(y) = -\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^{x+y}\, \mu'_{\alpha,\lambda}(x) = -p^n \int_{D(-y,n)} \mu'_{\alpha,\lambda}(x).$$

En utilisant le fait que g est constante modulo $p^n \mathbf{Z}_p$ et que $u^{(p-1)p^{n-1}} \equiv 1 \bmod p^n$, cela permet de calculer $g(y)$. On obtient

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)p^{n-1}}} \sum_{a=1}^{(p-1)p^{n-1}} \alpha(u)^{-a} v(u^a y) \\ &= \frac{-w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)p^{n-1}}} \sum_{a=1}^{(p-1)p^{n-1}} \alpha(u)^{-a} \Big(p^n \int_{D(-u^a y,n)} \mu'_{\alpha,\lambda}(x)\Big), \end{aligned}$$

et le lemme 2.12 permet de conclure.

• On note $B_{\alpha,\lambda} \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ la solution[13] de l'équation $(\alpha(u)\sigma_u - 1)B_{\alpha,\lambda} = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x\, \lambda$. On remarque que, modulo t^k, on a

$$(\alpha(u)\sigma_u - 1)\big(B_{\alpha,\lambda} + (p^{-1}\alpha(p)\varphi - 1)C_{\alpha,\lambda}\big) = 0.$$

Comme $w(\alpha) \notin \{0, -1, \dots, 1-k\}$ par hypothèse, cela implique que $\alpha(u)\sigma_u - 1$ est injectif sur $\mathscr{R}/t^k$ et donc que $B_{\alpha,\lambda} + (p^{-1}\alpha(p)\varphi - 1)C_{\alpha,\lambda} \equiv 0 \bmod t^k$.

3. L'entrelacement fantôme

Ce § est consacré à la description, en termes de distributions sur $\mathbf{Q}_p$, du module $(D(s)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ apparaissant dans le th. 0.6.

[13] On rappelle que $\sigma_u - 1$ est inversible sur $(D^\dagger)^{\psi=0}$ pour tout (φ, Γ)-module D, étale sur $\mathscr{E}$; ceci s'applique en particulier au (φ, Γ)-module $\mathscr{E}$ avec action de Γ tordue par α.

3.1. Rappels sur les (φ, Γ)-modules

Surconvergence.— Si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{E}$, on note $D^\dagger$ l'ensemble de ses éléments surconvergents : c'est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ et l'application naturelle $\mathscr{E} \otimes^\dagger_{\mathscr{E}} D^\dagger \to D$ est un isomorphisme [**12, 4**]. On peut raffiner ce qui précède et définir, si $r \in]0, \frac{p}{p-1}]$, un sous-$\mathscr{E}^{(0,r]}$-module $D^{(0,r]}$ de $D^\dagger$ (c'est le plus grand sous-$\mathscr{E}^{(0,r]}$-module M de rang fini de D tel que $\varphi(M) \subset \mathscr{E}^{(0,r/p]} \cdot M$) ; alors :

- $\varphi(D^{(0,r]}) \subset D^{(0,r/p]}$,
- $D^\dagger$ est la réunion croissante des $D^{(0,r]}$ pour $r > 0$,
- il existe $r(D) \in]0, \frac{p}{p-1}]$ tel que les applications naturelles

$$\mathscr{E}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^{(0,r]}} D^{(0,r]} \to D^\dagger \quad \text{et} \quad \mathscr{E}^{(0,s]} \otimes_{\mathscr{E}^{(0,r]}} D^{(0,r]} \to D^{(0,s]}, \quad \text{si } 0 < s < r < r(D),$$

soient des isomorphismes.

L'opérateur ψ.— On dispose sur D d'un inverse à gauche ψ de φ, qui commute à l'action de Γ, et tel que

$$\psi(a\varphi(x)) = \psi(a)x \text{ et } \psi(\varphi(a)x) = a\psi(x) \text{ si } a \in \mathscr{E} \text{ et } x \in D.$$

De plus, $D^{(0,r]}$ est stable par ψ, si $r < r(D)$ (et si $r < r(D)/p$, alors $\psi(D^{(0,r]}) \subset D^{(0,pr]}$).

Si D_0 est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D stable par φ et Γ, alors D_0 est stable par ψ, et D_0 contient un plus grand sous-$\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$-module compact $D_0^\sharp$ sur lequel ψ est surjectif [**27**, prop. II.4.2].

Le $P(\mathbf{Q}_p)$-module $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$.— On note $D_0^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ l'ensemble des suites $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $D_0^\sharp$ vérifiant $\psi(z^{(n+1)}) = x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $D_0^\sharp$ est stable par Γ, ψ et $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$, les formules :

$$\begin{aligned}
&\Big(\big(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot z\Big)^{(n)} = z^{(n+k)} \text{ si } k \in \mathbf{Z} \text{ et } n + k \geqslant 0,\\
&\Big(\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot z\Big)^{(n)} = \sigma_a(z^{(n)}) \ \text{ si } a \in \mathbf{Z}_p^* ;\\
&\Big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot z\Big)^{(n)} = (1+T)^{bp^n} z^{(n)} \ \text{ si } b \in \mathbf{Q}_p \text{ et } n \geqslant -v_p(b),
\end{aligned}$$

munissent [**27**, § III.2] le $\mathscr{O}_L$-module $D_0^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ d'une action du mirabolique $P(\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Le sous-L-espace vectoriel de D engendré par $D_0^\sharp$ ne dépend pas du choix de D_0 ; on le note $D^\sharp$. C'est un sous-module de $D^{(0,r]}$ pour tout $r < r(D)$. Le L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathscr{O}_L} (D_0^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ ne dépend pas non plus de D_0 ; on le note $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$; les formules ci-dessus le munissent d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$.

On peut aussi caractériser $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ comme l'ensemble des suites $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de D, vérifiant $\psi(z^{(n+1)}) = x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, qui sont bornées dans D. Plus précisément, une suite $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de D vérifiant $\psi(z^{(n+1)}) = x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ appartient à $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ si et seulement si l'adhérence dans D de $\{z^{(n)},\ n \in \mathbf{N}\}$ est compacte.

3.2. Le module $D(s)$ dans les cas semi-stable et non géométrique

Afin de mettre sur le même plan les résultats dans les deux cas, introduisons l'éclaté $\widetilde{\mathscr{T}}$ de $\widehat{\mathscr{T}}$ en le caractère trivial. On identifie $\widetilde{\mathscr{T}}(L)$ aux fonctions $h : \mathbf{Q}_p^* \to L$ de la forme $h = \delta$, avec $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L) - \{1\}$, ou de la forme $h = \log_{\mathscr{L}}$, avec $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Si $h \in \widetilde{\mathscr{T}}(L)$, on note δ_h son image dans $\widehat{\mathscr{T}}(L)$. On a donc $\delta_h = \delta$, si $h = \delta$, avec $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L) - \{1\}$, et $\delta_h = 1$, si $h = \log_{\mathscr{L}}$, avec $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$.

• Si $h = \log_{\mathscr{L}}$, soient $C_h = -\frac{p-1}{p}\log_{\mathscr{L}} T$, $B_h = (1 - p^{-1}\varphi)C_h$ et $A_h = (1 - \sigma_u)C_h$.

• Si $\delta_h \neq 1$ est tel que δ_h^{-1} n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, et si k est un entier assez grand (cf. ci-dessous) tel que $w(\delta_h) \notin \{0, -1, \dots, 1-k\}$, soit λ_h une mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta_h^{-1}\, \lambda_h = \frac{(p-1)\log u}{p} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\, \lambda_h = 0, \text{ si } \delta_h(p) = p^{1-i}, \text{ avec } i \in \mathbf{N},$$

et notons simplement :

– A_h l'élément A_{δ_h,λ_h} de $\mathscr{R}^+$; c'est une solution de $(p^{-1}\delta_h(p)\varphi - 1)A_h = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\, \lambda_h$,

– B_h l'élément B_{δ_h,λ_h} de $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$; c'est la solution de $(\delta_h(u)\sigma_u - 1)B_h = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\, \lambda_h$,

– C_h l'élément C_{δ_h,λ_h} de $\mathscr{R}^+$; on a donc $A_h + (\delta_h(u)\sigma_u - 1)C_h \equiv B_h + (p^{-1}\delta_h(p)\varphi - 1)C_h \equiv 0 \mod t^k$.

Dans tous les cas, on choisit $N(h) \geqslant 1$ tel que $B_h \in \mathscr{E}^{]0,r_{N(h)}]}$ (avec $r_n = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$).

Soit maintenant $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$. On suppose que $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ ou qu'il existe $k \in \mathbf{N}$, avec $k - 1 \geqslant 2u(s)$ et $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$, ce qui inclut le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}$.

• Dans le second cas, on choisit un tel k. Alors $x^{1-k}\delta_s = x^{-k}|x|^{-1}\delta_1\delta_2^{-1} \neq 1$, ce qui nous permet de définir h comme l'élément de $\widetilde{\mathscr{T}}(L)$ vérifiant $\delta_h = x^{1-k}\delta_s$. De plus, δ_h^{-1} n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, et $w(\delta_h) \notin \{0, -1, \dots, 1-k\}$.

• Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, soient $k = 2u(s) + 1$, et soit $h = \log_{\mathscr{L}}$.

On dispose alors de la description suivante du (φ, Γ)-module $D(s)^\dagger$ de l'introduction.

Proposition 3.1. — *Il existe une base g_1, g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D(s)^\dagger$ dans laquelle les actions de φ et Γ sont données par*

$$\sigma_u(g_1) = u^{-k}\delta_1(u)g_1, \quad \sigma_u(g_2) = \delta_2(u)(g_2 + A_h\, g_1)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \quad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + B_h\, g_1),$$

et $z_1 g_1 + z_2 g_2 \in D(s)^\dagger$, si et seulement si z_1 est d'ordre $k - u(s)$, z_2 est d'ordre $u(s)$, et $z_1 - C_h z_2$ a un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}$, et $n \gg 0$.

De plus, il existe $N(s)$ tel que, si $w \in D(s)^\sharp$, alors z_2 et z_1 appartiennent à $\mathscr{E}^{]0,r_{N(s)}]}$, où $r_n = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$, et $z_1 - C_h z_2$ a un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(s)-1}}$.

Démonstration. — La première partie de la proposition correspond à [**22**, prop. 3.9] dans le cas non semi-stable et à [**22**, prop. 4.20] dans le cas semi-stable. Le rabiot concernant $D(s)^\sharp$ vient de ce que $D(s)^\sharp \subset D(s)^{(0,r]}$, si $r < r(D(s))$.

Remarque 3.2. — Il est, *a priori*, loin d'être clair qu'il existe des couples (z_1, z_2) d'éléments de $\mathscr{R}$ vérifiant les conditions « $z_1 - C_h z_2$ a un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}$ et $n \gg 0$ » et « z_1 est d'ordre $k - u(s)$ et x_2 est d'ordre $u(s)$ ». L'existence de tels couples est, comme nous le verrons, équivalente à la non nullité de $\Pi(s)^*$. Cette existence, dans le cas où $C_h \in L$ est équivalente à la conjecture « faiblement admissible implique admissible » de Fontaine (en dimension 2, dans le cas cristallin, pour $K = \mathbf{Q}_p$). Dans le cas général, cette existence est contenue de manière implicite dans le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya [**39**]. Ceci avait déjà été utilisé par Berger [**1**] qui en avait déduit une nouvelle démonstration de la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

3.3. La distribution $\ell_h(\mu)$ sur $\mathrm{LP}_c^{[0,k]}(\mathbf{Q}_p)_0$

On note $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)$ l'espace des fonctions localement constantes (à valeurs dans L), à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)_0$ le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle (ou, ce qui revient au même, de transformée de Fourier nulle en 0). L'espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)_0$ est engendré par les $\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\eta^{p^n x}$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$.

On note $\mathrm{LP}_c^{[0,k]}(\mathbf{Q}_p)$ (resp. $\mathrm{LP}_c^{[0,k]}(\mathbf{Q}_p)_0$) l'espace des fonctions de la forme $\phi(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \phi_i(x)x^i$, où les ϕ_i sont des éléments de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)$ (resp. $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)_0$).

On rappelle qu'à une distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$, on associe ([**26**, prop. 2.13]) sa transformée d'Amice $(\mathscr{A}_\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $\mathscr{A}_\mu^{(n)} = \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} (1+T)^{p^n x}\,\mu \in \mathscr{R}^+$. On a $\psi(\mathscr{A}_\mu^{(n+1)}) = \mathscr{A}_\mu^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, si $r \geqslant 0$, on note $\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ l'espace des distributions globalement d'ordre r sur $\mathbf{Q}_p$ ([**26**, n° 2.5]).

Soit $\alpha_h = \delta_h(p) = p^{1-k}\delta_1(p)\delta_2(p)^{-1}$; on a $v_p(\alpha_h) \leqslant 0$. Soit $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$. Par définition, $v_r(\mathscr{A}_\mu^{(m)}) \geqslant mr + v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}$ quel que soit $m \in \mathbf{Z}$, et comme $v_p(p\alpha_h^{-1}) > 0$, il résulte des prop. 1.13 et 1.16 que la série

$$(p\alpha_h^{-1})^n \Big(C_h \mathscr{A}_\mu^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty} (p\alpha_h^{-1})^m \psi^m (B_h \mathscr{A}_\mu^{(n+m)}) \Big)$$

converge. On note $\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}$ sa somme ; c'est un élément de $\mathscr{E}^{]0,r_{N(h)}]}$ si $\delta_h \neq 1$ et de $\mathscr{E}^{]0,r_{N(h)}]}[\log_{\mathscr{L}} T]$, si $h = \log_{\mathscr{L}}$.

Remarque 3.3. — (i) Comme $B_h + (p^{-1}\alpha_h\varphi - 1)C_h \equiv 0 \bmod t^k$, on a

$$\Big(C_h\mathscr{A}_\mu^{(n)} + \sum_{m=1}^{j}(p\alpha_h^{-1})^m\psi^m(B_h\mathscr{A}_\mu^{(n+m)})\Big) - (p\alpha_h^{-1})^j\psi^j(C_h\mathscr{A}_\mu^{(n+j)}) \in t^k\mathscr{E}^{]0,r_{N(h)}]}$$

$$\psi(\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n+1)}) - \ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)} \in t^k\mathscr{E}^{]0,r_{N(h)}]},$$

la seconde congruence se déduisant de la première par passage à la limite.

(ii) La seconde congruence permet de donner un sens, modulo T^k, à $\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}((1+T)\eta - 1)$, pour tout $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$. En effet, $\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}((1+T)\eta - 1)$ a un sens si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(h)-1}}$, et la congruence sus-mentionnée permet de définir $\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}((1+T)\eta - 1)$, modulo T^k, par

$$\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}((1+T)\eta - 1) = p^{-j}\sum_{\zeta^{p^j}=\eta}\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n+j)}((1+T)\zeta - 1),$$

pour tout $j \geqslant N(h) - 2$. Cette formule devient alors valable, par construction, pour tout $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$ et tous $n, j \in \mathbf{N}$; on en déduit l'existence d'une forme linéaire $\ell_h(\mu)$ sur $\mathrm{LP}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$ telle que, pour tous $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$ et $n \in \mathbf{N}$, on ait

$$\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\eta^{p^n x}(p^n x)^i\,\ell_h(\mu) = \partial^i(\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)})(\eta - 1).$$

(iii) On a $\ell_h\big(\big(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mu\big) = \big(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\ell_h(\mu)$, pour tout $b \in \mathbf{Q}_p$. En effet, l'action de $\big(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ correspond à multiplier $\mathscr{A}_\mu^{(n)}$, et donc aussi $\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}$, par $(1+T)^{p^n b}$, pour tout n assez grand. De même, l'action de $\big(\begin{smallmatrix}p^k & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ revenant à décaler de k les $\mathscr{A}_\mu^{(n)}$, on a $\ell_h\big(\big(\begin{smallmatrix}p^k & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mu\big) = \big(\begin{smallmatrix}p^k & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\ell_h(\mu)$, si $k \in \mathbf{Z}$.

(iv) Si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(h)-1}}$, alors $\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(n)}((1+T)\eta - 1)$ est, modulo T^k, la limite de $(p\alpha_h^{-1})^{n+j}\psi^j(C_h\mathscr{A}_\mu^{(n+j)})$, quand $j \to +\infty$; il en est donc de même pour tout $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$.

3.4. Le module $(D(s)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$

La description ci-dessous de l'espace $(D(s)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est l'ingrédient principal menant au th. 0.6.

Proposition 3.4. — *Si $(z_1^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_2^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathscr{R}$, et si $z^{(n)} = z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in (D(s)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$;*

(ii) *il existe $\mu_z \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ et $\nu_z \in \mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ telles que $\nu_z - \ell_h(\mu_z)$ soit identiquement nulle sur $\mathrm{LP}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$z_2^{(n)} = \delta_2(p)^n\mathscr{A}_{\mu_z}^{(n)} \quad \text{et} \quad z_1^{(n)} = (\delta_1(p)p^{-k})^n\big(\mathscr{A}_{\nu_z}^{(n)} - \ell_h(\mathscr{A}_{\mu_z})^{(n)}\big) + \delta_2(p)^n C_h\mathscr{A}_{\mu_z}^{(n)}.$$

Remarque 3.5. — (i) Il n'est pas très difficile de voir que $z \mapsto \mu_z$ est injective, ce qui nous fournit une application $\mu_z \to \nu_z$ dont l'étude est la clé de la démonstration du th. 0.6. Tout se passe comme si

$$\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(x)\nu_z(x) = \int_{\mathbf{Q}_p\times\mathbf{Q}_p}\phi(x+y)\delta_h(x)\mu_z(y)\lambda^*(x),$$

où λ^* serait la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p^*$ (qui ne peut pas exister comme distribution continue), et donc comme si on avait affaire à un fantôme d'entrelacement : si α, β sont des caractères lisses de $\mathbf{Q}_p^*$, la formule

$$I(\phi)(z) = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x+z)\,\beta\alpha^{-1}(x)\,|x|^{-1}dx,$$

fournit un opérateur d'entrelacement $I : \mathrm{Ind}_B^G\,\beta\otimes\alpha|\ |^{-1} \to \mathrm{Ind}_B^G\,\alpha\otimes\beta|\ |^{-1}$, où B est le borel de $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, et $\delta_1\otimes\delta_2$ est le caractère de B envoyant $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$ sur $\delta_1(a)\delta_2(d)$, si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$.

(ii) Si $z \in D(s)^{\psi=1} \subset (D(s)^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, alors

$$\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu_z = \delta_2(p)^{-1}\mu_z \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\nu_z = p^k\delta_1(p)^{-1}\nu_z.$$

(iii) En revenant aux formules de l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $(D(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ et sur $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$, on obtient la formule

$$\mu_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z} = \delta_2(a)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu_z, \quad \text{si } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\in P(\mathbf{Q}_p).$$

La démonstration de la prop. 3.4 repose sur le peu ragoûtant lemme suivant.

Lemme 3.6. — (i) *Si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in (D(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, avec $z^{(n)} = z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$, alors il existe une distribution μ_z globalement d'ordre $u(s)$ sur $\mathbf{Q}_p$ et une suite $G_z = (G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}^+_{k-u(s)}$ vérifiant :*

(a) *$G_z^{(n)} = \psi(G_z^{(n+1)})$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$;*

(b) *il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que $v_{k-u(s)}(G_z^{(n)}) \geqslant c + (k-u(s))n$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$;*

(c) *$G_z^{(n)} - \ell_h(\mathscr{A}_{\mu_z})^{(n)}$ a un zéro d'ordre k en $\eta-1$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}-\boldsymbol{\mu}_{p^{N(s)-1}}$;*

(d) *$z_1^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})^{-n}\big(G_z^{(n)} - \ell_h(\mathscr{A}_{\mu_z})^{(n)}\big) + \delta_2(p)^nC_h\mathscr{A}_{\mu_z}^{(n)}$ et $z_2^{(n)} = \delta_2(p)^n\mathscr{A}_{\mu_z}^{(n)}$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$.*

(ii) *Réciproquement, si $\mu\in\mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$, s'il existe une suite $G = (G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}^+_{k-u(s)}$ vérifiant les propriétés* (a), (b), (c) *ci-dessus, et si les suites de terme général $z_1^{(n)}$ et $z_2^{(n)}$ sont définies par les formules du* (d), *alors $(z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2)_{n\in\mathbf{N}} \in (D(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$.*

Démonstration. — On a

$$g_1 = p^k\delta_1(p)^{-1}\varphi(g_1) \quad \text{et} \quad g_2 = \delta_2(p)^{-1}\varphi(g_2) - p^k\delta_1(p)^{-1}B_h\varphi(g_1).$$

On en tire la formule

$$\psi(z_1g_1 + z_2g_2) = p^k\delta_1(p)^{-1}(\psi(z_1) - \psi(B_hz_2))g_1 + \delta_2(p)^{-1}\psi(z_2)g_2.$$

On déduit de la formule précédente, et de la description de $D(s)^\natural$ de la prop. 3.1, que $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in (D(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, avec $z^{(n)} = z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$, si et seulement si :

- la suite $(z_2^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{E}_{u(s)}^{]0,r_{N(s)}]}$ vérifiant $z_2^{(n)} = \delta_2(p)^{-1}\psi(z_2^{(n+1)})$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$;

• la suite $(z_1^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{E}_{k-u(s)}^{]0,r_{N(s)}]}$ vérifiant $z_1^{(n)} = p^k\delta_1(p)^{-1}(\psi(z_1^{(n+1)}) - \psi(B_h z_2^{(n+1)}))$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$;

• $z_1^{(n)} - C_h z_2^{(n)}$ a un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(s)-1}}$.

Comme $v_p(\delta_2(p)^{-1}) = u(s) > 0$, la première condition implique, d'après la prop. 1.12, que $z_2^{(n)}\in\mathscr{R}^+$ et $\psi(\delta_2(p)^{-(n+1)}z_2^{(n+1)}) = \delta_2(p)^{-n}z_2^{(n)}$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$; elle est donc équivalente à l'existence d'une distribution μ_z, globalement d'ordre $u(s)$ sur $\mathbf{Q}_p$, telle que :

$$\mathscr{A}_{\mu_z}^{(n)} = \delta_2(p)^{-n}z_2^{(n)} \quad \text{quel que soit } n\in\mathbf{N}.$$

De plus, comme $v_p(p^k\delta_1(p)^{-1}) = k - u(s) > u(s)$, et comme la suite de terme général $z_2^{(n)}$ est une suite bornée de $\mathscr{R}_{u(s)}^+$, il résulte de la prop. 1.17, que $(p^k\delta_1(p)^{-1})^m\psi^m(B_h z_2^{(m)})$ tend vers 0 dans $\mathscr{E}_{u(s)}^{]0,r_{N(s)}]}$ quand m tend vers $+\infty$. Ceci permet de montrer que la série

$$z_1^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty}(p^k\delta_1(p)^{-1})^m\psi^m(B_h z_2^{(n+m)})$$

converge dans $\mathscr{E}_{k-u(s)}^{]0,r_{N(s)}]}$. On note $y^{(n)}$ la somme de cette série. Un calcul immédiat montre que $y^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})\psi(y^{(n+1)})$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$ et, les suites de terme général $z_1^{(n)}$ et $z_2^{(n)}$ étant bornées, il en est de même de la suite de terme général $y^{(n)}$. En particulier, comme $v_p(p^k\delta_1(p)^{-1}) > 0$, on en déduit (prop. 1.12) l'appartenance de $y^{(n)}$ à $\mathscr{R}^+$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$.

On déduit de ce qui précède que, si on pose $G_z^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})^n y^{(n)}$, alors $G_z = (G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{R}_{k-u(s)}^+$ vérifiant

• $G_z^{(n)} = \psi(G_z^{(n+1)})$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$;

• la suite de terme général $(p^k\delta_1(p)^{-1})^{-n}G_z^{(n)}$ est bornée dans $\mathscr{R}_{k-u(s)}^+$;

• $G_z^{(n)} - \ell_h(\mathscr{A}_{\mu_z})^{(n)}$ a un zéro d'ordre k en $\eta - 1$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(s)-1}}$.

Ceci permet de démontrer le (i). Pour démontrer le (ii), il suffit de remonter les calculs.

Les deux premières conditions ci-dessus, satisfaites par la suite $(G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, sont équivalentes à l'existence d'une distribution $\nu_z\in\mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ dont $(G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est la transformée d'Amice. La prop. 3.4 est donc une conséquence du résultat suivant.

Lemme 3.7. — *$\nu_z - \ell_h(\mu_z)$ est identiquement nulle sur* $\mathrm{LP}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$.

Démonstration. — La congruence $(\mathscr{A}_{\nu_z}^{(n)} - \ell_h(\mathscr{A}_{\mu_z})^{(n)})((1+T)\eta - 1)\equiv 0 \bmod T^k$, pour tout $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(s)-1}}$, se traduit par le fait que $\nu_z' = \nu_z - \ell_h(\mu_z)$ est nulle sur toute fonction de la forme $\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\eta^{p^n x}x^i$, si $n\in\mathbf{N}$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{N(s)-1}}$ et si $0\leqslant i\leqslant k-1$. Comme $\sum_{\zeta^p=\eta}\mathbf{1}_{p^{-n-1}\mathbf{Z}_p}\zeta^{p^{n+1}x} = p\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\eta^{p^n x}$, le sous-espace engendré par les fonctions ci-dessus contient aussi les $\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\eta^{p^n x}x^i$, si $n\in\mathbf{N}$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$ et si $0\leqslant i\leqslant k-1$, et comme ces fonctions engendrent $\mathrm{LP}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$, cela permet de conclure.

3.5. Propriétés algébriques de l'entrelacement fantôme

Dans ce n°, on s'intéresse à l'application $\mu \mapsto \ell_h(\mu)$.

Soit $h \in \widetilde{\mathscr{T}}(L)$ tel que δ_h^{-1} ne soit pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$.

• On définit $\alpha_h, \beta_h \in L$, par

$$\alpha_h = \delta_h(p) = \begin{cases} h(p) & \text{si } \delta_h \neq 1, \\ 1 & \text{si } h = \log_{\mathscr{L}}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_h = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_h \neq 1, \\ \mathscr{L} & \text{si } h = \log_{\mathscr{L}}. \end{cases}$$

On a donc, dans tous les cas, $h(px) = \alpha_h h(x) + \beta_h$, quel que soit $x \in \mathbf{Q}_p^*$.

• On pose $w(h) = w(\delta_h)$. Il existe alors $n(h) \in \mathbf{N}$ tel que, si $x \in D(1, n(h))$, alors

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w(h)}{n}(x-1)^n & \text{si } \delta_h \neq 1, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n & \text{si } h = \log_{\mathscr{L}}. \end{cases}$$

En utilisant l'équation fonctionnelle $h(xy) = h(x)h(y)$, si $\delta_h \neq 1$ et $h(xy) = h(x) + h(y)$, si $h = \log_{\mathscr{L}}$, on en déduit que h est analytique sur $D(y, n(h) + v_p(y))$, quel que soit $y \in \mathbf{Q}_p^*$.

• On définit une distribution μ_h, par

$$\mu_h = \begin{cases} \mu_{\delta_h, \lambda_h} & \text{si } \delta_h \neq 1, \\ \mu_{\mathrm{KL}} & \text{si } h = \log_{\mathscr{L}}, \end{cases}$$

où $\mu_{\delta_h, \lambda_h}$ est la distribution définie au n° 2.4.

Lemme 3.8. — *$\mu_h \in \mathscr{D}_{k-2r}(\mathbf{Q}_p)$ et $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_h = (p\alpha_h^{-1})\mu_h$*

Démonstration. — Si $\delta_h \neq 1$, c'est inclus dans la définition de $\mu_{\delta_h, \lambda_h}$, et si $h = \log_{\mathscr{L}}$, c'est le contenu de la prop. 2.1 et de la rem. 2.3.

• On définit une fonction $f_{h,j}(x, y)$, pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$, par

$$f_{h,j}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{y^{j-i}x^i}{w(h)+i} & \text{si } \delta_h \neq 1, \\ y^j \log_{\mathscr{L}} y + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \frac{y^{j-i}x^i}{i} & \text{si } h = \log_{\mathscr{L}}. \end{cases}$$

Lemme 3.9. — (i) *Si $j \in \mathbf{N}$, alors $f_{h,j}(px, py) = p^j(f_{h,j}(x, y) + \beta_h y^j)$.*

(ii) *Si $j \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{Q}_p$, alors $\sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m}(-a)^{j-m} f_{h,m}(x, y) = f_{h,j}(x, y - a)$.*

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Passons au (ii). Si $\delta_h \neq 1$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(-a)^{j-m}f_{h,m}(x,y) &= \sum_{m=0}^{j}\sum_{i=0}^{m}\frac{j!}{m!(j-m)!}(-a)^{j-m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{y^{m-i}x^i}{w(h)+i}\\ &=\sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!(j-i)!}\frac{x^i}{w(h)+i}\Big(\sum_{m=i}^{j}\frac{(j-i)!}{(j-m)!(m-i)!}(-a)^{j-m}y^{m-i}\Big)\\ &=\sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!(j-i)!}\frac{x^i}{w(h)+i}(y-a)^{j-i}=f_{h,j}(x,y-a),\end{aligned}$$

ce qui démontre le (ii) dans ce cas. Le cas $h=\log_{\mathscr{L}}$ suit du même calcul (avec $w(h)=0$ et en séparant les termes $i=0$ et $i\geqslant 1$). Ceci permet de conclure.

Si $h=\log_{\mathscr{L}}$, on pose $\partial^i h(0)=c_{i,\mathscr{L}}$, où $c_{i,\mathscr{L}}$ est défini à la prop. 2.5 (on rappelle que si $h\neq\log_{\mathscr{L}}$, alors $C_h\in\mathscr{R}^+$).

Lemme 3.10. — *Si $y\in\mathbf{Z}_p$, si $n\geqslant N(h)$, et si $0\leqslant j\leqslant k-1$, alors*

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\eta^y\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}y^{j-i}\partial^i C_h(\eta-1)=p^n\int_{D(-y,n)}f_{h,j}(x,y)\mu_h(x).$$

Démonstration. — Dans le cas où $\delta_h\neq 1$, cela résulte de la prop. 2.13, et dans le cas $h=\log_{\mathscr{L}}$, cela résulte de la prop. 2.5.

Lemme 3.11. — *Soit $\mu\in\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$. Si $m,n\in\mathbf{N}$, et si $j\leqslant k-1$, alors*

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}}\partial^j\big((p\alpha_h^{-1})^n\psi^n(C_h\mathscr{A}_\mu^{(n)})\big)(\eta-1)=\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\Big(p^m\int_{D(-y,m)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu(y).$$

Démonstration. — Comme

$$\partial^j\psi^n=p^{-nj}\psi^n\partial^j\quad\text{et}\quad\psi^n(f)(a)=p^{-n}\sum_{b^{p^n}=a}f(b),$$

on obtient

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}}\partial^j\big((p\alpha_h^{-1})^n\psi^n(C_h\mathscr{A}_\mu^{(n)})\big)(\eta-1)=$$

$$(p^{-j}\alpha_h^{-1})^n\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+m}}}\Big(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\partial^i C_h(\eta-1)\cdot\partial^{j-i}\mathscr{A}_\mu^{(n)}(\eta-1)\Big).$$

Maintenant, comme

$$\partial^{j-i}\mathscr{A}_\mu^{(n)}(\eta-1)=\int_{\mathbf{Z}_p}y^{j-i}\eta^y\,\mu^{(n)},\quad\text{où}\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\mu^{(n)}=\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\phi(p^nx)\,\mu,$$

on peut réécrire la somme ci-dessus sous la forme

$$(p^{-j}\alpha_h^{-1})^n \int_{\mathbf{Z}_p} \Big(\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+m}}} \eta^y \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} y^{j-i}\partial^i C_h(\eta-1)\Big)\,\mu^{(n)}(y),$$

ou encore, en utilisant le lemme 3.10, sous la forme

$$(p^{-j}\alpha_h^{-1})^n \int_{\mathbf{Z}_p} \Big(p^{n+m}\int_{D(-y,n+m)} f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu^{(n)}(y).$$

On conclut en faisant les changements de variables $x=p^n u$, $y=p^n v$, et en utilisant le lemme 3.8, le (i) du lemme 3.9 et, dans le cas $h=\log_{\mathscr{L}}$, le lemme 2.2.

Proposition 3.12. — *Soit $\mu\in\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$. Si $0\leqslant j\leqslant k-1$ et si $\phi\in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)_0$, alors*

$$\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(x)x^j\,\ell_h(\mu)=\int_{\mathbf{Q}_p}\Big(\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(x+y)f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu(y).$$

Démonstration. — Comme $\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}-\{1\}}\eta^x=p^m\mathbf{1}_{p^m\mathbf{Z}_p}-1$, si $x\in\mathbf{Z}_p$, on a

$$\int_{\mathbf{Q}_p}(p^m\mathbf{1}_{p^m\mathbf{Z}_p}-\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p})x^j\,\ell_h(\mu)=\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}-\{1\}}\partial^j\big(\ell_h(\mathscr{A}_\mu)^{(0)}\big)(\eta-1),$$

et le résultat se déduit, dans le cas de $\phi_m=p^m\mathbf{1}_{p^m\mathbf{Z}_p}-\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$, du lemme 3.11 par passage à la limite. Le cas général s'ensuit en utilisant la formule $\ell_h(g\cdot\mu)=g\cdot\ell_h(\mu)$, si $g=\left(\begin{smallmatrix}p^k & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et le fait que les $\phi_m(p^kx+b)$, pour $m\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{Z}$ et $b\in\mathbf{Q}_p$, engendrent $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)_0$.

4. Continuité de l'entrelacement fantôme

Dans ce §, on interprète (cf. th. 4.2), l'existence de la distribution ν_z de la prop. 3.4. Le résultat obtenu se traduit immédiatement en termes des duaux des représentations $\Pi(s)$ du § suivant.

4.1. Énoncé des résultats

Soit $h\in\widetilde{\mathscr{T}}(L)$, et soient $k\in\mathbf{N}$ et $r>0$. On définit des éléments $c_h(j)$, pour $j\leqslant k-1$ par

$$c_h(j)=\begin{cases}\frac{(w(h)+j)\cdots w(h)}{j!} & \text{si } \delta_h\neq 1,\\ 1 & \text{si } h=\log_{\mathscr{L}}.\end{cases}$$

On suppose que le triplet (h,k,r) vérifie les conditions suivantes.

• $v_p(\alpha_h)=2r-(k-1)\leqslant 0$;

• $c_h(j)\neq 0$, si $j\leqslant k-1$ (i.e. $w(h)\neq\{0,-1,\cdots,-k\}$, si h n'est pas de la forme $\log_{\mathscr{L}}$) ;

• δ_h^{-1} n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i\in\mathbf{N}$ (c'est en fait une conséquence des deux premières conditions).

Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des parties finies de $L \times \mathbf{Q}_p \times \mathbf{N}$. Si $U = \{u = (a_u, j_u, \lambda_u)\} \in \mathscr{U}$, soient

$$\ell_{h,U}(y) = \sum_{u\in U} \lambda_u \frac{(y-a_u)^{j_u}}{c_h(j_u)} h(y-a_u) \quad \text{et} \quad P_U(X) = \sum_{u\in U} \lambda_u (X-a_u)^{j_u}.$$

On peut aussi écrire $P_U(X)$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{U,i} X^i, \quad \text{avec } b_{U,i} = \sum_{u\in U} \lambda_u \binom{j_u}{i} (-a_u)^{j_u-i}.$$

On note $\mathscr{U}'(k,r)$ l'ensemble des parties finies U de $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{N} \times L$ telles que $k-1-r < j_u \leqslant k-1$ si $u \in U$ et on note $\mathscr{U}(k,r)$ (resp. $\mathscr{U}(k,r)^0$) l'ensemble des $u \in \mathscr{U}'(k,r)$ tels que $\deg P_U < k-1-r$ (resp. $P_U = 0$).

Proposition 4.1. — *Si $U \in \mathscr{U}(k,r)$, et si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, alors $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu$ converge.*

Démonstration. — C'est, modulo le lemme 4.4 ci-dessous, une conséquence du lemme 2.18 de [**26**].

Théorème 4.2. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu = 0$ *quel que soit $U \in \mathscr{U}(k,r)$;*

(ii) *il existe $\nu \in \mathscr{D}_{k-r}(\mathbf{Q}_p)$ dont la restriction à $\mathrm{LC}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$ est $\ell_h(\mu)$.*

Démonstration. — La démonstration de ce théorème occupe l'intégralité du §.

Lemme 4.3. — (i) *Si $\delta_h \neq 1$, si $c_h(j) \neq 0$, et si $a \in \mathbf{Q}_p$, alors $h(y)^{-1}\big(\frac{(y-a)^j}{c_h(j)} h(y-a)\big)$ est méromorphe au voisinage de $y = \infty$, et on a, au voisinage de $y = \infty$,*

$$h(y)^{-1}\Big(\frac{(y-a)^j}{c_h(j)} h(y-a)\Big) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-a)^{j-i} \frac{y^i}{c_h(i)} + O(y^{-1}).$$

(ii) *Si $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, et si $a \in \mathbf{Q}_p$, alors $(y-a)^j(\log_{\mathscr{L}}(y-a) - \log_{\mathscr{L}} y)$ est méromorphe au voisinage de $y = \infty$, et on a, au voisinage de $y = \infty$,*

$$(y-a)^j(\log_{\mathscr{L}}(y-a) - \log_{\mathscr{L}} y) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-a)^{j-i} \big(\frac{1}{i+1} + \cdots + \frac{1}{j}\big) y^i + O(y^{-1}) & \text{si } \mathscr{L} \in L, \\ 0 & \text{si } \mathscr{L} = \infty. \end{cases}$$

Démonstration. — (i) Au voisinage de $y = \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{(y-a)^j}{c_h(j)} \cdot \frac{h(y-a)}{h(y)} &= \frac{y^j}{c_h(j)} \big(1 - ay^{-1}\big)^{w(h)+j} \\ &= \Big(\frac{j!}{(w(h)+j)\cdots(w(h))} \sum_{n=0}^{j} \binom{w(h)+j}{n} (-a)^n y^{j-n}\Big) + O(y^{-1}), \end{aligned}$$

et on conclut en posant $i = j - n$ et en développant le coefficient binomial.

(ii) Le cas $\mathscr{L} = \infty$ est immédiat. Si $\mathscr{L} \in L$, on a

$$(y-a)^j(\log_{\mathscr{L}}(y-a) - \log_{\mathscr{L}} y) = y^j (1 - ay^{-1})^j \log(1 - ay^{-1}).$$

Or, une récurrence immédiate montre que la dérivée n-ième de $z^j \log z$ est, si $n \leqslant j$, égale à

$$j(j-1)\cdots(j-n+1)z^{j-n}\big(\log z+\frac{1}{j}+\cdots+\frac{1}{j-n+1}\big).$$

On démontre le (ii) en utilisant la formule de Taylor en 1 pour la fonction $z^j \log z$, et en posant $i = j-n$ comme ci-dessus. On aurait aussi pu déduire le (ii) du (i), en prenant h de la forme $h_w(x) = \exp(w \log_{\mathscr{L}} x)$, et en faisant un développement limité de $w\, h_w(y)^{-1}\frac{(y-a)^j}{c_{h_w}(j)}h_w(y-a)$ au voisinage de $w = 0$.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$ l'espace des fonctions ϕ, localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$, telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{Q}_p$. Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$, on dit que ϕ a un pôle d'ordre $< r$ (resp. d'ordre $\leqslant r$) en l'infini, si $\delta(x)\phi(1/x)$ a un zéro d'ordre $> r - v_p(\delta(p))$ (resp. d'ordre $\geqslant r - v_p(\delta(p))$) en 0.

Lemme 4.4. — *Si $U \in \mathscr{U}(k,r)$, alors $\ell_{h,U}$ est de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Q}_p$. De plus,*

- *si $\delta_h \neq 1$, alors $\ell_{h,U} \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(x^{k-1}\delta_h))$ et a un pôle d'ordre $< r$;*
- *si $h = \log_{\mathscr{L}}$, alors $\ell_{h,U} = P_U \log_{\mathscr{L}} + \ell^{(1)}_{h,U}$, et P_U et $\ell^{(1)}_{h,U}$ sont des éléments de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(x^{k-1}\delta_h))$ avec un pôle d'ordre $< r$.*

Démonstration. — Que $\ell_{h,U}$ soit de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Q}_p$, suit des propriétés locales des caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ (cf. [**26**, prop. 1.57]) et de ce que $v_p((x^j\delta_h)(p)) = j + v_p(\alpha_h) = j+2r-k+1 > r$, si $j > k-1-r$.

Maintenant, si $\delta_h \neq 1$, il résulte du (i) du lemme 4.3 que

$$x^{k-1}\delta_h(x)\ell_{h,U}(x^{-1}) = \sum_{j=0}^{k-1} b_{U,j}\frac{x^{k-1-j}}{c_h(j)} + O(x^k),$$

et l'appartenance de U à $\mathscr{U}(k,r)$ se traduit par la nullité de $b_{U,j}$, si $j > k-1-r$, ce qui montre que $\ell_{h,U}$ a un pôle d'ordre $< r$. Le cas $h = \log_{\mathscr{L}}$ s'obtient en prenant la dérivée en $w = 0$ de $w\, x^{k-1}\delta_{h_w}(x)\ell_{h_w,U}(x^{-1})$, où $h_w(x) = \exp(w \log_{\mathscr{L}} x)$.

4.2. Découpage de la démonstration du th. 4.2

Pour démontrer le th. 4.2, il est commode de prolonger $\ell_h(\mu)$ en un élément du dual $\mathscr{D}^{[0,k-1]}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p)$ de $\mathrm{LP}^{[0,k-1]}_c(\mathbf{Q}_p)$. Pour ce faire,

- on note W_h l'espace engendré par les $(x-a)^j h(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $k-1-r < j \leqslant k-1$ (et par les x^j, pour $j \leqslant k-1$, si $\delta_h = 1$),
- on choisit un supplémentaire W''_h de W'_h dans W_h (en particulier, W''_h est de dimension finie), contenant les x^j, pour $j \leqslant k-1$, si $\delta_h = 1$,
- on prolonge μ en une forme linéaire $\phi \mapsto \int_{\mathbf{P}^1} \phi\, \mu$ sur W_h en imposant que $\int_{\mathbf{P}^1} \ell_{h,U}\, \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu$ si $U \in \mathscr{U}(k,r)$ et $\int_{\mathbf{P}^1} \phi\, \mu = 0$ si $\phi \in W''_h$. (Dans le cas $\delta_h = 1$, les deux définitions de $\int_{\mathbf{P}^1} x^i\, \mu$ coïncident, si $i < r$, car on a $\int_{\mathbf{Q}_p} x^i\, \mu = 0$, si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ d'après le lemme 2.18 de [**26**].)

Le théorème 4.2 est alors une conséquence immédiate des propositions 4.5 et 4.6 ci-dessous.

Proposition 4.5. — *Si $0 \leqslant j \leqslant k-1$, si $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, alors l'intégrale*

$$I_{h,j}(\mu, a, n) = \int_{\mathbf{P}^1} \Big(\int_{D(a-y,n)} f_{h,j}(x, y-a)\, \mu_h(x) \Big) \mu(y)$$

converge et il existe un unique prolongement de $\ell_h(\mu)$ en un élément de $\mathscr{D}_{\rm alg}^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)$, tel que, quels que soient $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, l'on ait $\int_{D(a,n)} (x-a)^j \ell_h(\mu) = I_{h,j}(\mu, a, n)$.

De plus,

(h4) *il existe $C(h) \in \mathbf{R}$ tel que, pour tous $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, $a \in \mathbf{Q}_p$, $n \in \mathbf{Z}$ et $k-1-r < j \leqslant k-1$,*

$$v_p\Big(\int_{\mathbf{P}^1} p^{-n} \frac{(x-a)^j}{c_h(j)} h(x-a) \mu - \int_{D(a,n)} (x-a)^j\, \ell_h(\mu) \Big) \geqslant n(j-(k-r)) + v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + C(h).$$

Démonstration. — Cf. n° 4.5.

Proposition 4.6. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ et si $\ell_h(\mu)$ vérifie la propriété* (h4)*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu = 0$ *quel que soit $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$;*

(ii) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu = 0$ *quel que soit $U \in \mathscr{U}(k,r)$;*

(iii) *$\ell_h(\mu)$ se prolonge en une distribution ν globalement d'ordre $k-r$ sur $\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — Cf. n° 4.3.

4.3. Un peu d'analyse fonctionnelle p-adique

Nous allons commencer par démontrer la proposition 4.6, et pour cela, nous allons prouver les implications (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

On peut écrire P_U sous la forme

$$P_U(X) = \sum_{i=0}^{k-1} b_{U,i} X^i, \quad \text{avec } b_{U,i} = \sum_{u \in U} \lambda_u \binom{j_u}{i} (-a_u)^{j_u - i},$$

et l'appartenance de U à $\mathscr{U}(k,r)$ se traduit par la nullité des $b_{U,i}$ pour $i \geqslant k+1-r$. La linéarité de l'intégration couplée avec le fait que $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\mu = 0$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$, nous donne l'existence d'éléments $\beta_i(\mu)$, pour $i < k+1-r$, tels que $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\mu = \sum_{i<k+1-r} \beta_i(\mu) b_{U,i}$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k,r)$. De plus, l'espace engendré par les $\ell_{h,U}$, pour $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$, étant de codimension finie dans W'_h, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $v_p(\beta_i(\mu)) \geqslant C + v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$ quels que soient i et μ. Par ailleurs,

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}(y)\mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}(p^{-n}y) \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} (\ell_{h,U_n}(y) - Q(y)) \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu,$$

où $U_n = \{(p^n a_u, j_u, (\alpha_h p^{j_u})^{-n}\lambda_u),\ u \in U\}$ et Q est un polynôme de degré $< r$ pour des raisons de croissance à l'infini (nul si $\delta_h \neq 1$). On a alors $\int_{\mathbf{Q}_p} Q(y) \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = 0$, et comme $b_{U_n,i} =$

$(\alpha_h p^i)^{-n} b_{U,i}$, on en déduit la relation $\beta_i(\mu) = (\alpha_h p^i)^{-n}\beta_i(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu)$ et la minoration

$$\begin{aligned} v_p(\beta_i(\mu)) &= -(2r+i-(k-1))n + v_p(\beta_i(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu)) \\ &\geqslant -(2r+i-(k-1))n + C + v_{\mathscr{D}_r}(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu) \\ &= ((k-1)-i-r)n + C + v_{\mathscr{D}_r}(\mu). \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour faire tendre cette quantité vers $+\infty$ et démontrer la nullité de $\beta_i(\mu)$ si $i < k-1-r$. D'où l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Si $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\,\mu = 0$, pour tout $U \in \mathscr{U}(k,r)$, alors $\int_{\mathbf{P}^1}(x-a)^j h(x-a)\,\mu = 0$ quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$ et $(k-1)-r < j \leqslant k-1$. La propriété (h4) nous fournit donc la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} (x-a)^{k-1}\,\ell_h(\mu)\Big) \geqslant C(h) + ((k-1)-(k-r))n,$$

quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, et comme $k-1 > k-r-1$, cela implique que $\ell_h(\mu)$ se prolonge (de manière unique) en une distribution globalement d'ordre $k-r$ d'après [**26**, prop. 2.6]. On en déduit l'implication (ii)$\Rightarrow$(iii).

Passons à l'implication (iii)$\Rightarrow$(i). Par hypothèse, $\nu - \ell_h(\mu)$ est identiquement nulle sur $\mathrm{LP}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$. On en déduit, si $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$, la formule

$$\sum_{u\in U}\lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\,\nu = \sum_{u\in U}\lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\,\ell_h(\mu).$$

Maintenant, le fait que ν est globalement d'ordre $k-r$ nous fournit la minoration

$$v_p\Big(\sum_{u\in U}\lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\,\nu\Big) \geqslant v_{\mathscr{D}_{k-r}}(\nu) + \inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u)) + n\inf_{u\in U}(j_u-(k-r)),$$

tandis que la propriété (h4) nous fournit la minoration

$$v_p\Big(p^{-n}\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\mu - \sum_{u\in U}\lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\,\ell_h(\mu)\Big) \geqslant C(h) + \inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u)) + \inf_{u\in U}((j_u-(k-r))n).$$

On en déduit, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la minoration

$$v_p\Big(\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\,\mu\Big) \geqslant n\inf_{u\in U}(j_u-(k-1)+r) + \inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u)) + \inf(v_{\mathscr{D}_{k-r}}(\nu), C(h)).$$

Comme $\inf_{u\in U}(j_u-(k-1)+r) > 0$, Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour faire tendre le membre de droite vers $+\infty$ et en déduire la nullité de $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\mu$ si $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$. Ceci permet de conclure la démonstration de la proposition 4.6.

4.4. La fonction $g_{h,j}$

Soit

$$g_{h,j}(x,y)=\begin{cases}(x+y)^{-j-1}\big(\frac{y^j}{c_h(j)}h(-yx^{-1})-f_{h,j}(x,y)\big) & \text{si } \delta_h\neq 1,\\ (x+y)^{-j-1}\big(y^jh(-y)-f_{h,j}(x,y)+H_jy^j\big) & \text{si } h=\log_{\mathscr{L}},\end{cases}$$

où $H_j=\sum_{i=1}^j\frac{(-1)^i}{i}\binom{j}{i}=\int_0^1\frac{(1-x)^j-1}{x}\,dx=-(1+\frac12+\cdots+\frac1j)$.

Lemme 4.7. — *Si $j\in\mathbf{N}$, et si $w(h)\notin\{0,-1,\dots,-j\}$, alors*

(i) $g_{h,j}(px,py)=p^{-1}g_{h,j}(x,y)$.

(ii) $\int_{D(-y,n)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)$ *est égal à*

$$p^{-n}\frac{y^j}{c_h(j)}h(-y)-\int_{D(-y,n)}(x+y)^{j+1}g_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)+\begin{cases}0 & \textit{si } \delta_h\neq 1,\\ p^{-n}H_jy^j & \textit{si } h=\log_{\mathscr{L}}.\end{cases}$$

(iii) $g_{h,j}$ *est analytique sur l'ouvert de $\mathbf{Q}_p^*\times\mathbf{Q}_p^*$ des (x,y) vérifiant $v_p(x+y)\geqslant v_p(y)+n(h)$.*

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Le (ii) est une conséquence du lemme 2.10, si $\delta_h\neq 1$ et du lemme 2.2, dans le cas $h=\log_{\mathscr{L}}$. Pour démontrer le (iii), partons de l'existence, si $w\in\mathbf{C}_p$, de l'identité suivante de séries entières (en u)

$$(1-u)^w\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}\frac{(u-1)^i}{w+i}=\frac{j!}{w(w+1)\cdots(w+j)}\Big(1-\sum_{m=1}^{+\infty}\binom{w+j}{j+m}(1-u)^{w-m}u^{j+m}\Big)$$

qui se démontre en dérivant par rapport à u, et en faisant une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{j!}{w(w+1)\cdots(w+j)}$ pour identifier les termes constants.

On en déduit, si $v_p(u)\geqslant n(h)$, la formule

$$h(u-1)\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}\frac{(u-1)^i}{w(h)+i}=\frac{j!}{w(h)(w(h)+1)\cdots(w(h)+j)}\Big(h(-1)-\sum_{m=1}^{+\infty}\binom{w(h)+j}{j+m}\frac{h(u-1)}{(1-u)^m}u^{j+m}\Big).$$

Il suffit alors de poser $u=\frac{x+y}{y}$ et de multiplier les deux membres par $(x+y)^{-j-1}y^jh(yx^{-1})$ pour en déduire la formule

$$g_{h,j}(x,y)=-\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\binom{w(h)+j}{j+m}\frac{(x+y)^{m-1}}{x^m},$$

valable si $v_p(x+y)\geqslant v_p(y)+n(h)$, ce qui permet de conclure dans le cas $\delta_h\neq 1$.

Si $h=\log_{\mathscr{L}}$, on remarque que $y^jh(-y)-f_{h,j}(x,y)+H_jy^j$ est nul pour $y=-x$ et que sa dérivée par rapport à x est $-\frac{(x+y)^j}{x}$, ce qui prouve que $y^jh(-y)-f_{h,j}(x,y)+H_jy^j$ a un zéro d'ordre $j+1$ le long de la droite $x+y=0$. On en déduit le résultat.

4.5. Existence et propriétés de la distribution $\ell_h(\mu)$

Passons à la démonstration de la proposition 4.5. Pour démontrer la convergence de l'intégrale $I_{h,j}(\mu, n, a)$, on peut supposer $a = 0$, quitte à remplacer μ par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu$ (ce qui ne change pas la valeur de $v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$). En utilisant le (ii) du lemme 4.7, on décompose alors $I_{h,j}(\mu, n, 0)$ sous la forme

$$I_{h,j}(\mu, n, 0) = J_0(n) - \sum_{m=-\infty}^{n-n(h)} I_m(n) + I_\infty(n),$$

avec

$$J_0(n) = \int_{D(0,n-n(h)+1)\times D(0,n)} f_{h,j}(x, y)\, \mu_h(x)\mu(y),$$

$$I_\infty(n) = \int_{D(\infty,n(h)-n)} p^{-n}\Big(\frac{y^j}{c_h(j)} h(y) + \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_h = 1 \\ H_j y^j & \text{si } h = \log_{\mathscr{L}} \end{cases}\Big)\, \mu(y),$$

$$I_m(n) = \int_{p^m\mathbf{Z}_p^*} \int_{D(-y,n)} (x + y)^{j+1} g_{h,j}(x, y)\, \mu_h(x)\mu(y),$$

et on est ramené à prouver la convergence de la série $\sum_{m=-\infty}^{n-n(h)} I_m(n)$. Pour cela, on fait les changements de variables $x = p^m u$ et $y = p^m v$, et on utilise le lemme 3.8 et le (i) du lemme 4.7, pour obtenir

$$I_m(n) = (p^{1-j}\alpha_h^{-1})^{-m} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \int_{D(-v,n-m)} (u + v)^{j+1} g_{h,j}(u, v)\, \mu_h(u) \left(\begin{smallmatrix} p^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu(v).$$

Maintenant, comme $n - m \geqslant n(h)$, le (iii) du lemme 4.7 implique que la fonction

$$\phi(u, v) = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}(v)\mathbf{1}_{D(-v,n-m)}(u)(u + v)^{j+1} g_{h,j}(u, v)$$

appartient à $\mathrm{LA}_{n-m}(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p)$, et, si l'on pose

$$C_0(h) = \inf_{0\leqslant j\leqslant k-1} v_{\mathrm{LA}_{n(h)}}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}(v)\mathbf{1}_{D(-v,n(h))}(u) g_{h,j}(u, v)),$$

on a $v_{\mathrm{LA}_{n-m}}(\phi) \geqslant (j + 1)(n - m) + C_0(h)$. On en déduit la minoration

$$\begin{aligned} v_p(I_m) \geqslant -m(k - 2r - j) &+ (v_{\mathscr{D}_{k-2r}}(\mu_h) - (k - 2r)(n - m)) \\ &+ ((v_{\mathscr{D}_r}(\mu) - mr) - r(n - m)) + (j + 1)(n - m) + C_0(h) \\ = -m + n(j - (k-1 - r)) &+ v_{\mathscr{D}_{k-2r}}(\mu_h) + v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + C_0(h), \end{aligned}$$

et la convergence de la série.

Pour montrer que $\ell_h(\mu)$ est bien définie et est une forme linéaire, il suffit d'utiliser le (ii) du lemme 3.9 pour constater que les formules définissant ℓ_h se ramènent à

$$\int_{D(a,n)} x^j \ell_h(\mu) = \int_{\mathbf{P}^1} \Big(\int_{D(a-y,n)} f_{h,j}(x, y)\, \mu_h(x)\Big)\, \mu(y),$$

si $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $n \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{Q}_p$, ce qui équivaut aussi à

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x)x^j\, \ell_h(\mu) = \int_{\mathbf{P}^1} \Big(\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x+y) f_{h,j}(x,y)\, \mu_h(x) \Big)\, \mu(y),$$

pour tout $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p)$.

Pour démontrer que $\ell_h(\mu)$ vérifie la propriété (h4), on peut de nouveau se ramener à $a = 0$ et écrire l'intégrale à évaluer sous la forme (en utilisant le fait que $\int_{\mathbf{P}^1} y^j \mu = 0$ pour éliminer le terme $H_j y^j$ dans le cas $h = \log_{\mathscr{L}}$)

$$\int_{\mathbf{P}^1} p^{-n} \frac{y^j}{c_h(j)} h(y)\, \mu - \int_{D(0,n)} x^j \ell_h(\mu) = J_1(n) - J_0(n) + \sum_{m=-\infty}^{n-n(h)} I_m(n),$$

avec $J_1(n) = \int_{D(0,n-n(h)+1)} p^{-n} \frac{y^j}{c_h(j)} h(y)\mu$. Pour évaluer $v_p(J_0(n))$ et $v_p(J_1(n))$, on fait les changements de variables $x = p^n u$, $y = p^n v$, et on utilise le lemme 3.8 et le (i) du lemme 3.9, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} J_1(n) &= (p^{j-1}\alpha_h)^n \int_{D(0,-n(h)+1)} \frac{v^j}{c_h(j)} (h(v) + n\beta_h) \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu(v) \\ J_0(n) &= (p^{j-1}\alpha_h)^n \int_{D(0,-n(h)+1)} \Big(\int_{D(0,0)} (f_{h,j}(u,v) + n\beta_h v^j)\, \mu_h(u) \Big) \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu(v). \end{aligned}$$

Comme les fonctions $f_{h,j}(u,v)$ et v^j ne dépendent pas de n, on en déduit l'existence de $C_1(h)$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, on ait

$$\inf(v_p(J_0(n)), v_p(J_1(n))) \geqslant n v_p(p^{j-1}\alpha_h) + v_{\mathscr{D}_r}(\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu) + C_1(h) = n(j-(k-r)) + v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + C_1(h).$$

Il suffit alors d'utiliser la minoration de $v_p(I_m(n))$ obtenue ci-dessus (en remarquant que le minimum de cette minoration est atteint pour $m = n - n(h)$ puisque $j > k-1-r$) pour montrer que $\ell_h(\mu)$ vérifie la propriété (h4) avec

$$C(h) = \inf(C_1(h), -n(h) + v_{\mathscr{D}_{k-2r}}(\mu_h) + C_0(h)).$$

Ceci termine la démonstration de la prop. 4.5 et, par voie de conséquence, celle du th. 4.2.

5. Application aux représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

5.1. La représentation $\Pi(s)$

5.1.1. Action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *sur* $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$

Lemme 5.1. — *Si* $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$ *(resp. si* $\phi \in \mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\delta))$*), et si* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*, alors* $\delta(cx+d)\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)$ *se prolonge par continuité en* $x = -\frac{d}{c}$ *(si* $c \neq 0$*) en une fonction appartenant à* $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$ *(resp. à* $\phi \in \mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\delta))$*).*

Démonstration. — Il suffit de regarder le comportement de $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d})$ au voisinage de ∞ et de $-\frac{d}{c}$. Par hypothèse, on a $\phi(x)=\delta(x)\phi_\infty(x)$ où ϕ_∞ est localement analytique (resp. de classe $\mathscr{C}^u$) au voisinage de ∞.

• Au voisinage de ∞, il y a deux cas suivant que $c=0$ ou $c\neq 0$.

— Si $c=0$, on a $\phi(\frac{ax+b}{d})=\delta(x)\delta(\frac{a}{d}+\frac{b}{dx})\phi_\infty(\frac{ax+b}{d})$, et $\delta(\frac{a}{d}+\frac{b}{dx})$ est analytique au voisinage de ∞ tandis que $\phi_\infty(\frac{ax+b}{d})$ a la même régularité que ϕ, ce qui montre que $\phi(\frac{ax+b}{d})$ est de la forme $\delta(x)\phi'(x)$, avec ϕ' localement analytique ou de classe $\mathscr{C}^u$.

— Si $c\neq 0$, on a $\delta(cx+d)=\delta(x)\delta(c+\frac{d}{x})$ et $\delta(c+\frac{d}{x})$ est analytique au voisinage de ∞ tandis que $\phi(\frac{ax+b}{cx+d})=\phi(\frac{a+b/x}{c+d/x})$ a la même régularité que ϕ, ce qui montre que $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d})$ est de la forme $\delta(x)\phi'(x)$, avec ϕ' localement analytique ou de classe $\mathscr{C}^u$.

Dans tous les cas, $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d})$ a donc le comportement voulu en ∞.

• Si $c\neq 0$, alors $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d})=\delta(ax+b)\phi_\infty(\frac{ax+b}{cx+d})$ a, au voisinage de $x=-\frac{d}{c}$, la même régularité que ϕ.

Ceci permet de conclure.

5.1.2. La représentation $B(s)$

Si $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+$, on note δ_s le caractère $(x|x|)^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$. On définit la représentation $B(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ comme étant l'espace $\mathscr{C}^{u(s)}(\mathbf{P}^1(\delta_s))$ muni de l'action à droite de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ étant donnée par la formule

$$\big(\phi\star_s \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\big)(x)=(x|x|\,\delta_1^{-1})(ad-bc)\,\delta_s(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big).$$

On transforme cette action à droite en action à gauche en posant $g\cdot_s\phi=\phi\star_s g^{-1}$, et on fait agir $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à gauche sur le dual $B(s)^*$ de $B(s)$, par $\langle g\cdot_s\mu,\phi\rangle=\langle\mu,\phi\star_s g\rangle$.

On remarquera que $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot_s\mu=a|a|\delta_1^{-1}(a)\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu$, où $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu$ désigne l'action standard de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur les distributions sur $\mathbf{Q}_p$ (i.e. celle induite par $\phi\mapsto\phi(ax+b)$).

5.1.3. Les sous-$\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-modules $M(s)$ et $\widehat{M(s)}$ de $B(s)$

• Si δ_s n'est pas de la forme x^j, avec $j\in\mathbf{N}$, on prend pour $\widehat{M(s)}$ l'adhérence dans $B(s)$ de l'espace vectoriel $M(s)$ engendré par les x^i, pour $0\leqslant i<u(s)$, et les $(x-a)^{-i}\delta_s(x-a)$, pour $a\in\mathbf{Q}_p$ et $0\leqslant i<u(s)$. Cet espace est stable sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ car, comme le montre un calcul immédiat, $M(s)$ n'est autre que le sous-$\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-module de $B(s)$ engendré par les polynômes de degré $<u(s)$. On note $M(s)'\subset M(s)$ l'intersection de l'espace des fonctions ayant un pôle d'ordre $<u(s)$ en ∞ avec celui engendré par les $(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)$, pour $a\in\mathbf{Q}_p$ et $0\leqslant j<u(s)$.

• Si $\delta_s=x^j$, avec $j\in\mathbf{N}$, et si $\mathscr{L}(h)=\mathscr{L}\in\mathbf{P}^1(L)$, on note $M(s)'$ l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x-a)^{j-i}\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$, pour $a\in\mathbf{Q}_p$ et $0\leqslant i<u(s)=\frac{j}{2}$ ayant un pôle d'ordre $<u(s)$ en l'infini, où si $\mathscr{L}=\infty$, on définit $\log_{\mathscr{L}}$ par $\log_\infty=v_p$. On note $\widehat{M(s)}$ l'adhérence

dans $B(s)$ de l'espace $M(s)$ engendré par les x^i, pour $0 \leqslant i \leqslant j$ et par $M(s)'$. Un petit calcul montre que $M(s)$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$; il en est donc de même de $\widehat{M(s)}$.

5.1.4. La représentation $\Pi(s)$

Dans tous les cas, on pose $\Pi(s) = B(s)/\widehat{M(s)}$.

Remarque 5.2. — (i) L'espace $\widehat{M(s)}$ correspond à l'espace $\widehat{M(s)}$ de l'introduction sauf si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, auquel cas c'est l'espace $\widehat{M(s)}'$ du (v) de la rem. 0.7 de l'introduction. L'espace $M(s)$ ci-dessus n'est pas celui de l'introduction.

(ii) Dans tous les cas, $M(s)$ contient les polynômes de degré $< u(s)$ et l'application qui, à $\phi \in M(s)$, associe le développement de Taylor à l'ordre $u(s)$ de $\delta(x)\phi(x)$ au voisinage de 0, est surjective. En utilisant la prop. 2.21 de **[26]**, cela permet de montrer que $\mu \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ induit un isomorphisme

$$\Pi(s)^* \cong \Big\{\mu \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p),\ \int_{\mathbf{Q}_p} \phi\, \mu = 0 \text{ quel que soit } \phi \in M(s)'\Big\}.$$

5.2. Le dual de $\Pi(s)$

On note $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\delta))$ le dual de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$. Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\delta))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\, \mu_2 = \int_{D(\infty,0)} \delta(x)\phi(1/x)\ \mu.$$

On note aussi ι_δ l'involution de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\, \iota_\delta(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)\phi(1/x)\ \mu.$$

On a alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_2) = \iota_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_1))$, et réciproquement, si on part de deux distributions μ_1, μ_2 sur $\mathbf{Z}_p$ dont les restrictions à $\mathbf{Z}_p^*$ vérifient la condition ci-dessus, alors on peut recoller μ_1 et μ_2 en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\delta))$.

On dit que $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\delta))$ est d'ordre u si les distributions μ_1 et μ_2 ci-dessus appartiennent à $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$. On note $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\delta))$ l'ensemble des éléments d'ordre u de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\delta))$, et on munit $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\delta))$ de la valuation $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}(\mu) = \inf(v_{\mathscr{D}_u}(\mu_1), v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2))$$

qui en fait un espace de Banach. On peut aussi voir $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\delta))$ comme le dual de l'espace $\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\delta))$ des fonctions ϕ de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Q}_p$ telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Proposition 5.3. — *Il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tous $\mu \in \Pi(s)^*$ et $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ on ait*

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}(g \cdot_s \mu) \geqslant v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}(\mu) - C.$$

Démonstration. — Il est clair sur la définition de $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}$ que $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}\big(\big(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\big)\cdot_s\mu\big)=v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}(\mu)$ si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\delta))$. Par ailleurs, un calcul immédiat montre que l'on a

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}\big(\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\big)\cdot_s\mu\big)=v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu),$$

si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$. Ceci permet de conclure car, d'une part $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ induit, d'après la rem. 5.2, un isomorphisme de $\Pi(s)^*$ sur un sous-banach de $\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, et d'autre part, tout élément de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ s'écrit comme un produit d'au plus trois éléments de la forme $\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\big)$ ou $\big(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\big)$.

Corollaire 5.4. — *Si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\delta))$, alors*

$$v_{B(s)^*}(\mu)=\inf_{g\in\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}(g\cdot_s\mu)$$

est fini. De plus, $v_{B(s)^*}$ est une valuation sur $\Pi(s)^*$, équivalente à la valuation $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1)}$, invariante sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Remarque 5.5. — Ce qui précède montre que $\Pi(s)$ est une représentation unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Théorème 5.6. — *Si $s\in\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ vérifie une des deux conditions :*

- *$s\in\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$,*
- *il existe k entier $\geqslant 2u(s)+1$ tel que $w(s)\notin\{1,\dots,k\}$,*

l'application $z\mapsto\mu_z$ de la prop. 3.4 induit un isomorphisme $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariant de $(\check{D}^\sharp(s)\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ sur $\Pi(s)^*$.

Démonstration. — Dans les deux cas considérés, l'espace $M(s)'$ n'est autre que l'ensemble des $\ell_{h(s),U}$, pour $U\in\mathscr{U}(k,h(s))$, où $h(s)\in\widetilde{\mathscr{T}}(L)$ a été défini au n° 3.2, et $\mathscr{U}(k,h(s))$ et $\ell_{h(s),U}$ sont les objets introduits au n° 4.1. Il résulte donc du (ii) de la rem. 5.2 et du th. 4.2, que $\mu\in\Pi(s)^*$ si et seulement si il existe $\nu\in\mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ tel que $\nu-\ell_{h(s)}(\mu)$ soit identiquement nul sur $\mathrm{LP}_c^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)_0$. La prop. 3.4 montre que ceci équivaut à l'existence de $z\in(D(s)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ tel que $\mu=\mu_z$. On en déduit que $z\mapsto\mu_z$ induit un isomorphisme de L-espaces de Banach de $(D(s)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ sur $\Pi(s)^*$.

Maintenant,

$$\mu_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z}=\delta_2(a)\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mu_z=(x^{-1}|x|^{-1}\delta_1\delta_2)(a)\,\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\big)\cdot_s\mu_z.$$

Comme $\check{D}(s)=D(s)\otimes(x|x|\,\delta_1^{-1}\delta_2^{-1})$, on passe de $(D(s)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ à $(\check{D}^\sharp(s)\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ en tordant par le caractère $x|x|\,\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}$; on en déduit l'équivariance sous l'action du mirabolique, ce qui permet de conclure.

5.3. Le cas $s\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$

Lemme 5.7. — *Si $i\in\mathbf{N}$, et si ϕ est $i+1$ fois dérivable, alors*

$$\Big((cx+d)^i\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)\Big)^{(i+1)}=\frac{(ad-bc)^{i+1}}{(cx+d)^{i+2}}\phi^{(i+1)}\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big).$$

Démonstration. — On $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)}$ et donc $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, ce qui permet de démontrer le résultat pour $i=0$. Le cas général s'en déduit, par récurrence, via le calcul suivant

$$\begin{aligned}\Big((cx+d)^i\phi(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)^{(i+1)} &= \Big(ci(cx+d)^{i-1}\phi(\frac{ax+b}{cx+d}) + (ad-bc)(cx+d)^{i-2}\phi'(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)^{(i)}\\ &= ci\frac{(ad-bc)^i}{(cx+d)^{i+1}}\phi^{(i)}(\frac{ax+b}{cx+d}) + \Big(\frac{(ad-bc)^i}{(cx+d)^i}\,\phi^{(i)}(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)'\\ &= \frac{(ad-bc)^{i+1}}{(cx+d)^{i+2}}\phi^{(i+1)}(\frac{ax+b}{cx+d}).\end{aligned}$$

Corollaire 5.8. — *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\rm ncl} \cup \mathscr{S}_+^{\rm ord}$, et si $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \infty)$, alors $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}}$ induit un morphisme $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant de $B(s)$ dans $B(s')$.*

Remarque 5.9. — Si $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$, mais $s \notin \mathscr{S}_+^{\rm ncl} \cup \mathscr{S}_+^{\rm ord}$, les fonctions de $B(s)$ ne sont pas $w(s)$ fois dérivable, et on n'obtient pas de morphisme de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de cette manière.

Proposition 5.10. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ord}$, alors $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}}$ induit une surjection de $\Pi(s)$ sur $B(s') = \Pi(s')$ dont le noyau est non nul.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ncl}$, alors $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}}$ induit un isomorphisme de $\Pi(s)$ sur $\Pi(s')$.*

Démonstration. — Dans les deux cas, la surjectivité suit de la surjectivité de la dérivation $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p)$, si $r \geqslant 1$.

Pour la détermination du noyau dans le cas (i), voir [**11**]. Pour démontrer le (ii), constatons que le noyau est une représentation unitaire dans laquelle les fonctions localement polynomiales de degré $\leqslant w(s)-1$ sont denses. C'est donc un complété de $\mathrm{Sym}^{w(s)-1} \otimes$ lisse, et la condition $u(s) > w(s)$ fait que l'on n'est pas dans la bande d'existence de ces complétés unitaires (cf. [**30**]).

6. Compléments

6.1. Zéros supplémentaires des fonctions L p-adiques

La prop. 6.1 ci-dessous fournit, en utilisant la construction de Kato [**38**] de la fonction L p-adique attachée à une forme modulaire, une démonstration de la conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum [**41**] (à l'ordre 1) dans le cas d'un zéro supplémentaire. Cette démonstration n'est pas franchement différente de celle obtenue par Perrin-Riou [**45**] (dont on trouvera une traduction en termes de (φ, Γ)-modules dans [**20**]) ou de celle obtenue par Emerton [**30**].

Soit $s = (\alpha^{v_p(x)}, \alpha^{v_p(x)}|x|^{-1}x^{1-k}, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_\star^*$, avec $\alpha = p^\ell$ (et donc $k = 2\ell$).

Proposition 6.1. — *Si $z \in (D(s))^{\psi=1} \subset (D(s)^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, alors*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \mu_z = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \log y\ \mu_z = -\mathscr{L} \cdot \int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell \mu_z.$$

Démonstration. — D'après le (ii) de la rem. 3.5, on a

$$\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \nu_z = p^{\ell+1}\nu_z \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_z = p^{\ell}\mu_z.$$

Si $i \in \mathbf{Z}$, on a

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^i \mu_z = \int_{\mathbf{Z}_p} y^i \mu_z - \int_{p\mathbf{Z}_p} y^i \mu_z = (1 - p^{\ell-i}) \int_{\mathbf{Z}_p} y^i \mu_z.$$

On en déduit la première égalité.

Passons à la démonstration de la seconde. Soit $h = \log_{\mathscr{L}}$, soit $f_{h,\ell}(x, y)$ la fonction définie au n° 3.5, et soit $g(y) = \int_{D(-y,0)} f_{h,\ell}(x, y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x)$ On a alors

$$p^{-1} \int_{D(-y,-1)} f_{h,\ell}(x, y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) = \int_{D(-py,0)} f_{h,\ell}(p^{-1}x, y)\ \mu_{\mathrm{KL}}(x) = p^{-\ell} g(py) - \mathscr{L} y^{\ell}$$

car $f_{h,\ell}(u, v) = p^{-\ell} f(pu, pv) - \mathscr{L} v^{\ell}$. La combinaison de la prop. 3.4 et des prop. 4.5 et 4.6 nous fournit les égalités

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\nu_z - p^{-1} \int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\nu_z &= \int_{\mathbf{Z}_p} y^{\ell} \ell_h(\mu_z) - p^{-1} \int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\ell_h(\mu_z) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} \Big(\int_{D(-y,0)} f_{h,\ell}(x, y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) - p^{-1} \int_{D(-y,-1)} f_{h,\ell}(x, y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\, \mu_z(y) \\
&= -\lim_{m\to+\infty} \int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} \Big(g(y) - p^{-\ell} g(py) + \mathscr{L} y^{\ell}\Big)\mu_z.
\end{aligned}$$

Comme $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \nu_z = p^{\ell+1}\nu_z$, comme $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_z = p^{\ell}\mu_z$, on a

$$\begin{aligned}
p^{-1} \int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\nu_z &= (p^{\ell+1}) p^{-1} \int_{\mathbf{Z}_p} (p^{-1}y)^{\ell}\nu_z = \int_{\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\nu_z \\
\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\mu_z &= p^{m\ell} \int_{\mathbf{Z}_p} (p^{-m}y)^{\ell}\mu_z = \int_{\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\mu_z \\
p^{-\ell} \int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} g(py)\mu_z &= \int_{p^{1-m}\mathbf{Z}_p} g(y)\mu_z.
\end{aligned}$$

On en déduit la formule

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} g(y)\mu_z = -\mathscr{L} \int_{\mathbf{Z}_p} y^{\ell}\mu_z.$$

Maintenant, la suite de terme général

$$\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} (g(y) - y^{\ell} \log_{\mathscr{L}} y - H_{\ell} y^{\ell})\, \mu_z$$

tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ d'après le n° 4.5 (dans les notations de ce n° , cette intégrale est égale à $-I_{-m}(0)$), et comme

$$\begin{aligned}
\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} y^{\ell}(\log_{\mathscr{L}} y + H_{\ell})\ \mu_z &= p^{m\ell} \int_{\mathbf{Z}_p^*} (p^{-m}y)^{\ell}(\log_{\mathscr{L}}(p^{-m}y) + H_{\ell})\ \mu_z \\
&= \int_{\mathbf{Z}_p^*} y^{\ell}(\log y - m\mathscr{L} + H_{\ell})\ \mu_z = \int_{\mathbf{Z}_p^*} y^{\ell} \log y\ \mu_z,
\end{aligned}$$

(puisque $\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \mu_z = 0$), cela permet de conclure.

6.2. La formule de Stevens

Une des motivations pour étendre les résultats à la série principale était de fournir une démonstration, en termes de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (avec l'invariant $\mathscr{L}$ de Breuil [**9**]), de la formule $\mathscr{L} = -2\frac{a_p'}{a_p}$ de Stevens [**48**], reliant invariant $\mathscr{L}$ de Coleman [**14**] et dérivée logarithmique de valeurs propres de frobenius.

Proposition 6.2. — *Soient k un entier $\geqslant 3$ et*[14]

$$z \mapsto s(z) = (a_p(z)^{v_p(x)}, |x|^{-1}x^{1-k}\langle x\rangle^{k-z}(a_p(k)^2 a_p(z)^{-1})^{v_p(x)}, \mathscr{L}(z))$$

une fonction analytique sur la boule $D(k,r)$, à valeurs dans $\mathscr{S}_*$. Alors $\mathscr{L}(k) = 2\frac{a_p'(k)}{a_p(k)}$.

Démonstration. — Si $\alpha \in L$ vérifie $v_p(\alpha) = \frac{k-2}{2}$ et si $\mathscr{L} \in L$, posons

$$\Pi(k,\alpha,\mathscr{L}) = \Pi\big(s(\alpha^{v_p(x)}, |x|^{-1}\alpha^{v_p(x)}x^{1-k}, \mathscr{L})\big).$$

C'est un élément de $\mathscr{S}_*^{\rm st}$, et sous les hypothèses de la proposition, $\Pi(s(k)) = \Pi(k, a_p(k), \mathscr{L}(k))$.

Soit $z \mapsto \mu(z)$ une fonction analytique de $D(k,r)$ dans $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ telle que $\mu(z) \in \Pi(s(z))^*$ quel que soit z (l'existence de telles familles analytiques de distributions résulte de l'exactitude [**22**] du foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$). Si j_u est une famille d'entiers vérifiant $0 \leqslant j_u < \frac{k-2}{2}$, si a_u est une famille d'éléments de $\mathbf{Q}_p$, et si $\lambda_u(z)$, est une famille finie de fonctions analytiques sur $D(k,r)$, telles que $\sum_u \lambda_u(z)(x-a_u)^{-j_u}\delta_{s(z)}(x-a_u)$ a un pôle d'ordre $< \frac{k-2}{2}$ en ∞, alors la fonction

$$F(z) = \int_{\mathbf{Q}_p} \Big(\sum_u \lambda_u(z)(x-a_u)^{-j_u}\delta_{s(z)}(x-a_u)\Big)\,\mu(z)$$

est identiquement nulle sur $D(k,r)$. Comme les fonctions $\int_{\mathbf{Q}_p} x^i\,\mu(z)$ sont aussi identiquement nulles sur $D(k,r)$ si $i < \frac{k-2}{2}$, on obtient, en dérivant $F(z)$ par rapport à z et en évaluant le résultat en $z = k$ (où l'on a $\delta_{s(k)}(x-a_u) = (x-a_u)^{k-2}$),

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \Big(\sum_u \lambda_u(k)\Big(\log(x-a_u) + 2v_p(x-a_u)\frac{a_p'(k)}{a_p(k)}\Big)(x-a_u)^{k-2-j_u}\Big)\,\mu(k) = 0.$$

Ceci montre que $\mu(k) \in \Pi\big(k, a_p(k), 2\frac{a_p'(k)}{a_p(k)}\big)^*$. Comme $\mu(k) \in \Pi\big(k, a_p(k), \mathscr{L}(k)\big)^*$, le lemme 6.3 ci-dessous permet de conclure.

Lemme 6.3. — *Si $\mathscr{L}_1 \neq \mathscr{L}_2$, alors $\Pi(k,\alpha,\mathscr{L}_1)^* \cap \Pi(k,\alpha,\mathscr{L}_2)^* = 0$.*

Démonstration. — Les deux espaces s'identifient à des sous-espaces de $\mathscr{D}_{(k-2)/2}(\mathbf{Q}_p)$ munis de la même action du mirabolique. Comme $\Pi(k,\alpha,\mathscr{L}_1)$ et $\Pi(k,\alpha,\mathscr{L}_2)$ sont irréductibles et non isomorphes en tant que modules munis d'une action du mirabolique ((i) de la rem. 0.7), cela permet de conclure.

[14] On pose $\langle x\rangle^{k-z} = \exp((k-z)\log x)$.

Remarque 6.4. — (i) On peut voir la formule de la prop. 6.2 comme une illustration du fait que $\mathscr{S}_+$ est obtenu par éclatement à partir de $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$.

(ii) Pour retrouver la formule de Stevens, il faut savoir que les invariants $\mathscr{L}$ utilisés sont les mêmes(15), ce qui demande de rassembler un certain nombre de résultats pas totalement évidents, dont celui de Breuil [**9**] qui a été le facteur déclenchant pour l'introduction des (φ, Γ)-modules dans la théorie des représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Dans l'autre sens, on peut utiliser les diverses démonstrations de la formule $\mathscr{L} = -2\frac{a_p'}{a_p}$, et les résultats de Kisin [**40**], pour démontrer que les différents invariants $\mathscr{L}$ attachés à une forme modulaire coïncident. En effet, outre la formule originale de Stevens et celle ci-dessus, on dispose de telles formules pour l'invariant de Fontaine-Mazur [**23**] et pour ceux de Teitelbaum et Darmon-Orton [**5**].

Références

[1] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008).

[2] L. Berger, Représentations modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, prépublication, 2006, à paraître dans Astérisque.

[3] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, prépublication I.H.E.S. 2006, à paraître dans Astérisque.

[4] L. Berger et P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque **319** (2008).

[5] M. Bertolini, H. Darmon et A. Iovita, Families of automorphic forms and the Mazur-Tate-Teitelbaum conjecture, preprint 2004, à paraître dans Astérisque.

[6] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I, Comp. Math. **138** (2003) 165-188.

[7] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu **2** (2003), 23-58.

[8] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. Scient. E.N.S. **37** (2004) 559–610.

[9] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, prépublication 2003, à paraître dans Astérisque.

[10] C. Breuil et A. Mézard, Représentations semi-stables de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, prépublication 2006, à paraître dans Astérisque.

[11] C. Breuil et M. Emerton, Représentations p-adiques ordinaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, et compatibilité local-global, à paraître dans Astérisque.

[12] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[13] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999) 241–268.

[14] R. Coleman, A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, Contemp. Math. **165** (1994) 21–51.

[15] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham 1996)*, London Math. Soc. Lect. Note **254** (1997), 1–113.

[16] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998) 485-571.

(15) Au signe près ; le signe des invariants $\mathscr{L}$ est parfaitement arbitraire.

[17] P. Colmez, Représentations p-adiques d'un corps local, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians II (Berlin 1998)*, Doc. Mat. Extra vol. II (1998), 153–162.

[18] P. Colmez, Fonctions L p-adiques, *Sém. Bourbaki 1998/99*, exp. 851, Astérisque **266** (2000) 21–58.

[19] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[20] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Sém. Bourbaki 2002/03*, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251-319.

[21] P. Colmez, Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque **319** (2008).

[22] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008).

[23] P. Colmez, Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius, Astérisque (à paraître).

[24] P. Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, preprint 2004.

[25] P. Colmez, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, preprint 2005.

[26] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique, preprint 2006, à paraître dans Astérisque.

[27] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, preprint 2007, à paraître dans Astérisque.

[28] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, preprint 2008.

[29] P. Deligne, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, *Sém. Bourbaki 1968/69*, exp. 343, SLN **179** (1971) 139-172.

[30] M. Emerton, p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, Duke Math. J. **130** (2005), 353–392.

[31] M. Emerton, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programm for $\mathbf{GL}_2/\mathbf{Q}$, Pure and Applied Math. Quarterly **2** (2006), 279–393.

[32] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programm for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, en préparation.

[33] L. Fargues, E. Mantovan, Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales, Astérisque **291** (2004).

[34] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[35] M. Harris, R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[36] G. Henniart, Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour $\mathbf{GL}_n$ sur un corps p-adique, Invent. Math. **139** (2000) 439–455.

[37] K. Kato, Generalized explicit reciprocity laws, *Algebraic number theory (Hapcheon/Saga, 1996)*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan) **1** (1999), 57–126.

[38] K. Kato, Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III)*, Astérisque **295** (2004), 117-290.

[39] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[40] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[41] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986), 1-48.

[42] B. Mazur, On monodromy invariants occuring in global arithmetic, and Fontaine's theory, Contemp. Math. **165** (1994) 1–20.

[43] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** (1994), 81-149.

[44] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995).

[45] B. Perrin-Riou, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, *Number theory for the millennium, III* (Urbana, IL, 2000) 119–147.

[46] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Inv. Math. **153** (2003), 145–196.

[47] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math. **62** (1980/81), 89–116.

[48] G. Stevens, Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, preprint 1996.

Pierre Colmez, École Polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France • C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.polytechnique.fr`