REPRÉSENTATIONS TRIANGULINES DE DIMENSION 2

par

Pierre Colmez

Résumé. — Dans cet article, nous définissons la notion de représentation trianguline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et étudions en détails les représentations triangulines de dimension 2, qui sont l'analogue local des représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires surconvergentes de pente finie.

Table des matières

Introduction

0.1. Notations

Soit $p \neq 2$ un nombre premier[(1)]. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\deg(g) \in \mathbf{Z}$ l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, alors $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \ker \chi = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$.

Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est l'ensemble des points L-rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathscr{T}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans L, et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $w(\delta)$ son *poids*, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)).$$

Si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de δ. Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1.

0.2. L'espace des paramètres $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$

On note (δ_1, δ_2) un élément générique de $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$, et on définit $\mathscr{S}$ comme la variété analytique obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On a donc une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L} = \infty \in \mathbf{P}^0(L)$ si la fibre au-dessus de (δ_1, δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0.$$

Si $s \in \mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

[(1)]Le cas $p = 2$ demande de modifier certains des arguments de l'article. Il n'y a en principe aucune difficulté

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où

- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} = \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} \neq \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) = w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) > w(s)$.

Remarque 0.1. — Les exposants "ng", "cris", "st", "ord" et "ncl" sont respectivement censés faire penser à "non géométrique", "cristalline", "semi-stable", "ordinaire" et "non classique". Cette terminologie vient de la classification des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires surconvergentes.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_0 \coprod \mathscr{S}_*$, où

- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si truc $\in \{\mathrm{ng}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{ord}, \mathrm{ncl}\}$ et machin $\in \{+, 0, *\}$, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}^{\mathrm{truc}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}} = \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

0.3. (φ, Γ)-modules

Soit $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba sur L, et soit $\mathscr{E}^\dagger$ le corps des éléments bornés de $\mathscr{R}$. Les anneaux $\mathscr{E}^\dagger \subset \mathscr{R}$ sont munis d'actions du frobenius φ et de Γ commutant entre elles.

Un (φ, Γ)-*module* sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$ est un module libre de type fini muni d'actions semi-linéaires de φ et de Γ commutant entre elles, telles que $\varphi(D)$ engendre D (en tant que module sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$). Un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est *triangulable* si c'est une extension successive de (φ, Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$.

La classification des (φ, Γ)-modules triangulables de rang 2 se ramène, par définition, à celle des (φ, Γ)-modules de rang 1 et de leurs extensions, ce qui fait l'objet du théorème 0.2 ci-dessous.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ, Γ) module obtenu en multipliant l'action de φ sur $\mathscr{R}$ par $\delta(p)$ et celle de $\gamma \in \Gamma$ par $\delta(\chi(\gamma))$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 0.2. — (i) *Si D est un (φ, Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, il existe un unique $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $D \cong \mathscr{R}(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1)) = \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}, \mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}$ est de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 0$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$; dans ces deux cas, $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1))$ est de dimension 2 et l'espace projectif associé est naturellement isomorphe à $\mathbf{P}^1(L)$.*

Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s = (\delta_1, \delta_2, h)$, où $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}, \mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$. Si $s \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Si $\alpha \in L^*$ et si $s' = (\delta_1, \delta_2, \alpha h)$, les (φ, Γ)-modules $D(s)$ et $D(s')$ sont isomorphes, ce qui fait que l'espace des paramètres naturels pour décrire les (φ, Γ)-modules non irréductibles de rang 2 sur $\mathscr{R}$ est le champs analytique $\widetilde{\mathscr{S}}/\mathbf{G}_m$. La variété analytique $\mathscr{S}$ introduite ci-dessus correspond à l'ouvert « $h \neq 0$ » des (φ, Γ)-modules non scindés.

0.4. Représentations triangulines

Rappelons que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est équivalente [**18, 5**] à la catégorie des (φ,Γ)-modules *étales* sur $\mathscr{E}^\dagger$. Par ailleurs, Kedlaya a établi [**21**] l'existence d'une filtration par les pentes pour les φ-modules sur $\mathscr{R}$; cette filtration est l'analogue de la décomposition de Dieudonné-Manin. Une conséquence de ce théorème de Kedlaya est que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est aussi équivalente à la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont [(2)] de pente 0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\rm rig}(V)=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{D}^\dagger(V)$ respectivement les (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ qui lui sont associés. On dit que V est *trianguline*[(3)] si $\mathbf{D}_{\rm rig}(V)$ est triangulable. La classification des représentations triangulines[(4)] de dimension 2 est donc équivalente à celle des (φ,Γ)-module triangulables de pente 0 ; elle repose sur le théorème 0.2 et le théorème de Kedlaya dont un certain nombre de conséquences immédiates sont résumées dans la remarque suivante.

Remarque 0.3. — (i) Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, la pente de $\mathscr{R}(\delta)$ définie par Kedlaya est $v_p(\delta(p))$. Un des points cruciaux pour ce qui suit est qu'une extension de (φ,Γ)-modules peut fort bien être de pente 0 sans que les deux morceaux le soient, mais alors les extensions sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

(ii) Le cas scindé n'est pas très passionnant : le module $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si les deux caractères δ_1,δ_2 sont unitaires, la représentation $V(s)$ qui lui correspond est alors la somme directe de δ_1 et δ_2 vus comme des caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) Dans le cas non scindé, si $D(s)$ est de pente 0, alors son déterminant est de pente 0 et $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$ La première de ces conditions se traduit par $v_p(\delta_1(p))+v_p(\delta_2(p))=0$ et la seconde par $v_p(\delta_1(p))\geqslant 0$. Une condition nécessaire pour que $D(s)$ soit de pente 0 si $s\in\mathscr{S}$ est donc que $s\in\mathscr{S}_+$. Cette condition n'est pas suffisante mais presque, comme le montre le (i) du théorème 0.5 ci-dessous.

Si $s\in\mathscr{S}_+$ est tel que $D(s)$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est associée. Cette représentation est trianguline par construction. Réciproquement, le théorème 0.2 et la discussion précédente montrent que, si V est trianguline, alors il existe $s\in\mathscr{S}_+$ tel que $D(s)$ soit de pente 0 et $V\cong V(s)$.

Remarque 0.4. — Le cas où $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_0$ n'est pas spécialement passionnant car alors δ_1 et δ_2 sont unitaires et $V(s)$ est une extension de δ_2 par δ_1 dont la classe est déterminée par $\mathscr{L}$. En particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.

Théorème 0.5. — (i) *Si $s\in\mathscr{S}_*$, le module $D(s)$ est de pente 0, sauf si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ncl}$, auquel cas les pentes sont $u(s)-w(s)$ et $w(s)-u(s)$.*

(ii) *Si $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$, alors $V(s)$ est irréductible. Si $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ord}$, alors $V(s)$ (tordue par un caractère convenable) devient ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et n'est donc pas irréductible.*

(2) Un φ-module D sur $\mathscr{R}$ est de pente 0, s'il contient un φ-module Δ étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ tel que l'on ait $D=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\Delta$; le module Δ est alors unique d'après le théorème de Kedlaya.

(3) Le triangle est un instrument de musique dont le son (triangulin (?)) est presque cristallin...

(4) Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'à la dimension 2. Bellaïche et Chenevier [**1**] ont commencé à regarder la situation en dimension supérieure.

(iii) *Si* $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$ *et* $s'=(\delta_1',\delta_2',\mathscr{L}')$ *sont deux éléments distincts de* $\mathscr{S}_{\rm irr}$*, alors* $V(s)\cong V(s')$ *si et seulement si* $s,s'\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ *et* $\delta_1'=x^{w(s)}\delta_2$*,* $\delta_2'=x^{-w(s)}\delta_1$*.*

Remarque 0.6. — L'application $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\mapsto s'=(x^{w(s)}\delta_2,x^{-w(s)}\delta_1,\infty)$ est une involution de $\mathscr{S}_*^{\rm cris}$

Pour décrire les propriétés de $V(s)$, quand elle existe, il est plus agréable de supposer que la restriction de δ_1 à $\mathbf{Z}_p^*$ est triviale. On peut facilement en déduire ce qui se passe dans le cas général en tordant par un caractère de la manière suivante. Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\delta^0\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ coïncide avec celle de δ et qui vérifie $\delta(p)=1$; en particulier, δ^0 est unitaire ce qui permet de le voir comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\rm ncl}$, alors $s^0=(\delta_1(\delta_1^0)^{-1},\delta_2(\delta_1^0)^{-1},\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\rm ncl}$, et on a $V(s)=V(s^0)(\delta_1^0)$.

Remarque 0.7. — Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$; ceux de $V(s^0)$ sont 0 et $-w(s)$.

Théorème 0.8. — (i) *Soit* $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_*$ *tel que la restriction de* δ_1 *à* $\mathbf{Z}_p^*$ *soit triviale.*

- *Si* $s\in\mathscr{S}_*-\mathscr{S}_*^{\rm ncl}=\mathscr{S}_{\rm irr}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm ord}$*, le* L*-espace vectoriel* $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(s))^{\varphi=\delta_1(p)}$ *est non nul.*
- *Si* $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$*, alors* $V(s)$ *devient cristalline sur une extension abélienne de* $\mathbf{Q}_p$ *et* $\mathbf{D}_{\rm pst}(V(s))$ *est, en tant que représentation de* $W_{\mathbf{Q}_p}$*, la somme des deux caractères associés à* δ_1 *et* $x^{w(s)}\delta_2$*, sauf si ces deux caractères sont égaux, auquel cas c'est l'extension non triviale de ces deux caractères.*
- *Si* $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$*, alors* $V(s)$ *est semi-stable ; le module* $\mathbf{D}_{\rm st}(V)$ *est, en tant que représentation de* $W_{\mathbf{Q}_p}$*, la somme des deux caractères associés à* δ_1 *et* $x^{w(s)}\delta_2$*, et le paramètre de Fontaine-Mazur* **[25]** *de la filtration est* $\mathscr{L}$*.*

(ii) *Soit* V *une* L*-représentation irréductible de dimension* 2 *de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *dont les poids de Hodge-Tate sont* 0 *et* $w\in L$*, et telle qu'il existe* $\alpha\in L^*$ *avec* $v_p(\alpha)>0$ *et* $(\mathbf{B}_{\rm cris}^+\otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha}\neq 0$*. Alors il existe* $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_*$ *tel que* δ_1 *soit trivial sur* $\mathbf{Z}_p^*$*,* $\delta_1(p)=\alpha$ *et* $w(s)=-w$*, et tel que* $V\cong V(s)$ *(resp.* $V\cong V(x^w\delta_1,x^{-w}\delta_2,\mathscr{L})$*) si* $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$ *(resp. si* $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ncl}$*). De plus,*

- V *devient cristalline sur une extension finie de* $\mathbf{Q}_p$ *si et seulement si* $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$ *;*
- V *est semi-stable si et seulement si* $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$*.*

Remarque 0.9. — (i) Il résulte de ce qui précède qu'une L-représentation cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline si et seulement si les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\rm cris}(V)$ appartiennent à L, et qu'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline.

(ii) D'après un théorème de Kisin **[22]**, les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes de pente finie vérifient l'hypothèse selon laquelle il existe $\alpha\in L^*$ avec $v_p(\alpha)\geqslant 0$ et $(\mathbf{B}_{\rm cris}^+\otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha}\neq 0$. Ceci nous fournit un morphisme $x\mapsto s(x)$ de variétés analytiques de la courbe de Coleman-Mazur **[7]** dans $\mathscr{S}_+$, mais il se passe quelque chose d'un peu bizarre dans le cas où $s=s(x)=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_*^{\rm ncl}$ (i.e. dans le cas où x correspond à une forme de poids entier $\geqslant 2$ qui n'est pas classique) puisque la représentation $V(s)$ n'existe pas. La représentation V_x est alors $V(s')$, où $s'=(\delta_1x^{-w(s)},\delta_2x^{w(s)},\mathscr{L})$. Notons que $V(s')$ a un comportement très analogue à celui que devrait avoir $V(s)$ puisque ses poids de Hodge-Tate sont 0 et $-w(s)$, et la valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(s'))$ est $\delta_1(p)$; sa particularité est que les poids de Hodge-Tate sont « dans l'autre sens » car $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(s'))$ est inclus dans ${\rm Fil}^{w(s)}$.

0.5. Remerciements. — Les résultats de cet article ont été entrevus et annoncés lors de la conférence « L-functions and Galois representations » de Durham, organisée par D. Burns et J. Nekovář. L'atmosphère de cette conférence, où il a beaucoup été question de familles (de formes modulaires, de représentations galoisiennes...) a joué un grand rôle dans la cristallisation des résultats.

La réception, juste avant la conférence, des notes « Towards a p-adic Langlands programme » de L. Berger et C. Breuil, contenant une définition de la représentation $\Pi(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ correspondant **[12]** à $V(s)$ dans le cas cristallin, a joué un rôle évident, mais les travaux de M. Kisin et une question de G. Chenevier (dont la prop. 4.10 constitue la réponse) ont aussi eu une influence décisive en me mettant sur la piste de la représentation galoisienne $V(s)$. Ma première construction de $V(s)$ reposait sur la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie **[9, 11]**; elle avait l'inconvénient de ne pas fournir directement le (φ,Γ)-module associé, et c'est l'exposé de L. Berger à la conférence de Durham qui m'a fait réaliser la puissance du théorème de Kedlaya pour ce genre de questions.

Je voudrais remercier tous les acteurs mentionnés ci-dessus pour l'influence qu'ils ont eue. Une partie non négligeable de cet article a été rédigée pendant un séjour à Padoue, et je voudrais en profiter pour remercier, de leur hospitalité, B. Chiarellotto et le département de mathématiques de l'université de Padoue.

1. (φ,Γ)-modules et représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$

1.1. (φ,Γ)-modules étales et représentations galoisiennes

Si Λ est un anneau muni d'un action d'un frobenius φ, un φ-module D sur Λ est, dans cet article[(5)], un Λ-module libre muni d'une action semi-linéaire de φ telle que, si $e_1,\dots,e_d$ est une base de D sur Λ, alors il en est de même de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$.

Si $r=\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$, avec $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}-\{0\}$, et a et b premiers entre eux, on note $D_{[r]}$ le φ-module sur Λ, de rang b, possèdant une base $e_1,\dots,e_b$ dans laquelle l'action de φ est donnée par

$$\varphi(e_1)=e_2,\dots,\varphi(e_{b-1})=e_b,\ \varphi(e_b)=p^a e_1.$$

Un φ-module D sur Λ est *élémentaire* s'il est isomorphe à $D_{[r]}$ pour un certain $r\in\mathbf{Q}$ (qui est alors unique).

Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ est un corps complet pour la valuation v_p de corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$ qui est algébriquement clos. Un φ-module D sur $\widetilde{\mathbf{B}}$ possède donc une décomposition de Dieudonné-Manin en somme directe de φ-modules élémentaires $D=\oplus_{i\in I}D_{[r_i]}$

Un φ-module D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est *de pente* $r\in\mathbf{Q}$ si, dans la décomposition de Dieudonné-Manin de $\widetilde{\mathbf{B}}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}} D$, tous les r_i sont égaux à r. Un φ-module D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est *étale* s'il est de pente 0.

Rappelons qu'un (φ,Γ)-*module étale sur* $\mathscr{E}^\dagger$ est un φ-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

(5) On peut relacher cette condition de liberté ; il faut alors imposer que l'application naturelle $\Lambda\otimes_{\varphi(\Lambda)}\varphi(D)\to D$ soit un isomorphisme.

Proposition 1.1 (**[18, 5]**). — *Les foncteurs* $\mathbf{V}^\dagger$ *et* $\mathbf{D}^\dagger$ *définis par*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^\dagger(D) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}} D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et établissent une équivalence de catégories entre la catégorie des L*-représentations de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *et celle des* (φ, Γ)*-modules étales sur* $\mathscr{E}^\dagger$.

1.2. Le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya

Le théorème de Kedlaya ci-dessous va jouer un rôle fondamental dans la suite pour la construction de (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ et donc de représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 1.2 (**[21]**). — *Si* D *est un* φ*-module sur* $\mathscr{R}$*, il existe une unique filtration*

$$0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_h = D$$

et, pour $1 \leqslant i \leqslant h$*, un unique sous-*$\mathscr{E}^\dagger$*-module* Δ_i *de* D_i/D_{i-1}*, non nul, stable par* φ *et isocline de pente* r_i *en tant que* φ*-module sur* $\mathscr{E}^\dagger$*, tels que*
- $r_1 < r_2 \cdots < r_h$ *;*
- $D_i/D_{i-1} = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta_i$ *si* $1 \leqslant i \leqslant h$.

Définition 1.3. — (i) Les rationnels r_i, $1 \leqslant i \leqslant h$ apparaissant dans la proposition 1.2 sont *les pentes de* D.

(ii) D est *de pente* r si $h = 1$ et $r_1 = r$; ceci implique que D contient un unique sous-φ-module $\mathbf{\Delta}(D)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$, isocline de pente r, tel que $D = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{\Delta}(D)$.

Rappelons qu'un (φ, Γ)*-module sur* $\mathscr{R}$ est un φ-module sur $\mathscr{R}$ muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

Proposition 1.4. — *Si* D *est un* (φ, Γ)*-module sur* $\mathscr{R}$ *de pente* 0*, alors* $\mathbf{\Delta}(D)$ *est stable par* Γ.

Démonstration. — Choisissons une base $e_1, \dots, e_d$ de $\Delta = \mathbf{\Delta}(D)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$. C'est donc aussi une base D sur $\mathscr{R}$. Soit A la matrice de γ dans cette base, et, si $n \in \mathbf{N}$ soit B_n la matrice de φ^n. Comme Δ est de pente 0, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, les matrices B_n et B_n^{-1} soient à coefficients dans $p^{-N}\mathscr{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$. On tire de la relation $A = B_n \varphi^n(A)\gamma(B_n^{-1})$, le fait que les coefficients de A restent bornés quand on s'approche de $v_p(T) = 0$, et donc que A est à coefficients dans $\mathscr{E}^\dagger$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 1.5. — *Les foncteurs* $\Delta \mapsto \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta$ *et* $D \mapsto \mathbf{\Delta}(D)$ *sont inverses l'un de l'autre et induisent une équivalence de catégories de la catégorie des* (φ, Γ)*-modules étales sur* $\mathscr{E}^\dagger$ *sur la sous-catégorie des* (φ, Γ)*-modules sur* $\mathscr{R}$ *qui sont de pente* 0.

Remarque 1.6. — On peut reformuler le corollaire ci-dessus en disant que l'on ne perd pas d'information en tensorisant par $\mathscr{R}$, ce qui est quand même un peu surprenant car cette opération peut transformer un (φ, Γ)-module irréductible sur $\mathscr{E}^\dagger$ en un (φ, Γ)-module réductible sur $\mathscr{R}$, mais alors les morceaux ne sont pas de pente 0 et les extensions entre les morceaux sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

1.3. Application aux représentations galoisiennes

Proposition 1.7. — *Les foncteurs* $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}$ *et* $\mathbf{V}$ *définis par*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{D}^\dagger(V)\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(D)=(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}}D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et induisent une équivalence de catégories de la catégorie des L*-représentations de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *sur celle des* (φ,Γ)*-modules sur* $\mathscr{R}$ *qui sont de pente* 0*. De plus, on a*

$$\mathbf{V}(D)=\mathbf{V}^\dagger(\boldsymbol{\Delta}(D)).$$

Démonstration. — Compte tenu des prop. 1.1 et 1.2, il suffit de prouver la formule $\mathbf{V}(D)=\mathbf{V}^\dagger(\boldsymbol{\Delta}(D))$. On a $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}}D=\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\boldsymbol{\Delta}(D)$, et comme $\boldsymbol{\Delta}(D)$ est étale, on peut utiliser la proposition A.12 pour caractériser $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\boldsymbol{\Delta}(D)\subset\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}}D$ comme l'ensemble des x tels que la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ soit bornée. On en déduit les égalités,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}}D)^{\varphi=1}&=(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\boldsymbol{\Delta}(D))^{\varphi=1}=\big(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathbf{B}^\dagger}(\mathbf{B}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\boldsymbol{\Delta}(D))\big)^{\varphi=1}\\&=\big(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathbf{B}^\dagger}(\mathbf{B}^\dagger\otimes_L\mathbf{V}^\dagger(\boldsymbol{\Delta}(D)))\big)^{\varphi=1}=(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_L\mathbf{V}^\dagger(\boldsymbol{\Delta}(D)))^{\varphi=1}=\mathbf{V}^\dagger(\boldsymbol{\Delta}(D)).\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Pour terminer ce n$^{\mathrm{o}}$, rappelons que l'on peut retrouver **[2]** les modules $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ directement à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$, sans passer par les anneaux de Fontaine. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.8. — *Si* V *est une* L*-représentation de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$*, alors*

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)&=\big(\mathscr{R}[1/t]\otimes_{\mathscr{R}}\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)\big)^\Gamma=\big(\mathscr{R}[1/t]\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{D}^\dagger(V)\big)^\Gamma\\\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)&=\big(\mathscr{R}[1/t,\log T]\otimes_{\mathscr{R}}\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)\big)^\Gamma=\big(\mathscr{R}[1/t,\log T]\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{D}^\dagger(V)\big)^\Gamma\end{aligned}$$

2. Calculs de groupes de cohomologie

2.1. Le complexe associé à un (φ,Γ)-module

Ce qui suit a été inspiré par le calcul de la cohomologie galoisienne d'une représentation galoisienne en termes de (φ,Γ)-modules (cf. **[20, 6]**). Pour des généralisations, cf. **[24, 26]**.

Soit γ un générateur de Γ (si $p=2$, il faut un peu modifier les arguments). Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on note $C^\bullet(D)$ le complexe

$$0\xrightarrow{d_0}D\xrightarrow{d_1}D\oplus D\xrightarrow{d_2}D\xrightarrow{d_3}0\ ,$$

avec $d_1(x)=((\gamma-1)x,(\varphi-1)x)$ et $d_2(x,y)=(\varphi-1)x-(\gamma-1)y$. Si $i\in\mathbf{N}$, on note $B^i(D)$ l'image de d_i et $Z^i(D)$ le noyau de d_{i+1}, ce qui permet de définir le i-ème groupe de cohomologie $H^i(D)$ de D comme le quotient de $Z^i(D)$ par $B^i(D)$. On a bien évidemment $H^i(D)=0$ si $i\notin\{0,1,2\}$. Le groupe $H^1(D)$ s'identifie au groupe des extensions de $\mathscr{R}$ par D : si E est une telle extension et $e\in E$ est un relèvement de $1\in\mathscr{R}$, alors $((\gamma-1)e,(\varphi-1)e)$ est un élément de $Z^1(C^\bullet(D))$ dont la classe dans $H^1(D)$ ne dépend pas du choix de e, ce qui nous fournit une application naturelle $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},D)\to H^1(D)$ qui est un isomorphisme comme on le constate aisément.

Par ailleurs, si $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ est une suite exacte de (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{R}$, la suite de complexes associés

$$0 \to C^\bullet(D_1) \to C^\bullet(D) \to C^\bullet(D_2) \to 0,$$

est exacte ; elle donne donc naissance à la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to H^0(D_1) \to H^0(D) \to H^0(D_2) \to H^1(D_1) \to H^1(D) \to \cdots \to H^2(D_2) \to 0.$$

2.2. Le (φ, Γ)-module associé à un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ et sa cohomologie

Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ le groupe des caractères continus (et donc localement analytiques) de $\mathbf{Q}_p^*$ dans L^*. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on peut écrire δ de manière unique sous la forme

$$\delta(x) = \alpha^{v_p(x)}\eta(x|x|), \quad \text{avec } \alpha = \delta(p) \in L^* \text{ et } \eta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_L^*.$$

Comme $\mathbf{Z}_p^* = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p) \times (1 + 2p\mathbf{Z}_p)$, où $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$ est le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{Q}_p$, et comme $1 + 2p\mathbf{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, le caractère η est déterminé par sa restriction η_0 à $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$ et sa valeur en $1 + 2p$ qui appartient à $1 + \mathfrak{m}_L$ car $\eta(1 + 2p)^{p^n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de voir $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ comme l'ensemble des points L-rationnels d'un groupe analytique rigide $\widehat{\mathscr{T}}$, isomorphe (non canoniquement) à $\mathbf{G}_m \times B(1, 1^-) \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, la quantité $\frac{\log \delta(u)}{\log u}$ ne dépend pas du choix de $u \in \mathbf{Z}_p^* - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$. On la note $w(\delta)$; c'est *le poids* ou *le poids de Hodge-Tate* de δ. Il est plus ou moins immédiat que
- $w(\delta) = 0$ si et seulement si δ est localement constant ;
- $w(\delta) \in \mathbf{Z}$ si et seulement si δ est localement algébrique.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ, Γ)-module obtenu en tordant les actions de φ et Γ sur $\mathscr{R}$ par δ. De manière explicite, si on note $x(\delta)$ l'élément de $\mathscr{R}(\delta)$ correspondant à $x \in \mathscr{R}$, on a

$$\varphi(x(\delta)) = (\delta(p)\varphi(x))(\delta) \quad \text{et} \quad \gamma(x(\delta)) = (\delta(\gamma)\gamma(x))(\delta),$$

où l'on a utilisé l'identification $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Q}_p^*$ pour voir δ comme un caractère de Γ (on a donc $\delta(g) = \delta(\chi(g))$ si $g \in \Gamma$). Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et si $i \in \mathbf{N}$, on note simplement $Z^i(\delta)$, $B^i(\delta)$ et $H^i(\delta)$, les groupes $Z^i(\mathscr{R}(\delta))$, $B^i(\mathscr{R}(\delta))$ et $H^i(\mathscr{R}(\delta))$.

Proposition 2.1. — (i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^0(\delta) = 0$.*
(ii) *Si $i \in \mathbf{N}$, alors $H^0(x^{-i}) = L \cdot t^i$.*

Démonstration. — D'après le lemme A.1, on a $H^0(\delta) = 0$ si $\delta(p)$ n'est pas de la forme p^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, et $H^0(\delta) \subset L \cdot t^i$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$. Le résultat s'en déduit.

Corollaire 2.2. — *Les (φ, Γ)-modules $\mathscr{R}(\delta)$ et $\mathscr{R}(\delta')$ ne sont isomorphes que si $\delta = \delta'$.*

Démonstration. — En tordant par δ^{-1}, on se ramène à prouver que $\mathscr{R}(\delta)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{R}$ si $\delta \neq 1$, ce qui suit de ce que $\delta = 1$ est le seul élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que que $\mathscr{R}(\delta)$ soit engendré par $H^0(\delta)$.

2.3. Calcul de $H^1(\delta)$ dans le cas $v_p(\delta(p)) < 0$

Rappelons que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ désigne l'espace des mesures sur $\mathbf{Z}_p^*$ à valeurs dans L.

Lemme 2.3. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$. Alors*

(i) *l'équation $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$ a une unique solution $b_{\delta,\lambda}$ dans $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$;*

(ii) *$b_{\delta,\lambda} \in \mathscr{E}^+$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\,\lambda = 0$.*

Démonstration. — Comme $\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0} \subset (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, le (i) est un cas particulier du théorème **[5, 6]** selon lequel $\gamma - 1$ est inversible sur $D^{\psi=0}$ si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$.

Prouvons le (ii). L'application $\mu \mapsto \delta^{-1}\mu$ induit un isomorphisme de Γ-modules de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)(\delta)$, ce qui permet de se ramener au cas $\delta = 1$. En utilisant l'isomorphisme $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p^*$ qui induit un isomorphisme $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L[[\Gamma]] \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$, Γ-équivariant, on est ramené à prouver que $\mu \in (\gamma - 1)\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\mu = 0$. Comme $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\gamma(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\mu$, cela nous fournit une des implications, l'autre s'en déduit en remarquant que $(\gamma - 1)\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ est de corang 1 sur $\mathscr{O}_L$ dans $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ car γ est un générateur topologique de Γ.

Lemme 2.4. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\lambda = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$. Alors l'équation $(\delta(p)\varphi - 1)a = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$ a une unique solution $a_{\delta,\lambda}$ dans $\mathscr{R}^+$ vérifiant $(\partial^i a_{\delta,\lambda})_{|T=0} = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction du lemme A.1.

Remarque 2.5. — Par construction, si $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ (et vérifie $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\lambda = 0$ dans le cas $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$), alors $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in Z^1(\delta)$.

Proposition 2.6. — *Soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ un caractère continu vérifiant $v_p(\delta(p)) < 0$.*

(i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 1 sur L et l'image de $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda})$ en est une base si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\,\lambda \neq 0$.*

(ii) *Si $\delta = x^{-i}$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 2 sur L, et les images de $(t^i, 0)$ et $(0, t^i)$ en forment une base.*

Démonstration. — Soit $(a,b) \in Z^1(\delta)$. Comme $v_p(\delta(p)) < 0$, d'après le cor. A.3, il existe $c_0 \in \mathscr{R}$ tel que $b_1 = b - (\delta(p)\varphi - 1)c_0 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$. Soit $a_1 = a - (\delta(\gamma)\gamma - 1)c_0$ de telle sorte que $(a_1, b_1) \in Z^1(\delta)$ a même image que (a,b) dans $H^1(\delta)$. Comme $(a_1, b_1) \in Z^1(\delta)$, et comme $b_1 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, on a $(\delta(p)\varphi - 1)a_1 = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$. D'après le lemme A.4, ceci implique $a_1 \in \mathscr{R}^+$ et donc $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1 \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$.

Soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ la mesure définie par $\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1$. Si $\delta(p) = p^{-i}$, avec i entier $\geqslant 1$, la relation $(\delta(p)\varphi - 1)a_1 = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$ entraine que

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\,\lambda = \partial^i((\delta(p)\varphi - 1)a_1)_{|T=0} = (p^i\delta(p) - 1)(\partial^i a_1)_{|T=0} = 0.$$

Le lemme 2.3 implique donc que $b_1 = b_{\delta,\lambda}$ et le lemme 2.4 que $a_1 - a_{\delta,\lambda} \in Lt^i$. Maintenant, si $\delta(p) = p^{-i}$, mais $\delta \neq x^{-i}$, alors $(t^i, 0)$ est le bord de $((\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1)^{-1}t^i, 0)$; pour terminer la démonstration du (i), il suffit donc de vérifier que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$ si et seulement si

$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$ (en effet, ceci prouve que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda$ induit un isomorphisme de $H^1(\delta)$ sur L).

Si $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$, il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $(\delta(p)\varphi - 1)c = b_{\delta,\lambda}$. Comme $\psi(b_{\delta,\lambda}) = 0$, cela entraine $c \in \mathscr{R}^+$ d'après le lemme A.4, et donc $b_{\delta,\lambda} \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$. D'après le lemme 2.3, ceci implique $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$.

Réciproquement, si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$, il résulte du lemme 2.3 que $b_{\delta,\lambda} \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$. De plus, si $\delta(p) = p^{-i}$, la nullité de

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda = \partial^i((\delta(\gamma)\gamma - 1)b_{\delta,\lambda})_{|T=0} = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1)(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0}$$

entraine celle de $(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0}$ puisque $\delta \neq x^{-i}$ et donc $\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1 \neq 1$. On en déduit, grâce au lemme A.1, l'existence et l'unicité de $c \in \mathscr{R}^+$ vérifiant $(\delta(p)\varphi - 1)c = b_{\delta,\lambda}$ (et $(\partial^i c)_{|T=0} = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$). On a alors

$$(\delta(p)\varphi - 1)((\delta(\gamma)\gamma - 1)c - a_{\delta,\lambda}) = 0,$$

ce qui, grâce au lemme A.1, entraine que $(\delta(\gamma)\gamma - 1)c - a_{\delta,\lambda} = 0$ et donc que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$. Ceci permet de conclure.

(ii) Dans le cas $\delta = x^{-i}$, il faut modifier le raisonnement à deux endroits. Tout d'abord $(t^i, 0)$ n'est plus un bord, et ensuite la condition $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$ est automatique, mais $b_{\delta,\lambda} \in \mathscr{E}^+$ ne vérifie plus nécéssairement la propriété $(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0} = 0$, et donc l'existence de c dans $\mathscr{R}^+$ (et donc dans $\mathscr{R}$) vérifiant $(\delta(p)\varphi - 1)c = 0$ n'est pas automatique. Le résultat s'en déduit.

Remarque 2.7. — Dans le cas, $\delta = |x|$, on peut prendre $(\log \frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log \frac{\varphi(T)}{T^p})$ comme générateur de $H^1(\delta)$, ce qui a l'avantage de rendre plus transparent le lien avec les représentations semi-stables.

2.4. L'opérateur $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$

On déduit des formules

$$\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial \quad \text{et} \quad \partial \circ \gamma = \chi(\gamma)\,\gamma \circ \partial,$$

le fait que ∂ induit un morphisme L-linéaire, commutant à l'action de φ et Γ, de $\mathscr{R}(x^{-1}\delta)$ dans $\mathscr{R}(\delta)$. Ce morphisme induit un morphisme de complexes de $C^\bullet(x^{-1}\delta)$ dans $C^\bullet(\delta)$, et donc aussi un morphisme, encore noté ∂, de $H^i(x^{-1}\delta)$ dans $H^i(\delta)$.

Proposition 2.8. — (i) *Si $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, alors ∂ induit un isomorphisme de $H^1(x^{-1}\delta)$ sur $H^1(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta = x$, alors $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nul et $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1.

(iii) *Si $\delta = x|x|$, alors $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nul et $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. — Commençons par déterminer le noyau de ∂. Si $\delta = x$, alors $x^{-1}\delta = 1$ et $H^1(x^{-1}\delta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(1, 0)$ et $(0, 1)$ qui sont tués par ∂, ce qui fait que ∂ est identiquement nul sur $H^1(x^{-1}\delta)$.

Si $\delta = x|x|$, alors $x^{-1}\delta = |x|$ et $H^1(x^{-1}\delta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$ dont l'image par ∂ est le bord de $\frac{1+T}{T}$, ce qui fait que ∂ est identiquement nul sur $H^1(x^{-1}\delta)$.

Si $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, et si $(a,b) \in Z^1(x^{-1}\delta)$ est dans le noyau de ∂, alors il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que l'on ait $\partial a = (\delta(\gamma)\gamma - 1)c$ et $\partial b = (\delta(p)\varphi - 1)c$. Ceci implique en particulier que l'on a

$$(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)\mathrm{Res}(c) = (\delta(p) - 1)\mathrm{Res}(c) = 0,$$

et comme $\delta \neq x|x|$, l'une au moins des deux quantités $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)$ ou $(\delta(p) - 1)$ est non nulle, ce qui implique que $\mathrm{Res}(c)$ est nul, et qu'il existe $c' \in \mathscr{R}$ tel que $\partial c' = c$. Soient $a' = a - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)c'$ et $b' = b - (\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)c'$. Par construction, on a $\partial a' = \partial b' = 0$, et donc $a', b' \in L$. Par ailleurs, on a aussi $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b'$, et comme $\delta \neq x$, l'une au moins des deux quantités $(\delta(p)p^{-1} - 1)$ et $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)$ est non nulle, ce qui fait que les couples (a', b') vérifiant la relation ci-dessus forment un L-espace vectoriel de dimension 1, et que l'on peut modifier c' en lui ajoutant un élément de L de telle sorte que $a' = b' = 0$. On en déduit l'injectivité de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ dans le cas $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$.

Passons à l'image de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$. Soit $(a,b) \in Z^1(\delta)$. On a donc $(\delta(p)\varphi - 1)a = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b$, ce qui nous donne la relation

$$(\delta(p) - 1)\mathrm{Res}(a) = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)\mathrm{Res}(b).$$

Si $(\delta(p) - 1) \neq 0$, on peut ajouter à (a,b) un bord de telle sorte que $\mathrm{Res}(b) = 0$, et la relation précédente entraîne alors que $\mathrm{Res}(a) = 0$. Si $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1) \neq 0$, on peut ajouter à (a,b) un bord de telle sorte que $\mathrm{Res}(a) = 0$, et la relation précédente entraîne alors que $\mathrm{Res}(b) = 0$. Autrement dit, si $\delta \neq x|x|$, quitte à ajouter un bord à (a,b), on peut s'arranger pour que $\mathrm{Res}(a) = \mathrm{Res}(b) = 0$. Il existe alors $a', b' \in \mathscr{R}$ tels que $a = \partial a'$ et $b = \partial b'$. Ceci implique que $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b' \in L$, et, comme précédemment, si $\delta \neq x$, on peut ajouter à a' et b' des éléments de L de telle sorte que $(a', b') \in Z^1(x^{-1}\delta)$. On en déduit la surjectivité de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ dans le cas $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, ce qui termine la démonstration du (i).

Si maintenant $\delta = x$, la quantité $d(a,b) = (\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b' \in L$ ne dépend pas du choix de (a', b') vérifiant $\partial a' = a$ et $\partial b' = b$, ce qui nous fournit une application naturelle de $H^1(\delta)$ dans L qui n'est pas identiquement nulle car, si $b = \varphi(\frac{1}{T}) - \frac{1}{T}$, et si $a \in T\mathscr{R}^+$ est l'unique solution de l'équation $(p\varphi - 1)a = (\varphi - 1)\big(\frac{\chi(\gamma)}{(1+T)^{\chi(\gamma)} - 1} - \frac{1}{T}\big) \in T\mathscr{R}^+$, on peut prendre $b' = \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$, et pour a' la primitive de $(1+T)^{-1}a$ sans terme constant. Alors $d(a,b)$ est le terme constant de $-(\gamma - 1)b' = -\frac{1}{p}(\varphi - p)\log\frac{\gamma(T)}{T}$, et donc $d(a,b) = \frac{p-1}{p}\log\chi(\gamma) \neq 0$. Ceci termine la démonstration du (ii).

Finalement, si $\delta = x|x|$, le raisonnement fait ci-dessus montre que ∂ est une surjection de $Z^1(x^{-1}\delta)$ sur l'ensemble des $(a,b) \in Z^1(\delta)$ vérifiant $\mathrm{Res}(a) = \mathrm{Res}(b) = 0$. Comme $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nulle, cela montre que $H^1(\delta)$ s'identifie à l'image de $Z^1(\delta)$ dans L^2 par $(a,b) \mapsto (\mathrm{Res}(a), \mathrm{Res}(b))$. Or $Z^1(\delta)$ contient les couples $(\frac{1}{T}, b)$, où $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ est l'unique solution de l'équation $(\chi(\gamma)\gamma - 1)b = (\varphi - 1)\frac{1}{T}$, et $(a, \frac{1}{T} + \frac{1}{2})$, où $a \in T\mathscr{R}^+$ est l'unique solution de l'équation $(\varphi - 1)a = (\chi(\gamma)\gamma - 1)(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}) \in T\mathscr{O}_L[[T]]$. On en déduit le fait que l'image de $Z^1(\delta)$ dans L^2 par $(a,b) \mapsto (\mathrm{Res}(a), \mathrm{Res}(b))$ est L^2 tout entier, ce qui termine la démonstration du (iii) et donc de la proposition.

2.5. Dimension de $H^1(\delta)$

Les résultats des deux § précédents permettent de calculer la dimension de $H^1(\delta)$.

Théorème 2.9. — (i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1.

(ii) *Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2 *engendré par les images de $(t^i, 0), (0, t^i) \in Z^1(\delta)$.*

(iii) *Si $\delta = |x|x^i$, avec $i \geqslant 1$ entier, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. — • Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 2 d'après le (ii) de la prop. 2.6.

• Si $\delta = x^i$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ a même dimension que $H^1(x)$ comme le montre une récurrence immédiate utilisant le (i) de la prop. 2.8, et donc $H^1(\delta)$ est de dimension 1 d'après le (ii) de la proposition 2.8.

• Si $\delta = x^i|x|$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ a même dimension que $H^1(x|x|)$ d'après le (i) de la prop. 2.8, et donc $H^1(\delta)$ est de dimension 2 d'après le (iii) de la proposition 2.8.

• Dans tous les autres cas, $H^1(\delta)$ a même dimension, pour tout $k \in \mathbf{N}$, que $H^1(x^{-k}\delta)$ d'après le (i) de la prop. 2.8, et comme $v_p(p^{-k}\delta(p)) < 0$ si k est assez grand, le (i) de la prop. 2.6 montre que $H^1(\delta)$ est de dimension 1.

Ceci permet de conclure.

Corollaire 2.10. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N} - \{1\}$, et vérifiant $v_p(\delta(p)) > 0$. Soit $a \in \mathscr{R}^+$ la solution de $(\delta(p)\varphi - 1)a = (1+T)$, et soit $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ la solution de $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = (1+T)$. Alors $(a,b) \in Z^1(\delta)$ et l'image de (a,b) dans $H^1(\delta)$ est une base de $H^1(\delta)$.*

Démonstration. — L'existence (et l'unicité) de a et b suivent des lemmes A.1 et 2.3. L'appartenance de (a,b) à $Z^1(\delta)$ est une évidence, et la prop. A.5 montre que l'image de (a,b) dans $H^1(\delta)$ est non nulle. Comme $H^1(\delta)$ est de dimension 1, cela permet de conclure.

Remarque 2.11. — (i) Si $v_p(\delta(p)) = 0$, l'équivalence de catégories entre (φ,Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ montre que $H^1(\delta)$ est aussi égal au groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta))$. Le théorème 2.9 permet donc de retrouver les résultats classiques selon lesquels, si δ est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta))$ est de dimension 1 sur L, si $\delta \neq 1$ et $\delta \neq \chi$, et de dimension 2, si $\delta = 1$ ou $\delta = \chi$.

(ii) Si $\delta = 1$, l'extension de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de L par $L(\delta)$ correspondant à $(0,1) \in H^1(\delta)$ est celle donnée par $g(e_1) = e_1$ et $g(e_2) = e_2 - (\deg g)e_1$, où $\deg : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p$ est le caractère additif non ramifié envoyant un frobenius sur 1 ; l'extension correspondant à $(1,0)$ est celle donnée par $g(e_1) = e_1$ et $g(e_2) = e_2 + \frac{\log\chi(g)}{\log\chi(\gamma)}e_1$.

Définition 2.12. — Si $i \in \mathbf{N}$, on définit un isomorphisme $\mathscr{L} : \mathrm{Proj}(H^1(x^{-i})) \cong \mathbf{P}^1(L)$ en envoyant $h = a(0,1) + b(1,0)$ sur $\mathscr{L}(h) = \frac{a}{b\log\chi(\gamma)}$.

Remarque 2.13. — (i) Si $i = 0$ et si $h \in H^1(x^{-i})$ est non nul, le (ii) de la remarque 2.11 montre que la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ définie par h ne dépend, à isomorphisme près, que de $\mathscr{L}(h)$, et que cette représentation est non ramifiée si et seulement si $\mathscr{L} = \infty$ (elle n'est même de Hodge-Tate que si $\mathscr{L}(h) = \infty$).

(ii) On dispose aussi (cf. def. 2.20) d'un isomorphisme naturel $\mathscr{L} : \mathrm{Proj}(H^1(x^i|x|)) \cong \mathbf{P}^1(L)$, si i est un entier $\geqslant 1$. Ce dernier permet de retrouver (cf. prop. 4.18) l'invariant $\mathscr{L}$ attaché par Fontaine et Mazur **[25]** à une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui justifie le nom que lui avons donné.

2.6. Calcul de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$

Si $N \in \mathbf{N}$, soit ζ_{p^N} une racine primitive p^N-ième de l'unité, choisie de telle sorte que l'on ait $\zeta_{p^{N+1}}^p = \zeta_{p^N}$ quel que soit $N \in \mathbf{N}$. On note L_N la $\mathbf{Q}_p$-algèbre étale $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^N})$, que l'on munit de l'action L-linéaire évidente de Γ. Si $\Phi_N = \varphi^{N-1}(T^{-1}\varphi(T))$ est le p^N-ième polynôme cyclotomique, on a aussi $L_N = L[T]/\Phi_N$. On note L_∞ la réunion des L_N, $N \in \mathbf{N}$.

Si $\eta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est d'ordre fini, on note $p^{N(\eta)}$ son conducteur (où $N(\eta)$ est défini par $N(\eta) = 0$ si $\eta = 1$ et $N(\eta)$ est le plus petit entier n tel que η soit trivial sur $1 + p^n\mathbf{Z}_p$ si $\eta \neq 1$), on définit la somme de Gauss $G(\eta)$ associée à η par $G(\eta) = 1$ si $\eta = 1$ et, si $N(\eta) = N \geqslant 1$,

$$G(\eta) = \sum_{x \in (\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^*} \eta(x)\zeta_{p^N}^x \in L_N^*.$$

Proposition 2.14. — *Soit $k \geqslant 1$ un entier.*

(i) *Si $\eta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est d'ordre fini et $0 \leqslant i \leqslant k-1$, alors $G(\eta)t^i$ est vecteur propre pour l'action de Γ agissant par $\eta^{-1}\chi^i$.*

(ii) *Si $N \in \mathbf{N}$, alors $L_N[t]/t^k = \oplus_{N(\eta) \leqslant N} \oplus_{0 \leqslant i \leqslant k-1} L \cdot G(\eta)t^i$.*

Démonstration. — Le (i) est un calcul immédiat (et classique). Le (ii) suit de l'indépendance linéaire des caractères et de ce que $|\{\eta,\ N(\eta) \leqslant N\}| = (p-1)p^{N-1} = \dim_L L_N$.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $w(\delta) = 0$, ce qui équivaut à ce que la restriction δ_0 de δ à $\mathbf{Z}_p^*$ soit d'ordre fini, on pose $G(\delta) = G(\delta_0)$ et $N(\delta) = N(\delta_0)$. Si i, k sont deux entiers vérifiant $0 \leqslant i \leqslant k-1$, on note $\pi_{\delta,i}$ la projection de $L_\infty[t]/t^k$ sur $L \cdot G(\delta)t^i$.

Corollaire 2.15. — (i) *Si $w(\delta) \notin \{1, \dots, k\}$, alors*

$$(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1) : L_n[t]/t^k \to L_n[t]/t^k$$

est un isomorphisme quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

(ii) *Si $w(\delta) \in \{1, \dots, k\}$, et si $n \geqslant N(x^{-w(\delta)}\delta)$, alors le noyau de*

$$(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1) : L_n[t]/t^k \to L_n[t]/t^k$$

est $L \cdot t^{k-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta)$, et l'image est le noyau de $\pi_{x^{-w(\delta)}\delta, k-w(\delta)}$.

Si $r \leqslant \frac{1}{p-1}$, on note $n(r)$ le plus petit entier tel que $(p-1)p^{n-1}r \geqslant 1$.

Proposition 2.16. — (i) *Si $r \leqslant \frac{1}{p-1}$, alors $\mathscr{E}^{]0,r]}/t^k \cong \prod_{n \geqslant n(r)} \mathscr{E}^{]0,r]}/\Phi_n^k$.*

(ii) *Si $(p-1)p^{n-1}r \geqslant 1$, alors $T \mapsto \zeta_{p^n}e^{t/p^n} - 1$ induit un isomorphisme Γ-équivariant de $\mathscr{E}^{]0,r]}/\Phi_n^k$ sur $L_n[t]/t^k$.*

(iii) *$\varphi : \mathscr{E}^{]0,r]} \to \mathscr{E}^{]0,r/p]}$ se traduit, via les isomorphismes précédents, par $\varphi((x_n)_{n \geqslant n(r)}) = (y_n)_{n \geqslant n(r/p)}$, avec $y_n = x_{n-1}$ quel que soit $n \geqslant n(r/p) = n(r) + 1$.*

Démonstration. — On a $t = \prod_{n\geqslant n(r)}(p^{-1}\Phi_n)$, à multiplication près par une unité de $\mathscr{E}^{]0,r]}$, ce qui permet d'utiliser le théorème des parties finies de Lazard pour démontrer le (i). Le reste est plus ou moins immédiat.

Si $w(\delta) = 0$ et $k \geqslant 1$, on choisit $G(\delta,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}/t^k = \prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = 0$ si $n < N$, et $x_n = \delta(p)^n G(\delta)$ si $n \geqslant N$.

Lemme 2.17. — *Si $w(\delta) = 0$, alors $(\delta(p)\varphi - 1)G(\delta,k)$ et $(\delta(\gamma)\gamma - 1)G(\delta,k)$ appartiennent à $t^k\mathscr{R}$.*

Démonstration. — C'est immédiat au vu de la construction de $G(\delta,k)$ et des prop. 2.14 et 2.16.

Proposition 2.18. — (i) *Si $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) = 0$.*

(ii) *Si $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par $t^{-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta, w(\delta))$.*

Démonstration. — Il n'y a rien à démontrer si $k = 0$; nous supposerons donc $k \geqslant 1$. L'application $z \mapsto t^k z$ induit un isomorphisme de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ sur $H^0((\mathscr{R}/t^k)(x^{-k}\delta))$, ce qui nous permet de travailler dans $\mathscr{R}/t^k$ plutôt que dans $t^{-k}\mathscr{R}/\mathscr{R}$.

Si $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, il résulte du cor. 2.15, que $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1)$ est injectif sur $L_n[t]/t^k$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Il est donc aussi injectif sur $\mathscr{R}/t^k$, d'après la proposition 2.16, ce qui démontre le (i).

Si $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$, et si $c \in \mathscr{R}/t^k$ est tué par $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1)$ et $(\delta(p)p^{-k}\varphi - 1)$, il résulte de la prop. 2.16 que, si on écrit c sous la forme $(c_n)_{n\gg 0}$, avec $c_n \in L_n[t]/t^k$, alors $c_n \in L\cdot G(x^{-w(\delta)}\delta)t^{k-w(\delta)}$ et $c_{n+1} = p^{-k}\delta(p)c_n$, quel que soit $n \gg 0$. Il existe donc $\lambda \in L$ tel que $c = \lambda t^{k-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta, w(\delta))$, ce qui permet de conclure.

2.7. L'application $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$

Si k est un entier $\geqslant 1$, la suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta) \to t^{-k}\mathscr{R}(\delta) \to t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta) \to 0$ donne naissance à une suite exacte longue de cohomologie dont le début est

$$0 \to H^0(\mathscr{R}(\delta)) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)).$$

On peut utiliser ceci pour analyser le L-espace vectoriel $H^1(x^k|x|)$ qui est de dimension 2 d'après le th. 2.9 : la suite

$$0 \to H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|)) \to H^1(x^k|x|) \to H^1(|x|) \to 0$$

est exacte car $H^0(|x|) = 0$ d'après la prop. 2.1 et donc $H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|))$, qui est de dimension 1 sur L d'après la prop. 2.18, s'injecte dans $H^1(x^k|x|)$, et le quotient, qui est de dimension 1, s'identifie à $H^1(|x|)$ puisque cet espace est lui-aussi de dimension 1 sur L, d'après le th. 2.9. Comme $H^1(|x|)$ est engendré par $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$, et comme $H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|))$ est engendré par $G(|x|,k)$, on en tire le résultat suivant, en choisissant $G'(|x|,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = \log(\zeta_{p^n}e^{t/p^n} - 1)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 2.19. — *Si $k \geqslant 1$, et si $h \in H^1(x^k|x|)$, alors il existe $\lambda, \mu \in L$, uniques, tels que h soit l'image de $(a,b) \in Z^1(x^k|x|)$, avec*

$$\begin{aligned} a =& t^{-k}(\gamma-1)\big(\lambda G(|x|,k) + \mu(\log T - G'(|x|,k))\big) \\ b =& t^{-k}(p^{-1}\varphi-1)\big(\lambda G(|x|,k) + \mu(\log T - G'(|x|,k))\big). \end{aligned}$$

Définition 2.20. — Si $k \geqslant 1$, si $h \in H^1(x^k|x|)$ est non nul, et si λ, μ sont les éléments de L fournis par la proposition 2.19, on note $\mathscr{L}(h) \in \mathbf{P}^1(L)$ la quantité $-\frac{p-1}{p}\frac{\lambda}{\mu}$.

Remarque 2.21. — $\mathscr{L}(h) = \infty$ si et seulement si h se trivialise dans $t^{-k}\mathscr{R}$.

Si $k \in \mathbf{N}$, le (φ,Γ)-module $t^{-k}\mathscr{R}(\delta)$ s'identifie naturellement à $\mathscr{R}(x^{-k}\delta)$ et la suite exacte ci-dessus donne naissance à un morphisme naturel $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$.

Théorème 2.22. — (i) *Si $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, alors $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$ et $\delta \neq x^{w(\delta)}$, $|x|x^{w(\delta)}$, alors l'application de connexion induit un isomorphisme $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \cong H^1(\delta)$ et $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est identiquement nul.*

(iii) *Si $\delta = |x|x^{w(\delta)}$, avec $1 \leqslant w(\delta) \leqslant k$, alors $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est surjective et son noyau est la droite des $h \in H^1(\delta)$ vérifiant $\mathscr{L}(h) = \infty \in \mathbf{P}^1(L)$.*

(iv) *Si $\delta = x^{w(\delta)}$, avec $1 \leqslant w(\delta) \leqslant k$, alors $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$ est injective et son image est la droite d'invariant $\mathscr{L} = \infty$.*

Démonstration. — On part de la suite exacte

$$0 \to H^0(\delta) \to H^0(x^{-k}\delta) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta).$$

Si $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) = 0$ d'après la proposition 2.18, et $H^1(\delta)$ et $H^1(x^{-k}\delta)$ sont de dimension 1 sur L d'après le théorème 2.9. On en déduit le (i).

Si $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$ et $\delta \neq x^{w(\delta)}$, alors $H^0(x^{-k}\delta) = 0$ d'après la proposition 2.1, et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ s'injecte dans $H^1(\delta)$. Si de plus $\delta \neq |x|x^{w(\delta)}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ et $H^1(\delta)$ sont de dimension 1 sur L, d'après la prop. 2.18 et le th. 2.9, et donc l'application de connexion $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\delta)$ est un isomorphisme et ι_k est nulle. On en déduit le (ii).

Comme le (iii) est contenu dans la prop. 2.19, qui est à la base de la définition de l'invariant $\mathscr{L}$, et dans la rem. 2.21, il ne reste plus que le cas $\delta = x^i$, avec $i \in \{1,\dots,k\}$, à traiter. Dans ce cas, on a $H^0(\delta) = 0$ d'après la proposition 2.1, et $H^0(x^{-k}\delta)$ et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ sont tous deux de dimension 1, d'après les prop. 2.1 et 2.18. On en déduit, en utilisant la suite exacte ci-dessus, que ι_k est injective. Comme $H^1(\delta)$ est de dimension 1, son image par ι_k est une droite de $H^1(x^{-k}\delta)$ qui est de dimension 2 ; elle est donc déterminée par la valeur de $\mathscr{L}(\iota_k(h))$, où $h \in H^1(\delta)$ est non nul. Soit $(a,b) \in Z^1(\delta)$ représentant h ; on a donc $(\chi(\gamma)^i\gamma - 1)b = (p^i\varphi - 1)a$, et $\iota_k(h)$ est représenté par $(t^k a, t^k b)$. On déduit de la relation $(\chi(\gamma)\gamma - 1)t^{i-1}b = (p\varphi - 1)t^{i-1}a$ la nullité de $\mathrm{Res}(t^{i-1}a)$. Ceci permet, en utilisant le lemme A.8, de montrer qu'il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $(\gamma - 1)c = t^i a$. On a alors $t^k a = (\chi(\gamma)^{i-k}\gamma - 1)(t^{k-i}c)$, ce qui prouve que $(t^k a, t^k b)$ est cohomologue à un multiple de $(0, t^{k-i})$ et donc que $\mathscr{L}(\iota_k(h)) = \infty$. Ceci termine la démonstration du théorème 2.22.

3. Construction de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$

3.1. (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$

Proposition 3.1. — *Si D est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, alors il existe $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ unique tel que D soit isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$.*

Démonstration. — L'unicité suit (cor. 2.2) de ce que $\mathscr{R}(\delta)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{R}(\delta')$ si $\delta\neq\delta'$. Pour montrer l'existence, on se ramène au cas de pente 0, en tordant l'action de φ par un $\alpha\in L^*$ de valuation convenable. Le résultat se déduit alors, via l'équivalence de catégories entre L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$, de la description de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ fournie par la théorie locale du corps de classes.

3.2. (φ,Γ)-modules triangulables

Lemme 3.2. — *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *D possède un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$;*
(ii) *D possède un sous-(φ,Γ)-module saturé, de rang 1 sur $\mathscr{R}$.*

Démonstration. — Il n'y a bien évidemment que l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) à prouver. Choisissons une base $e_1,\dots,e_d$ de D sur $\mathscr{R}$. Soit D_1 un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, et soit $f\in D_1$ une base de D_1. Écrivons f sous la forme $f=x_1e_1+\cdots+x_de_d$. Comme $\varphi(f)=bf$ avec $b\in\mathscr{R}^*$ et $\gamma(f)=af$, avec $a\in\mathscr{R}^*$, et comme les matrices de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$ et $\gamma(e_1),\dots,\gamma(e_d)$, dans la base $e_1,\dots,e_d$, appartiennent à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{R})$, on en déduit le fait que l'idéal de $\mathscr{R}$ engendré par $x_1,\dots,x_d$, est stable par γ et φ. Comme $\mathscr{R}$ est un anneau de Bézout, cet idéal est principal, et la stabilité par γ implique qu'on peut trouver un générateur λ de cet idéal de la forme $\lambda=\prod_{n\geqslant n_0}(\Phi_n^{i_n}/p)$, où $\Phi_n=\varphi^{n-1}(T^{-1}((1+T)^p-1))$ est le p^n-ième polynôme cyclotomique. La stabilité par φ implique alors que i_n est décroissante et donc stationnaire pour n assez grand. Si k est la limite de la suite i_n, on a alors $\lambda\sim t^k=T\prod_{n=1}^{+\infty}(\Phi_n/p)$, à multiplication près par une unité de $\mathscr{R}$. En d'autre termes, quitte à remplacer D_1 par $t^{-k}D_1$, on peut s'arranger pour que D_1 soit saturé. Ceci permet de conclure.

Remarque 3.3. — On a démontré en passant que les sous-(φ,Γ)-modules d'un (φ,Γ)-module D de rang 1 sur $\mathscr{R}$ sont de la forme t^kD, avec $k\in\mathbf{N}$.

Définition 3.4. — Un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{R}$ est dit *triangulable* si c'est une extension successive de (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$, i.e. si D possède une filtration croissante par des sous-(φ,Γ)-modules D_i, pour $0\leqslant i\leqslant d$, telle que l'on ait $D_0=0$, $D_d=D$ et D_i/D_{i-1} est libre de rang 1 si $1\leqslant i\leqslant d$.

3.3. Le (φ,Γ)-module $D(s)$

Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$, où $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$. Si $s\in\widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Le (φ,Γ)-module $D(s)$ ne dépend de h qu'à homothétie près et donc ne dépend que de l'image de s dans $\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$.

D'après le théorème 2.9, la dimension de $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est 1 sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$, ou si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. Dans ces deux derniers cas, $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est de dimension 2, et on dispose d'un isomorphisme naturel $\mathscr{L}$: $\mathrm{Proj}(H^1(\delta_1\delta_2^{-1}))\cong\mathbf{P}^1(L)$. Ceci nous permet de décrire le sous-ensemble de $\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$ des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$ avec $h\neq 0$ (correspondant aux (φ,Γ)-modules non scindés) comme l'ensemble des points L-rationnels de la variété analytique $\mathscr{S}$ obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1}=x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$, et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On dispose d'une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}=\infty$ si la fibre au-dessus de (δ_1,δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L}\in\mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p))+v_p(\delta_2(p))=0\quad\text{et}\quad v_p(\delta_1(p))\geqslant 0.$$

Si $s\in\mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s)\in\mathbf{Q}_+$ et $w(s)\in L$ définis par

$$u(s)=v_p(\delta_1(p))=-v_p(\delta_2(p))\quad\text{et}\quad w(s)=w(\delta_1)-w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+=\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}\coprod\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où

- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)<w(s)$ et $\mathscr{L}=\infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)<w(s)$ et $\mathscr{L}\neq\infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)=w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s)>w(s)$.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+=\mathscr{S}_0\coprod\mathscr{S}_*$, où

- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s)=0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s)>0$.

Si truc $\in\{\mathrm{ng},\mathrm{cris},\mathrm{st},\mathrm{ord},\mathrm{ncl}\}$ et machin $\in\{+,0,*\}$, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}^{\mathrm{truc}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}=\mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}\coprod\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

Proposition 3.5. — *Si $s=(\delta_1,\delta_2,h)\in\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$, alors $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si on est dans un des deux cas exclusifs suivants :*

- *$s\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$;*
- *$h=0$ et δ_1,δ_2 sont unitaires.*

Démonstration. — Si $D(s)$ est de pente 0, alors le déterminant de $D(s)$ est de pente 0, ce qui signifie que $v_p(\delta_1(p)\delta_2(p))=0$. De plus, si cette condition est vérifiée, alors d'après le théorème de Kedlaya, $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si il n'a pas de sous-module de pente <0. En particulier, si $D(s)$ est de pente 0, alors $v_p(\delta_1(p))\geqslant 0$ et donc $s\in\mathscr{S}_+$. De même, si $h=0$, alors $\mathscr{R}(\delta_2)$ est un sous-(φ,Γ)-module de pente $v_p(\delta_2(p))$ de $D(s)$ et donc, si $h=0$, alors $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si $v_p(\delta_1(p))=v_p(\delta_2(p))=0$. Si $h\neq 0$, la discussion précédente montre que $D(s)$ ne peut être de pente 0 que si $s\in\mathscr{S}_+$.

Supposons donc que $s\in\mathscr{S}_+$, mais que $D(s)$ contient un sous-module D' de pente strictement négative. Comme $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$, tous ses sous-(φ,Γ)-modules sont de pente $\geqslant 0$, et l'image de D' dans $\mathscr{R}(\delta_2)$ est un sous-(φ,Γ)-module non nul de $\mathscr{R}(\delta_2)$; elle est donc (rem. 3.3) de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, avec $k\in\mathbf{N}$ (et $k\geqslant 1$ car $D(s)$ est supposé non scindé), ce qui fait (th. 2.22) que $h\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ se trivialise dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$. La pente de D' est alors $k-u(s)$; sa stricte négativité équivaut à $u(s)>k$. On a donc $v_p(\delta_1(p)\delta_2^{-1}(p))=2u(s)>2k\geqslant k+1$; en particulier,

$\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est pas de la forme x^i ou $x^i|x|$, avec $1 \leqslant i \leqslant k$, ce qui fait que $\iota_k : H^1(\delta_1\delta_2^{-1}) \to H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ est non injective si et seulement si $w(s) = i$, avec i entier, $1 \leqslant i \leqslant k$. Comme ι_k est alors identiquement nulle, l'existence de D' est équivalente à celle d'un entier $k \geqslant 1$ avec $1 \leqslant w(s) \leqslant k < u(s)$, c'est-à-dire à l'appartenance de s à $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Ceci permet de conclure.

Remarque 3.6. — La même démonstration, en remplaçant « pente < 0 » par « pente $= 0$ » montre que, si $u(s) > 0$, alors $D(s)$ possède un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 et de pente 0 si et seulement si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ et ce sous-(φ,Γ)-module est isomorphe à $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, où $k = w(s)$.

Proposition 3.7. — *Soient $s, s' \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, avec $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$.*

(i) *Si $\delta_1 = \delta_1'$, alors $D(s) \cong D(s')$ si et seulement si $\delta_2 = \delta_2'$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.*

(ii) *Si $\delta_1 \neq \delta_1'$, alors $D(s) \cong D(s')$ si et seulement si $s, s' \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ et $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.*

De plus, on alors $w(\delta_1') = w(\delta_1)$, $w(\delta_2') = w(\delta_2)$, et $D(s) \cong D(s')$ contient un sous (φ,Γ)-module d'indice $t^{w(s)}$ isomorphe à $\mathscr{R}(\delta_1) \oplus \mathscr{R}(\delta_1')$.

Démonstration. — Le (i) est une évidence ; remarquons juste que la condition $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$ est automatique si $\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est ni trivial ni de la forme $x^i|x|$ avec i entier $\geqslant 1$.

Passons au (ii), et soit $D = D(s) = D(s')$. Par construction, D contient des sous-(φ,Γ)-modules saturés D_1 et D_1' isomorphes respectivement à $\mathscr{R}(\delta_1)$ et $\mathscr{R}(\delta_1')$ qui sont distincts puisque $\delta_1 \neq \delta_1'$. Mais alors $D' = D_1 \oplus D_1'$ est d'indice fini dans D et est stable par φ et Γ ; il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que D' soit d'indice t^k dans D, et on a $k \geqslant 1$ car D' est scindé alors que $D = D(s)$ ne l'est pas, par hypothèse.

L'image de D_1 dans $D/D_1' = \mathscr{R}(\delta_2')$ est d'indice t^k puisque $D_1 \oplus D_1'$ est d'indice t^k dans D. On en déduit l'identité $\delta_1 = x^k\delta_2'$. Symétriquement, on a $\delta_1' = x^k\delta_2$. De plus, le fait que D' soit scindé se traduit par la nullité des images de h (élément de $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ relevant $\mathscr{L}$) dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ et h' (élément de $H^1(\delta_1'(\delta_2')^{-1})$ relevant $\mathscr{L}'$) dans $H^1(x^{-k}\delta_1'(\delta_2')^{-1})$. D'après le théorème 2.22, cela se traduit par

- $w(s) \in \{1, \dots, k\}$ et $\mathscr{L} = \infty$ si $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{w(s)}|x|$,
- $w(s') \in \{1, \dots, k\}$ et $\mathscr{L}' = \infty$ si $\delta_1'(\delta_2')^{-1} = x^{w(s')}|x|$.

Des relations $\delta_1 = x^k\delta_2'$ et $\delta_1' = x^k\delta_2$, on déduit les relations $w(\delta_1) = k + w(\delta_2')$ et $w(\delta_2) = -k + w(\delta_1')$, puis $w(s) + w(s') = 2k$. Comme $w(s) \leqslant k$ et $w(s') \leqslant k$ d'après ce qui précède, cela implique $w(s) = w(s') = k$. On en déduit le résultat, les relations $w(\delta_1') = w(\delta_1)$ et $w(\delta_2') = w(\delta_2)$ découlant immédiatement des formules précédentes.

Remarque 3.8. — Si $u(s) > 0$, si $\delta = \delta_1\delta_2^{-1}$ n'est pas de la forme $|x|x^i$, avec $i \in \mathbf{N} - \{1\}$, si $a \in \mathscr{R}^+$ est la solution de $(\delta(p)\varphi - 1)a = (1+T)$, et si $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ est la solution de $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = (1+T)$, alors, d'après le cor. 2.10, le $\mathscr{R}$-module $D(s)$ admet une base f_1, f_2 dans laquelle les actions de φ et Γ sont données par

$$\begin{aligned} \gamma(f_1) &= \delta_1(\gamma)f_1, \quad & \gamma(f_2) &= \delta_2(\gamma)(f_2 + af_1),\\ \varphi(f_1) &= \delta_1(p)f_1, \quad & \varphi(f_2) &= \delta_2(p)(f_2 + bf_1). \end{aligned}$$

3.4. Le module $D(s,k)$

Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}^+$, et si k est un entier $\geqslant 1$, on note $D(s,k)$ le sous-(φ,Γ)-module $t^{-k}\mathscr{R}(\delta_1) + D(s)$ de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ et on pose $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$. Ceci fait de $D(s,k)$ une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(x^{-k}\delta_1)$ dont la classe n'est autre que $\iota_k(h) \in H^1(\delta)$ si $h \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est un relèvement de $\mathscr{L}$. L'intérêt d'introduire $D(s,k)$ est que, si $k \gg 0$, alors $v_p(\delta(p)) < 0$, ce qui permet d'utiliser la prop. 2.6 pour obtenir une description « concrète » de $D(s,k)$ puis de $D(s)$.

Proposition 3.9. — *Soient $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+$ et k un entier $> 2u(s)$ tels que $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$. Soit $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$.*

(i) *Il existe λ, A, B et C, où*

- *λ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda \neq 0$,*
- *$A \in \mathscr{R}^+$ vérifie $(\delta(p)\varphi - 1)A = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,*
- *$B \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ vérifie $(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,*
- *$C \in \mathscr{R}$ est tel que $A + (\delta(\gamma)\gamma - 1)C \equiv B + (\delta(p)\varphi - 1)C \equiv 0$ mod t^k.*

(ii) *Si λ, A, B et C vérifient les conditions du* (i), *alors $D(s,k)$ possède une base g_1, g_2 dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + Ag_1)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + Bg_1),$$

et telle que $D(s)$ admette $t^k g_1$ et $g_2 + Cg_1$ comme base sur $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Soit $(a,b) \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ dont l'image dans $\mathrm{Proj}(H^1(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est non nulle, ce qui fait que $(t^k a, t^k b)$ représente la classe de $D(s,k)$ dans $H^1(\delta)$, et qu'il existe une base f_1, f_2 de $D(s)$ sur $\mathscr{R}$ dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par

$$\gamma(f_1) = \delta_1(\gamma)f_1, \qquad \gamma(f_2) = \delta_2(\gamma)(f_2 + af_1)$$
$$\varphi(f_1) = \delta_1(p)f_1, \qquad \varphi(f_2) = \delta_2(p)(f_2 + bf_1),$$

D'après la prop. 2.6, il existe alors une mesure λ sur $\mathbf{Z}_p^*$, $A \in \mathscr{R}^+$, et $B \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ tels que l'on ait

$$(\delta(p)\varphi - 1)A = (\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda,$$

et il existe $C \in \mathscr{R}$ tel que

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)C = -A + t^k a \quad \text{et} \quad (\delta(p)\varphi - 1)C = -B + t^k b.$$

De plus, ι_k est injective, ce qui implique que l'image de (A,B) dans $H^1(\delta)$ est non nulle et, d'après la proposition 2.6, cela équivaut à $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\lambda \neq 0$. On en déduit le résultat, en posant $g_1 = t^{-k}f_1$ et $g_2 = f_2 - Ct^{-k}f_1$.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas $w(s) \in \{1, \dots, k\}$, laissé de côté dans la prop. 3.9. Rappelons que, si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $w(\delta) = 0$, et si k est un entier $\geqslant 1$, on a choisi $G(\delta,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = 0$ si $n < N(\delta)$ et $x_n = \delta(p)^n G(\delta)$ si $n \geqslant N(\delta)$. Si $\delta = 1$, on peut prendre $G(\delta,k) = 1$, mais nous aurons plutôt besoin de $G'(1,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = n$ si $n \geqslant 1$, de telle sorte que $(\gamma - 1)G'(1,k) \in t^k\mathscr{R}$ et $(\varphi - 1)G'(1,k) \in -1 + t^k\mathscr{R}$. Rappelons que l'on a aussi choisi $G'(|x|,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\prod_{n\geqslant 1} L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = \log(\zeta_{p^n}e^{t/p^n} - 1)$ si $n \geqslant 1$.

Proposition 3.10. — (i) *Si* $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \cup \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, *si* $k \geqslant w(s)$, *et si* $\delta_1 \neq \delta_2 x^{w(s)}$, *alors* $D(s,k)$ *contient une base* g_1, g_2 *dans laquelle les actions de* Γ *et* φ *sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)g_2$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)g_2,$$

et telle que $D(s)$ *admette* $t^k g_1$, $g_2 - t^{k-w(s)}G(x^{-w(s)}\delta_1\delta_2^{-1}, w(s))g_1$ *comme base sur* $\mathscr{R}$.

(ii) *Si* $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \cup \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, *si* $k \geqslant w(s)$, *et si* $\delta_1 = \delta_2 x^{w(s)}$, *alors* $D(s,k)$ *contient une base* g_1, g_2 *dans laquelle les actions de* Γ *et* φ *sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)g_2$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + t^{k-w(s)}g_1),$$

et telle que $D(s)$ *admette* $t^k g_1$, $g_2 - t^{k-w(s)}G'(1, w(s))g_1$ *comme base sur* $\mathscr{R}$.

(iii) *Si* $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ *(et donc* $\delta_1 = \delta_2|x|x^{w(s)}$*), et si* $k \geqslant w(s)$, *alors* $D(s,k)$ *contient une base* g_1, g_2 *dans laquelle les actions de* Γ *et* φ *sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + t^{k-w(s)}(\gamma - 1)(\log T - G'(|x|, w(s)))g_1)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + t^{k-w(s)}(p^{-1}\varphi - 1)(\log T - G'(|x|, w(s)))g_1)$$

et telle que $D(s)$ *admette* $t^k g_1$, $g_2 - \frac{p}{p-1}\mathscr{L} \cdot t^{k-w(s)}G(|x|, w(s))g_1$ *comme base sur* $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Dans tous les cas, posons $\delta = \delta_1\delta_2^{-1}$. Le (i) est alors une traduction du fait que l'application de connexion de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ dans $H^1(\delta)$ est un isomorphisme et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $t^{k-w(s)}G(x^{-w(s)}\delta_1\delta_2^{-1}, w(s))$. De même, le (iii) est une traduction de la définition de l'invariant $\mathscr{L}$ (cf. prop. 2.19 et (iii) du th. 2.22) ; le (ii) quant-à-lui est une traduction du fait que l'application ι_k envoie $H^1(\delta)$ dans la droite engendrée par $(t^{k-w(s)}, 0)$ de $H^1(x^{-k}\delta)$.

3.5. Le (φ, Γ)-module $\Delta(s)$

Si $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, on note $\Delta(s)$ le (φ,Γ)-module $\mathbf{\Delta}(D(s))$. C'est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ et notre but est d'en donner une description plus « concrète ». Nous nous restreindrons[6] au cas où il existe un entier $k > 2u(s)$ tel que $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$, et nous reprenons les notations de la proposition 3.9 ; en particulier, $B \in \mathscr{E}^\dagger$ et $C \in \mathscr{R}$.

Proposition 3.11. — *Si* $x = x_1 g_1 + x_2 g_2 \in D(s,k)$, *alors* $x \in \Delta(s)$ *si et seulement si* x *vérifie les deux conditions suivantes*

(i) $x_1 - Cx_2 \equiv 0$ *mod* t^k *;*

(ii) x_1 *est d'ordre* $k - u(s)$ *et* x_2 *est d'ordre* $u(s)$.

Démonstration. — La condition (i) traduit juste l'appartenance de x à $D(s)$. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que si $x \in D(s)$, alors $x \in \Delta(s)$ si et seulement si x vérifie (ii). Pour cela, on utilise la caractérisation de $\Delta(s)$ comme l'ensemble des $x \in D(s)$ tels que la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ soit bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ ou, ce qui revient au même, dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D(s,k)$.

[6] On pourrait utiliser la proposition 3.10 pour obtenir des résultats du même type dans le cas $w(s)$ entier $\geqslant 1$, mais nous n'en aurons pas besoin.

En posant $\alpha_1 = p^k\delta_1(p)^{-1}$ et $\alpha_2 = \delta_2(p)^{-1}$, on obtient

$$\varphi(g_1) = \alpha_1^{-1}g_1 \quad \text{et} \quad \varphi(g_2) = \alpha_2^{-1}(g_2 + Bg_1).$$

on en tire, par récurrence sur n, les formules

$$\varphi^{-n}(g_1) = \alpha_1^n g_1 \quad \text{et} \quad \varphi^{-n}(g_2) = \alpha_2^n g_2 - (\alpha_2^{n-1}\alpha_1\varphi^{-1}(B) + \cdots + \alpha_1^n\varphi^{-n}(B))g_1.$$

Maintenant, si $x = x_1g_1 + x_2g_2$, et $\varphi^{-n}(x) = x_{1,n}g_1 + x_{2,n}g_2$, la formule ci-dessus nous fournit les identités

$$x_{1,n} = \alpha_1^n\varphi^{-n}(x_1) - \alpha_2^n\varphi^{-n}(x_2)\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi^{-1}(B) + \cdots + \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\varphi^{-n}(B)\Big) \quad \text{et} \quad x_{2,n} = \alpha_2^n\varphi^{-n}(x_2).$$

Par ailleurs, comme $v_p(\alpha_1) = k - u(s) \geqslant u(s) = v_p(\alpha_2)$, et comme $B \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, la suite de terme général

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi^{-1}(B) + \cdots + \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\varphi^{-n}(B)$$

est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$. Les conditions suivantes sont donc équivalentes :

- la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}} D(s,k)$;
- les suites de terme général $x_{1,n}$ et $x_{2,n}$ sont bornées dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$;
- les suites de terme général $\alpha_1^n\varphi^{-n}(x_1)$ et $\alpha_2^n\varphi^{-n}(x_2)$ sont bornées dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$.

Comme $v_p(\alpha_1) \geqslant 0$ et $v_p(\alpha_2) \geqslant 0$, la dernière condition est équivalente, d'après la proposition A.13, à la condition

- x_1 est d'ordre $v_p(\alpha_1) = k - u(s)$ et x_2 est d'ordre $v_p(\alpha_2) = u(s)$.

Ceci permet de conclure.

4. Application aux représentations galoisiennes

4.1. Définition des représentations trianguline

Définition 4.1. — Une L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est dite *trianguline* si $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ est triangulable.

Si $s = (\delta_1, \delta_2, h) \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond par l'équivalence de catégories de la prop. 1.7.

Remarque 4.2. — (i) Par construction, la représentation $V(s)$ est trianguline.

(ii) Réciproquement, il résulte de la définition et de la prop. 3.5, qu'une représentation trianguline de dimension 2, qui n'est pas somme directe de deux caractères, est isomorphe à $V(s)$ pour un certain $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Par ailleurs, on a $V(s) \cong V(s')$ si et seulement si $D(s) \cong D(s')$ d'après la prop. 1.7. Ceci permet d'utiliser la prop. 3.7 pour obtenir une classification complète des représentations triangulines de dimension 2.

(iii) Des exemples naturels de représentations triangulines de dimension 2 sont fournis par les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes. En effet, Kisin **[22]** a montré qu'elles satisfont la propriété (i) de la prop. 4.3 ci-dessous (avec $\eta = 1$).

Proposition 4.3. — *Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ et $\alpha \in L^*$ tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} \neq 0$;*

(ii) *V est trianguline.*

De plus, sous ces conditions, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contienne un sous-(φ, Γ)-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$, avec

$$\delta(x) = x^k \eta^{-1}(x|x|)\alpha^{v_p(x)}.$$

Démonstration. — Soit V une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 telle qu'il existe $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ et $\alpha \in L^*$ tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} \neq 0$. D'après la prop. 1.8, quitte à multiplier η par χ^{-k} et α par p^k pour $k \gg 0$, on peut supposer que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))^{\Gamma=1,\varphi=\alpha}$. Le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))^{\Gamma=1,\varphi=\alpha}$ est alors non nul et toute L-droite qu'il contient est stable par φ et fixe par Γ. Choisissons une telle droite. Le sous-$\mathscr{R}$-module de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))$ qu'elle engendre est alors stable par φ et Γ, et $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient un sous-(φ, Γ)-module D_1 de rang 1 sur $\mathscr{R}$. Le lemme 3.2 montre que l'on peut supposer D_1 saturé. Mais alors $D_2 = D/D_1$ est aussi de rang 1 et donc D est une extension de deux (φ, Γ)-modules de rang 1 ; il est donc triangulable, ce qui démontre l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Réciproquement, si V est trianguline, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient un sous-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$. Il suffit alors de prendre $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ défini par $\eta(g) = \delta^{-1}(\chi(g))$ pour que $(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta)))^{\Gamma=1,\varphi=\delta(p)}$ soit non nul. Ceci permet de conclure.

4.2. Poids de Hodge-Tate de $V(s)$

Dans tout ce qui suit, $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, et notre but est d'étudier en détail la représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On remarquera que, si η est un caractère unitaire de $\mathbf{Q}_p^*$ (que l'on voit aussi comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), alors

$$V(s) \otimes \eta = V(\eta\delta_1, \eta\delta_2, \mathscr{L}).$$

Le caractère $\delta_1\delta_2$ est unitaire et peut donc être vu comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 4.4. — (i) $\det V(s) = L(\delta_1\delta_2)$.

(ii) $V(s)^* = V(\delta_2^{-1}, \delta_1^{-1}, \mathscr{L})$.

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $\det D(s) = \mathscr{R}(\delta_1\delta_2)$ et le (ii) de ce que $V(s)^* = V(s) \otimes (\det V(s))^{-1}$.

Proposition 4.5. — *Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$.*

Démonstration. — Il existe une base f_1, f_2 de $D(s)$ dans laquelle l'action de $\gamma \in \Gamma$ est donnée par

$$\gamma(f_1) = \delta_1(\gamma)f_1 \quad \text{et} \quad \gamma(f_2) = \delta_2(\gamma)f_2 + A_\gamma f_1,$$

avec $A_\gamma \in \mathscr{R}$. Si $n \gg 0$, alors $\varphi^{-n}(f_1)$ et $\varphi^{-n}(f_2)$ convergent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V(s)$ et $g_1 = \theta(\varphi^{-n}(f_1))$, $g_2 = \theta(\varphi^{-n}(f_2))$ forment une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen},n}$ sur L_n. On a alors

$$\gamma(g_1) = \delta_1(\gamma)g_1 \quad \text{et} \quad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)g_2 + \theta(\varphi^{-n}(A_\gamma))g_1,$$

ce qui fait que dans la base g_1, g_2, l'opérateur $\Theta_{\mathrm{Sen}} = \lim_{\gamma\to 1} \frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ de Sen est triangulaire supérieur avec $w(\delta_1), w(\delta_2)$ comme coefficients diagonaux. Ceci permet de conclure.

Proposition 4.6. — (i) *Si $w(\delta_1) = w(\delta_2)$ et $\delta_1 \neq \delta_2$, alors Θ_{Sen} n'est pas semi-simple.*
(ii) *Si $\delta_1 = \delta_2$, alors Θ_{Sen} est semi-simple si et seulement si $\mathscr{L} = \infty$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on peut se ramener au cas $w(\delta_1) = w(\delta_2) = 0$, et même s'arranger pour que δ_1 soit trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si Θ_{Sen} est semi-simple, cela implique alors $\Theta_{\mathrm{Sen}} = 0$, et un théorème de Sen ([**27**] ; cf. aussi [**2**]) implique que l'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers un quotient fini. En particulier, $W_{\mathbf{Q}_p}$ agit unitairement sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ qui contient le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))^{\varphi=\delta_1(p)}$ qui est non nul, car il contient, d'après la prop. 1.8, le module $(D(s)^\Gamma)^{\varphi=\delta_1(p)}$ qui, lui-même, contient $L(\delta_1)$ puisque δ_1 est trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$. Ceci implique que $u(s) = v_p(\delta_1(p)) = 0$ et donc que $V(s)$ est une extension de $L(\delta_2)$ par $L(\delta_1)$. On peut donc trouver une base e_1, e_2 de $V(s) \otimes \delta_2^{-1}$ dans laquelle l'action de $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donnée par

$$g(e_1) = \delta(g)e_1 \quad \text{et} \quad g(e_2) = e_2 + c(g)e_1,$$

où l'on a posé $\delta = \delta_1\delta_2^{-1}$ et $g \mapsto c(g)$ est un 1-cocycle continu sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $L(\delta)$, et qui est trivial sur un sous-groupe H d'indice fini de $I_{\mathbf{Q}_p}$ contenu dans $\ker \delta_2$ (la restriction de δ_2 à $I_{\mathbf{Q}_p}$ est d'image finie car δ_2 est localement constant sur $\mathbf{Z}_p^*$).

Si $\delta \neq 1$, on peut trouver $f \in W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ avec $\deg(f) = 1$, tel que $\delta(f) \neq 1$. Choisissons un tel f et soit $c = \frac{c(f)}{\delta(f)-1}$. Le cocycle $g \mapsto c'(g) = c(g) - (\delta(g) - 1)c$ est alors trivial sur le groupe engendré topologiquement par H et f, et comme H est d'indice fini dans $I_{\mathbf{Q}_p}$ et f engendre topologiquement $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/I_{\mathbf{Q}_p}$, cela montre que $g \mapsto c'(g)$, qui est cohomologue à $g \mapsto c(g)$, est trivial sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme $V(s) \otimes \delta_2^{-1}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, cela implique que $V(s) \otimes \delta_2^{-1}$, et donc aussi $V(s)$, est somme de deux caractères, ce que l'on avait exclu. On en déduit le (i). Le (ii) quant à lui n'est que la définition de l'invariant $\mathscr{L}$ pour $h \in H^1(\delta)$ quand $\delta = 1$.

4.3. Irréductibilité de $V(s)$

Proposition 4.7. — *Si $u(s) = 0$, alors $V(s)$ est une extension non triviale de $L(\delta_2)$ par $L(\delta_1)$; en particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.*

Démonstration. — C'est une simple conséquence de l'équivalence de catégories de la proposition 1.5 entre (φ, Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 4.8. — (i) *$V(s)$ est irréductible si et seulement si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$.*
(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, alors $V(s)$ est une extension non triviale de $L(x^{-w(s)}\delta_1)$ par $L(x^{w(s)}\delta_2)$; c'est donc la tordue (par un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) d'une représentation quasi-ordinaire (i.e. devenant ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$).*

Démonstration. — Le cas $u(s) = 0$ a été traité dans la proposition 4.7. Nous supposerons donc $s \in \mathscr{S}_*$ dans ce qui suit. Comme $V(s)$ est de dimension 2, elle n'est pas irréductible si et seulement si elle possède une sous-représentation de dimension 1. Via l'équivalence de catégories de la proposition 1.5 entre (φ, Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, cela équivaut à l'existence d'un sous-(φ, Γ)-module de $D(s)$, de rang 1 et de pente 0. Le résultat suit alors de la remarque 3.6.

Lemme 4.9. — *$D(s)$ contient des (φ,Γ)-modules de rang 1 autres que les $t^k\mathscr{R}(\delta_1)$, pour $k\in\mathbf{N}$, si et seulement si $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$, $\delta_1\neq\delta_2x^{w(s)}$ et $\mathscr{L}=\infty$. De plus, dans ce dernier cas, ces (φ,Γ)-modules sont de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, pour k entier $\geqslant w(s)$.*

Démonstration. — Soit $D_1\subset D$ un (φ,Γ)-module de rang 1 qui n'est pas de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_1)$, pour $k\in\mathbf{N}$. Alors D_1 n'est pas colinéaire à $\mathscr{R}(\delta_1)$ et donc la projection de $D(s)$ sur $\mathscr{R}(\delta_2)$ induit un isomorphisme de D_1 sur un sous-(φ,Γ)-module de $\mathscr{R}(\delta_2)$. Un tel module est de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$ et $D(s)$ contient donc un sous-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta_1)\oplus t^k\mathscr{R}(\delta_2)$ qui est scindé, ce qui se traduit par la nullité de l'image par ι_k dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ de $h\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ relevant $\mathscr{L}$. Le lemme est alors une conséquence directe du th. 2.22.

Proposition 4.10. — *Si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe deux caractères η_1, η_2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\mathscr{O}_L^*$, tels que $w(\eta_1)-w(\eta_2)\notin\mathbf{Z}$ et tels que $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_1))\neq 0$ et $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_2))\neq 0$;*

(ii) *V est somme de deux caractères et la différence de ses poids de Hodge-Tate n'est pas un entier.*

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate ; montrons la réciproque. Si η est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la condition $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta))\neq 0$ implique que l'un des poids de Hodge-Tate de V diffère de $-w(\eta)$ par un entier. La condition $w(\eta_1)-w(\eta_2)\notin\mathbf{Z}$ implique donc que la différence des poids de Hodge-Tate de V n'est pas un entier et donc que ni $V(\eta_1)$ ni $V(\eta_2)$ ne sont de Hodge-Tate, ni, a fortiori, cristallines. Ceci implique que $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_1))$ et $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_2))$ sont de dimension 1. D'après la proposition 4.3, $D=\mathbf{D}_{\rm rig}(V)$ contient alors des sous-(φ,Γ)-modules saturés isomorphes à $\mathscr{R}(\theta_1)$ et $\mathscr{R}(\theta_2)$, avec

$$\theta_1(x)=x^{k_1}\eta_1^{-1}(x|x|)\alpha_1^{v_p(x)}\quad\text{et}\quad\theta_2(x)=x^{k_2}\eta_2^{-1}(x|x|)\alpha_2^{v_p(x)},$$

où $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$, et α_1,α_2 sont les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_1))$ et $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_2))$ respectivement. Ces deux modules ne sont pas inclus dans un même sous-(φ,Γ)-module de rang 1 de D car $w(\theta_1)-w(\theta_2)=k_1-w(\eta_1)-k_2+w(\eta_2)$ n'est pas un entier.

Maintenant, si V n'est pas somme de deux caractères, alors $D\cong D(s)$ pour un certain $s\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\rm ncl}$; la différence des poids de Hodge-Tate de V est alors $\pm w(s)$ d'après la prop. 4.5 et donc $w(s)\notin\mathbf{Z}$, ce qui conduit à une contradiction puisque, d'après le lemme 4.9, si $D(s)$ contient des sous-(φ,Γ)-modules de rang 1 non colinéaires, alors $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$. Ceci permet de conclure.

4.4. Représentations potentiellement semi-stables et représentations de Weil-Deligne

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, et si K_0 est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, un L-$({\rm Gal}(K/\mathbf{Q}_p),\varphi,N)$-module, est un $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}K_0$-module libre de rang fini muni

- d'une action L-linéaire et K_0-semi-linéaire de φ ;
- d'une action L-linéaire et K_0-semi-linéaire de ${\rm Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ commutant à celle de φ ;
- d'un opérateur $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}K_0$-linéaire nilpotent $N:D\to D$ commutant à ${\rm Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ et vérifiant $N\varphi=p\varphi N$

Rappelons qu'une Λ-représentation D du groupe de Weil-Deligne de $\mathbf{Q}_p$ (appelée encore Λ-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module) est un Λ-module libre de rang fini muni

- d'un morphisme de groupes $\rho : W_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{GL}(D)$ dont le noyau contient un sous-groupe d'indice fini de $I_{\mathbf{Q}_p}$;
- d'un opérateur nilpotent $N : D \to D$ tel que $N\rho(g) = p^{-\deg g}\rho(g)N$ si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$.

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ et D est un $(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$-module, on peut aussi voir D comme un $(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module en tordant l'action de $g \in W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ par $\varphi^{-\deg g}$, ce qui tue la semi-linéarité de l'action de g sur K_0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui devient semi-stable sur K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ est un L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$-module. De plus, l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ munit $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ d'une filtration admissible par des sous $L \otimes K$-modules libres[(7)]. En utilisant la recette décrite ci-dessus, cela permet de voir $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ comme un $(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible.

Remarque 4.11. — Dans le cas particulier où K est une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$, cas auquel nous allons être confronté dans cet article, une représentation qui devient semi-stable sur K devient aussi semi-stable sur $K \cap \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ qui est totalement ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$. Dans ce qui précède, on a alors $K_0 = \mathbf{Q}_p$ et donc tout est déjà linéaire. De plus, l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ se factorise à travers $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Q}_p^*$, et on retrouve la structure de L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$ en définissant l'action de φ comme étant celle de $p \in \mathbf{Q}_p^* \cong W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$.

J'ignore s'il y a une recette du même type dans le cas général.

Remarque 4.12. — On fera attention au fait que, si V est semi-stable et donc si $I_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, les valeurs propres d'un frobenius de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un élément de degré 1) sont *les inverses de celles de* φ.

4.5. Cristallinité de $V(s)$

Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}$, et si $\alpha, \beta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, on note $D_{a,b,\alpha,\beta}$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré défini par $D_{a,b,\alpha,\beta} = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2$, et

- $Ne_1 = Ne_2 = 0$;
- $\begin{cases} g(e_1) = \alpha(g)e_1 \text{ et } g(e_2) = \beta(g)e_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ g(e_1) = \alpha(g)e_1 \text{ et } g(e_2) = \alpha(g)(e_2 - (\deg g)e_1) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$;
- $\mathrm{Fil}^i(L_\infty \otimes_L D_{a,b,\alpha,\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > -a, \\ L_\infty \cdot (G(\beta\alpha^{-1})e_1 + e_2) & \text{si } -b < i \leqslant -a \text{ et } \alpha \neq \beta, \\ L_\infty \cdot e_2 & \text{si } -b < i \leqslant -a \text{ et } \alpha = \beta, \\ D_{a,b,\alpha,\beta} & \text{si } i \leqslant -b. \end{cases}$

Ce module est admissible si et seulement si

$$-b \leqslant v_p(\alpha(p)), v_p(\beta(p)) \leqslant -a \quad \text{et} \quad v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -a - b.$$

On note $S^{\mathrm{cris}}(L)$ (resp. $S^{\mathrm{ord}}(L)$) l'ensemble des (a, b, α, β), où $a, b \in \mathbf{Z}$ vérifient $a \leqslant b$ et $\alpha, \beta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, et vérifient $v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -a - b$ et $-b <$

[(7)]On prendra garde au fait que cette filtration n'est, en général, pas libre sur $L \otimes K$, si on considère des L-représentations de $\mathscr{G}_F$, où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, au lieu de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

$v_p(\alpha(p)), v_p(\beta(p)) < -a$ (resp. $v_p(\alpha(p)) = -b$ et $v_p(\beta(p)) = -a$, ou $v_p(\alpha(p)) = -a$ et $v_p(\beta(p)) = -b$). Si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$, on note $V_{a,b,\alpha,\beta}$ la L-représentation potentiellement cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont $D_{a,b,\alpha,\beta}$ est le $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}$. Cette représentation devient, par construction, cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$; elle est irréductible si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L)$ et réductible (quasi-ordinaire) si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{ord}}(L)$.

Proposition 4.13. — *Si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$, la représentation $V_{a,b,\alpha,\beta}$ est trianguline. Plus précisément, on a*

$$V_{a,b,\alpha,\beta} \cong V(x^b\alpha, x^a\beta, \infty) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty).$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, α et β jouant des rôles symétriques, il suffit de démontrer que $V(s) \cong V_{a,b,\alpha,\beta}$, si $s = (x^b\beta, x^a\alpha, \infty)$. Pour cela, il suffit de calculer le module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ et de vérifier que ce module est isomorphe à $D_{a,b,\alpha,\beta}$ en tant que $W_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré.

Remarquons aussi que, si $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$V_{a,b,\alpha,\beta}\otimes(x|x|)^k \cong V_{a+k,b+k,|x|^k\alpha,|x|^k\beta} \quad \text{et} \quad V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty)\otimes(x|x|)^k \cong V(x^{b+k}|x|^k\beta, x^{a+k}|x|^k\alpha, \infty),$$

ce qui permet de se ramener au cas $a = 0$.

D'après les (i) et (ii) de la prop. 3.10, on peut trouver une base g_1, g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ dans laquelle l'action de γ est donnée par

$$\gamma(g_1) = \beta(\gamma)g_1 \quad \text{et} \quad \gamma(g_2) = \alpha(\gamma)g_2,$$

celle de φ par

$$\begin{cases} \varphi(g_1) = \beta(p)g_1,\ \varphi(g_2) = \alpha(p)g_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \varphi(g_1) = \beta(p)g_1,\ \varphi(g_2) = \beta(p)(g_2 + g_1) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

et telle que $D(s)$ admette $t^b g_1,\ g_2 - Hg_1$ comme base sur $\mathscr{R}$, où l'on a posé $H = G(\beta\alpha^{-1}, b)$ (resp. $H = G'(1, b)$) si $\alpha \neq \beta$ (resp. si $\alpha = \beta$).

Dans tous les cas g_1, g_2 est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ car $\alpha \circ \chi$ et $\beta \circ \chi$ sont des caractères d'ordre fini de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et les formules ci-dessus montre que, si $\sigma \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$, alors[(8)],

$$\begin{cases} \sigma(g_1) = \beta(\sigma)g_1,\ \sigma(g_2) = \alpha(\sigma)g_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \sigma(g_1) = \beta(\sigma)g_1,\ \sigma(g_2) = \beta(\sigma)(g_2 - \deg(\sigma)g_1) & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Dans tous les cas, les $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-modules $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ et $D_{a,b,\alpha,\beta}$ sont isomorphes, et il n'y a plus qu'à identifier les filtrations[(9)]. Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont 0 et $b > 0$; la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(s)) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ est donc complètement déterminée par la donnée du Fil^0 qui est une droite. Un élément x de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ est dans le Fil^0 si et seulement si $\iota_n(\varphi^n(x)) \in \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s))$ pour tout $n \gg 0$. Par ailleurs, comme

$$\iota_n(H) \equiv \begin{cases} (\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n G(\beta\alpha^{-1}) & \mod t^b L_n[[t]] \text{ si } \alpha \neq \beta, \\ n & \mod t^b L_n[[t]] \text{ si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

---

(8) On rappelle que $\delta(\sigma) = \delta(\chi(\sigma))\delta(p)^{-\deg(\sigma)}$, si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, vu comme caractère de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$.

(9) Cela peut se faire sans aucun calcul : ce que nous avons fait jusque-là prouve que $V(s)$ est cristalline ; la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s)) \cong D_{a,b,\alpha,\beta}$ est donc admissible, et il n'y a, à isomorphisme près, qu'une seule filtration admissible sur $D_{a,b,\alpha,\beta}$. Les calculs qui suivent sont juste là pour rassurer l'auteur sur la cohérence de la théorie.

on a

$$\iota_n(g_2) \equiv \begin{cases} (\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n G(\beta\alpha^{-1})\iota_n(g_1) & \text{mod } \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s)) \text{ si } \alpha \neq \beta, \\ n\iota_n(g_1) & \text{mod } \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s)) \text{ si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Comme de plus, si $x_1, x_2 \in L_\infty$,

$$\varphi(x_1 g_1 + x_2 g_2) = \begin{cases} \alpha(p)^n((\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n x_1 g_1 + x_2 g_2) & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \beta(p)^n((x_1 + n x_2)g_1 + x_2 g_2) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$$

on obtient la congruence suivante modulo $\mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes D(s))$:

$$\iota_n(\varphi^n(x_1 g_1 + x_2 g_2)) \equiv \begin{cases} \beta(p)^n(x_1 - G(\beta\alpha^{-1})x_2)\iota_n(g_1) & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \beta(p)^n x_1 \iota_n(g_1) & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

On en déduit le fait que $\mathrm{Fil}^0(L_\infty \otimes_L \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s)))$ est la droite des $x_1 g_1 + x_2 g_2$, où $x_1, x_2 \in L_\infty$ vérifient $x_1 - G(\beta\alpha^{-1})x_2 = 0$ (resp. $x_1 = 0$) si $\alpha \neq \beta$ (resp. si $\alpha = \beta$). Ceci permet de conclure.

Proposition 4.14. — *Si D est un $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible de dimension 2 qui n'est pas somme de deux $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module admissibles de dimension 1, alors il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$ tel que $D \cong D_{a,b,\alpha,\beta}$ si et seulement si l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ se triangule sur L* (et donc se factorise à travers $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$) *;*

Démonstration. — Il suffit de l'écrire.

Remarque 4.15. — Il est immédiat que

• $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}(L)$ si et seulement si il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L)$ vérifiant $b \geqslant a + 1$ et un caractère $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes \delta$;

• $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}(L)$ si et seulement si il existe $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{ord}}(L)$ et un caractère $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes \delta$;

Corollaire 4.16. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation irréductible devenant cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation devenant ordinaire sur extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

Remarque 4.17. — La réciproque du (ii) est vraie et ce qui empèche celle du (i) de l'être aussi (outre le cas d'une somme de deux caractères) est juste le fait que les valeurs propres de φ n'ont aucune raison, a priori, d'appartenir à L (mais elles appartiennent en tout cas à une extension quadratique de L).

4.6. Semi-stabilité de $V(s)$

Si $a < b$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}$, si $\alpha \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ est localement constant et si $\mathscr{L} \in L$, on note $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré défini par $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2$, et

• $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$;

• $g(e_1) = \alpha(g)e_1$ et $g(e_2) = p^{\deg g}\alpha(g)e_2$;

• $\mathrm{Fil}^i(L_\infty \otimes_L D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > -a, \\ L_\infty \cdot (e_1 - \mathscr{L}e_2) & \text{si } -b < i \leqslant -a, \\ D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} & \text{si } i \leqslant -b. \end{cases}$

Ce module est admissible si et seulement si $v_p(\alpha(p)) = (-a-b+1)/2$. On note $S^{\rm st}(L)$ l'ensemble des $(a,b,\alpha,\mathscr{L})$, où $a,b\in\mathbf{Z}$ vérifient $a<b$, où $\mathscr{L}\in L$, et où $\alpha\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $v_p(\alpha(p)) = (-a-b+1)/2$. Si $(a,b,\alpha,\mathscr{L})\in S^{\rm st}(L)$, on note $V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ la L-représentation potentiellement semi-stable de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ est le $\mathbf{D}_{\rm pst}$. Cette représentation devient, par construction, semi-stable sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$; c'est la tordue d'une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par un caractère d'ordre fini ; elle est irréductible si $b-a\geqslant 2$ et réductible (tordue d'une ordinaire par un caractère d'ordre fini) si $b=a+1$.

Proposition 4.18. — *Si $(a,b,\alpha,\mathscr{L})\in S^{\rm st}(L)$, la représentation $V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ est trianguline. Plus précisément,*

$$V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}\cong V(x^b|x|\alpha, x^a\alpha,\mathscr{L}).$$

Démonstration. — Remarquons que, si $k\in\mathbf{Z}$ et si $\eta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est unitaire localement constant, on a

$$\begin{aligned} V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}\otimes(x|x|)^k\eta &\cong V_{a+k,b+k,|x|^k\alpha\eta,\mathscr{L}},\\ V(x^b\beta,x^a\alpha,\mathscr{L})\otimes(x|x|)^k\eta &\cong V(x^{b+k}|x|^k\beta\eta, x^{a+k}|x|\alpha\eta,\mathscr{L}),\end{aligned}$$

ce qui permet de se ramener au cas $b=0$ et $\alpha(x)=u^{v_p(x)}|x|^{-1}$. Soit donc $s=(|x|\alpha,x^a\alpha,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+^{\rm st}$. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que $\mathbf{D}_{\rm st}(V(s))$ est isomorphe à $D_{a,0,\alpha,\mathscr{L}}$ en tant que $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré.

Soit $k=w(s)=-a>0$. D'après la prop. 3.10 (avec $\mu=1$ et $\lambda=-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}$) on peut trouver une base f_1,f_2 de $D(s)$ dans laquelle les actions de φ et γ sont données par

$$\begin{aligned}\gamma(f_1)&=f_1,\quad \gamma(f_2)=\chi(\gamma)^{-k}\big(f_2+t^{-k}(\gamma-1)(-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k)+\log T-G'(|x|,k))f_1\big),\\ \varphi(f_1)&=uf_1,\quad \varphi(f_2)=pu\,(f_2+t^{-k}(p^{-1}\varphi-1)(-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k)+\log T-G'(|x|,k))f_1).\end{aligned}$$

Le module $\mathbf{D}_{\rm st}(V(s))$ est alors $L\cdot e_1\oplus L\cdot e_2$, avec $e_1=f_2+(\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k)-\log T+G'(|x|,k))f_1$ et $e_2=\frac{p-1}{p}f_1$. Les actions de φ et N sont données par

$$\varphi(e_1)=pu\,e_1,\ \varphi(e_2)=u\,e_2,\ Ne_1=e_2,\ Ne_2=0.$$

Le module $\mathbf{D}_{\rm st}(V(s))$ est donc, en tant que $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module, isomorphe à $D_{a,0,\alpha,\mathscr{L}}$. Il ne reste plus qu'à identifier la filtration qui est complètement déterminée par la droite Fil^0.

Par construction, $\iota_n(\log T-G'(|x|,b))\in t^kL_n[[t]]$ et $\iota_n(G(|x|,b))\in p^{-n}+t^kL_n[[t]]$, pour tout $n\geqslant 1$. On en déduit que $\iota_n(e_1)\equiv\frac{p}{p-1}\mathscr{L}p^{-n}\iota_n(f_1) \bmod \mathrm{Fil}^k(L_n((t))\otimes D(s))$.

Maintenant, $x\in\mathrm{Fil}^k\mathbf{D}_{\rm st}(V(s))$ si et seulement si $\iota_n(\varphi^n(x))\in\mathrm{Fil}^k(L_n((t))\otimes D(s))$ quel que soit n assez grand. Si $x_1,x_2\in L$, on a, d'après ce qui précède,

$$\iota_n(\varphi^n(x_1e_1+x_2e_2))=u^n(p^nx_1\iota_n(e_1)+x_2\iota_n(e_2))\equiv u^n(x_1\frac{p}{p-1}\mathscr{L}+x_2\frac{p}{p-1})\iota_n(g_1)$$

mod $\mathrm{Fil}^k(L_n((t))\otimes D(s))$, ce qui fait que $\mathrm{Fil}^k\mathbf{D}_{\rm st}(V(s))$ est la droite d'équation $\mathscr{L}x_1+x_2=0$. Ceci permet de conclure (vu que $k=-a$).

Remarque 4.19. — Gardons les notations de la démonstration précédente. Soient

$$g_1=t^{-k}\frac{p}{p-1}f_1\quad\text{et}\quad g_2=f_2+t^{-k}\big(\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,k)+G'(|x|,k)\big)f_1.$$

On a alors

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}g_1,\quad \gamma(g_2)=\chi(\gamma)^{-k}(g_2+(\gamma-1)\frac{p-1}{p}\log T\,g_1)$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}ug_1,\quad \varphi(g_2)=p^{1-k}u(g_2+(p^{-1}\varphi-1)\frac{p-1}{p}\log T\,g_1),$$

et $D(s)$ est le sous-$\mathscr{R}$-module de $\mathscr{R}g_1\oplus\mathscr{R}g_2$ engendré par t^kg_1 et $g_2-\big(\mathscr{L}G(|x|,k)+\frac{p-1}{p}G'(|x|,k)\big)g_1$. Autrement dit, $D(s)$ est l'ensemble des $x_1g_1+x_2g_2$ avec $x_1,x_2\in\mathscr{R}$, et $x_1+\big(\mathscr{L}G(|x|,k)+\frac{p-1}{p}G'(|x|,k)\big)\equiv 0 \bmod t^k$. De plus,

$$\mathscr{L}G(|x|,k)+\frac{p-1}{p}(G'(|x|,k)-\log T)-p^{-n}\mathscr{L}\quad\text{et}\quad \frac{p-1}{p}(\log T-\log_{\mathscr{L}}T)+p^{-n}\mathscr{L}$$

ont un zéro d'ordre k en $\eta-1$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\boldsymbol{\mu}_{p^{n-1}}$.

En posant $C=-\frac{p-1}{p}\log_{\mathscr{L}}T$, $B=(1-p^{-1}\varphi)C$, et $A=(1-\gamma)C$, en remarquant que $k=w(s)=2u(s)+1$, et que $u=\delta_1(p)$, et $p^{1-k}u=\delta_2(p)$, cela permet de démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.20. — *Si $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$, il existe une base g_1,g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}]\otimes D(s)$ dans laquelle l'action de φ et Γ est donnée par*

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1,\quad \gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)(g_2+\chi(\gamma)^{-k}A\,g_1)$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}\delta_1(p)g_1,\quad \varphi(g_2)=\delta_2(p)(g_2+B\,g_1),$$

et $z_1g_1+z_2g_2\in\Delta(s)$, si et seulement si z_1 est d'ordre $\frac{w(s)+1}{2}$, z_2 est d'ordre $\frac{w(s)-1}{2}$, et z_1-Cz_2 a un zéro d'ordre k en $\eta-1$, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}-\boldsymbol{\mu}_{p^{n-1}}$, et $n\gg 0$.

Démonstration. — Tout suit de la discussion précédant la proposition, sauf le rabiot concernant l'ordre de z_1 et z_2, mais celui-ci se démontre exactement comme dans la prop. 3.11. On aurait aussi pu utiliser les résultats de **[2]** pour arriver au résultat.

Proposition 4.21. — *Si D est un ${\rm WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible de dimension 2 sur lequel $N\neq 0$, alors il existe $(a,b,\alpha,\mathscr{L})\in S^{\rm st}(L)$ tel que $D\cong D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$.*

Démonstration. — Il suffit de l'écrire.

Remarque 4.22. — Il est immédiat que $s\in\mathscr{S}_+^{\rm st}(L)$ si et seulement si il existe $(a,b,\alpha,\mathscr{L})\in S^{\rm st}(L)$ et $\delta:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s)\cong V(x^b|x|\alpha,x^a\alpha,\mathscr{L})\otimes\delta$.

Corollaire 4.23. — *Si $s\in\mathscr{S}_+^{\rm st}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation semi-stable non cristalline. Réciproquement, si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ tordue par un caractère d'une représentation semi-stable non cristalline, alors il existe $s\in\mathscr{S}_+^{\rm st}(L)$ tel que $V\cong V(s)$.*

5. Densité des triangulines et des cristallines

5.1. Étude locale de l'espace des triangulines

Lemme 5.1. — *Soit $\delta_0 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $\delta_0(p) \notin p^{\mathbf{Z}}$; alors il existe un voisinage $\mathscr{X}$, pour la topologie p-adique, de δ_0 dans $\widehat{\mathscr{T}}(L)$, tel que les équations*

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = (1+T) \quad \text{et} \quad (\delta(p)\varphi - 1)A = (1+T)$$

aient des solutions dans $(\mathscr{E}^{(0,1]}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}})^{\psi=0}$ et $\mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ respectivement.

Démonstration. — Pour l'équation $(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = (1+T)$, on remarque que l'on peut écrire, formellement,

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\delta_0(\gamma) - \delta(\gamma))^k \gamma^k}{((\delta_0(\gamma)\gamma - 1)^{k+1}}.$$

Maintenant, si on applique le second membre à $1+T$, la série converge dans $(\mathscr{E}^{(0,1]}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}})^{\psi=0}$, si $\delta(\gamma) - \delta_0(\gamma)$ est assez petit sur $\mathscr{X}$ (cela suit du fait que l'opérateur $(\delta_0(\gamma)\gamma - 1)^{-1}$ est continu sur $(\mathscr{E}^{(0,1]})^{\psi=0}$ d'après [**6**]).

Pour l'équation $(\delta(p)\varphi - 1)A = (1+T)$, on choisit $k > -v_p(\delta_0(p))$, et on écrit $1+T$ sous la forme $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!} + r_k(T)$. Alors l'équation a comme solution

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!(\delta(p)p^i - 1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(p)^n r_k((1+T)^{p^n} - 1),$$

et la série converge car r_k a un zéro d'ordre k en 0 (cf. démonstration du lemme A.1).

Soit $s_0 = (\delta_{1,0}, \delta_{2,0}, \infty) \in \mathscr{S}_*$, tel que $\delta_0 = \delta_{1,0}\delta_{2,0}^{-1}$ vérifie $\delta_0(p) \notin p^{\mathbf{Z}}$. D'après le lemme 5.1, il existe un voisinage $\mathscr{X}$ de s_0 (pour la topologie p-adique), dans $\mathscr{S}_*$, tel que les équations

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = (1+T) \quad \text{et} \quad (\delta(p)\varphi - 1)A = (1+T)$$

aient des solutions dans $(\mathscr{E}^{(0,1]}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}})^{\psi=0}$ et $\mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ respectivement. Soit $D_{\mathscr{X}}$ le (φ, Γ)-module de base h_1, h_2 sur $\mathscr{R}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, avec actions de φ et Γ données par

$$\begin{aligned} \gamma(h_1) &= \delta_1(\gamma)h_1, \quad & \gamma(h_2) &= \delta_2(\gamma)(h_2 + Ah_1), \\ \varphi(h_1) &= \delta_1(p)h_1, \quad & \varphi(h_2) &= \delta_2(p)(h_2 + Bh_1). \end{aligned}$$

Si $s \in \mathscr{X}$, alors $D_{\mathscr{X}}(s)$ est le (φ, Γ)-module $D(s)$ de la rem. 3.8. La représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donc $V(s) = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}} D_{\mathscr{X}}(s))^{\varphi=1}$. Nous allons prouver que $V(s)$ varie analytiquement avec s. Si $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ est un voisinage de s_0, on pose

$$D_{\mathscr{X}'} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}'}\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} D_{\mathscr{X}} \quad \text{et} \quad V_{\mathscr{X}'} = \big(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}_{\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}} D_{\mathscr{X}'}\big)^{\varphi=1}.$$

Alors $V_{\mathscr{X}'}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$-module muni d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 5.2. — *Il existe un voisinage $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ de s_0 dans $\mathscr{S}_*$ tel que $V_{\mathscr{X}'}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}'}$-module libre de rang 2, et $V_{\mathscr{X}'}(s) = V(s)$, quel que soit $s \in \mathscr{X}'$.*

Démonstration. — Choisissons $k \in \mathbf{N}$, avec $k > 2u(s_0)$, et posons $g_1 = t^{-k}h_1$, $g_2 = h_2$, $\alpha = x^{-k}\delta_1$, $\beta = \delta_2$, $A' = t^kA$, $B' = t^kB$. Alors l'action de φ et γ dans la base g_1, g_2 est donnée par

$$\gamma(g_1) = \alpha(\gamma)g_1, \quad \gamma(g_2) = \beta(\gamma)(g_2 + A'g_1)$$
$$\varphi(g_1) = \alpha(p)g_1, \quad \varphi(g_2) = \beta(p)(g_2 + B'g_1),$$

et $V_{\mathscr{X}}$ est l'ensemble des $x_1g_1 + x_2g_2$, où $x_1, x_2 \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ sont tels que $\varphi(x_1g_1 + x_2g_2) = x_1g_1 + x_2g_2$ et $x_1 \equiv 0 \bmod t^k$. Le calcul de $V_{\mathscr{X}}$ va se faire en plusieurs étapes, en trouvant des bases dans lesquelles l'action de φ est de plus en plus sympathique.

• Étape 1 : on se débarrasse de B'. On écrit $B' \in \mathscr{R}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ sous la forme $B'_+ + B'_-$, avec $B'_+ \in \mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ et $B'_- \in \mathscr{E}^{\dagger}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Comme $k > 2u(s_0)$, on a $v_p(\alpha(p)\beta(p)^{-1}) < 0$, ce qui implique que la série $\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha(p)^{-1}\beta(p))^k\varphi^{-k}(B'_-)$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Si on note λ^- sa somme, on a $(\alpha(p)\beta(p)^{-1}\varphi - 1)\lambda_- = B'_-$. Par ailleurs, en adaptant la démonstration du lemme 5.1, on montre (en utilisant le fait que $\alpha(p)^{-1}\beta(p) \notin p^{\mathbf{Z}}$), que, quitte à diminuer $\mathscr{X}$, l'équation $((\alpha(p)\beta(p)^{-1}\varphi - 1)\lambda_+ = B'_+$ a une solution dans $\mathscr{R}^+\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Soit $\lambda = \lambda_- + \lambda_+ \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Si on pose $f_1 = g_1$ et $f_2 = g_2 - \lambda g_1$, l'action de φ devient $\varphi(g_1) = \alpha(p)g_1$ et $\varphi(g_2) = \beta(p)g_1$, et la congruence $x_1 \equiv 0 \bmod t^k$ devient $x_1 \equiv \lambda x_2 \bmod t^k$ pour $x_1f_1 + x_2f_2$.

• Étape 2 : on rend α et β constants. Soient $\alpha_0 = \alpha(s_0)(p)$ et $\beta_0 = \beta(s_0)(p)$. Comme $\alpha_0^{-1}\alpha(p)$ et $\beta_0^{-1}\beta$ sont des éléments de S^* valant 1 en s_0, on peut, quitte à diminuer $\mathscr{X}$, trouver des solutions dans $(W(\overline{\mathbf{F}}_p)\widehat{\otimes}S)^*$ aux équations $\varphi(u_1) = \alpha_0^{-1}\alpha(p)u_1$ et $\varphi(u_2) = \beta_0^{-1}\beta u_2$ (si on impose $u_1(s_0) = u_2(s_0) = 1$, ces solutions sont uniques). Si $e_1 = u_1^{-1}f_1$ et $e_2 = u_2^{-1}f_2$, on obtient alors la description suivante de V :

$$V = \{x_1e_1 + x_2e_2,\ x_1, x_2 \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}\widehat{\otimes}S,\ \varphi(x_1) = \alpha_0^{-1}x_1,\ \varphi(x_2) = \beta_0^{-1}x_2,\ x_1 \equiv Cx_2 \bmod t^k\},$$

avec $C = \frac{u_1}{u_2}\lambda$.

• Étape 3 : on utilise la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie [**9, 11**]. Soit $h = [L : \mathbf{Q}_p]$. Si $a \in \mathscr{O}_L - \{0\}$, on note $\mathrm{U}_a = \{x \in L \otimes \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}},\ \varphi(x) = ax$. Alors U_a est l'ensemble des $\mathbf{C}_p$-points du L-Espace Vectoriel $\mathbb{U}_a$ qui est de dimension $(h\, v_p(a), 1)$. Par ailleurs, si $k \in \mathbf{N}$, on note B_k le L-espace vectoriel $L \otimes (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$. Alors B_k est l'ensemble des $\mathbf{C}_p$-points du L-Espace Vectoriel $\mathbb{B}_k$ qui est de dimension $(h\,k, 0)$. Comme $V(s_0)$ est de dimension 2, et comme $v_p(\alpha_0^{-1}) + v_p(\beta_0^{-1}) = k$, la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie permet de prouver la surjectivité de l'application

$$\Phi_0 : \mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}} \to \mathrm{B}_k,$$

définie par $\Phi_0(x_1, x_2) = x_1 - C(s_0)x_2$ [son image est l'ensemble des $\mathbf{C}_p$-points d'un L-Espace Vectoriel de dimension $(-h\, v_p(\alpha_0), 1) + (-h\, v_p(\beta_0), 1) - (0, 2) = (h\,k, 0)$]. Par le théorème de l'image ouverte, si W est un supplémentaire fermé de $V(s_0)$ dans $\mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}}$, alors Φ_0 a un inverse continu $\Phi_0^{-1} : \mathrm{B}_k \to W$. Soit $\Phi : \mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \to \mathrm{B}_k\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, définie par $\Phi(x_1, x_2) = x_1 - Cx_2$. On peut écrire Φ sous la forme $\Phi_0 + s\Psi$, et $V_{\mathscr{X}}$ est donc l'ensemble des $v = x_1e_1 + x_2e_2$ vérifiant $\Phi_0(v) = -s\Psi(v_s)$, ce que l'on peut réécrire sous la forme $v = v_0 - s\Phi_0^{-1}(\Psi(v))$, avec $v_0 \in V(s_0)$. Comme Φ_0 et Ψ sont linéaires continues, l'application $v \mapsto v_0 - s\Phi_0^{-1}(\Psi(v))$ est contractante si s est assez petit. Quitte à diminuer $\mathscr{X}$, on peut donc supposer que $v \mapsto v_0 - s\Phi_0^{-1}(\Psi(v))$ est contractante dans $\mathrm{U}_{\alpha_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}} \oplus \mathrm{U}_{\beta_0^{-1}}\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$; elle admet alors un unique point fixe v, et ce point fixe prend la valeur v_0 en s_0. On en déduit le résultat.

Remarque 5.3. — (i) Comme tous les Espaces Vectoriels considérés dans la démonstration sont munis d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on aurait pu utiliser la théorie des presque $\mathbf{C}_p$-espaces vectoriels [**19**] dans l'étape 3, au lieu de celle des Espaces Vectoriels de dimension finie.

(ii) On aurait pu aussi utiliser une version « en famille » des théorèmes à la Dieudonné-Manin de Kedlaya. Il y a d'ailleurs une concordance assez frappante entre ce que permettent de démontrer ces théorèmes de Kedlaya et la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie.

(iii) Comme Kisin me l'a fait remarquer, la prop. 5.2 peut aussi se déduire (cf. [**23**]) des résultats de [**22**].

5.2. La fougère infinie

On continue à supposer $p \neq 2$. Un *atome galoisien de dimension* 2 est une k_L-représentation $\overline{V}$ de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ absolument indécomposable (i.e. qui ne devient somme de deux caractères sur aucune extension finie de k_L), qui n'est pas la tordue d'une extension de ω par 1, où ω désigne le caractère cyclotomique modulo p. Si $p \geqslant 5$, toute L-représentation absolument irréductible de dimension 2 possède (quitte à faire une extension quadratique non ramifiée de L, si jamais $\overline{V}$ n'est pas absolument indécomposable) un réseau dont la réduction est un atome galoisien de dimension 2, mais si $p = 3$, il y a quelques contrexemples dûs au fait que $\omega = \omega^{-1}$.

Si $\overline{V}$ est un atome galoisien de dimension 2, et si $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ est une base de $\overline{V}$ sur k_L, on note $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ l'espace des déformations encadrées de $\overline{V}$ (Si A est une $\mathscr{O}_L$-algèbre locale, un point de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(A)$ est un triplet (V, e_1, e_2), où V est une A-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et e_1, e_2 forment une base de V sur A se réduisant en $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ modulo $\mathfrak{m}_A$. D'après Kisin, l'espace $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ est une boule de dimension 9.

Un point s de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(L) = \mathscr{X}_{\overline{V}}(\mathscr{O}_L)$ nous fournit en particulier une L-représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On note $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L)$ l'ensemble des points s de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(L)$ tels que V_s est cristalline. De même, on note $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{tr}}(L)$ l'ensemble des points s de $\mathscr{X}_{\overline{V}}(L)$ tels que V_s est trianguline.

Théorème 5.4. — *Si $\overline{V}$ est un atome galoisien, les ensembles $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L)$ et $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{tr}}(L)$ sont Zariski denses dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$.*

Démonstration. — Soit $Z = \mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L) \cap \mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{tr}}(L)$ (une représentation cristalline V n'est trianguline que si les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ appartiennent à L, ce qui fait que Z est strictement inclus dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}^{\mathrm{cris}}(L)$). On va en fait prouver que Z est Zariski dense dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$. La démonstration repose sur un argument très semblable à celui de la « fougère infinie » de Gouvêa-Mazur [**14**]. Le point clé est que les éléments de Z apparaissent deux fois dans l'espace $\mathscr{S}$, ce qui suggère que l'image de l'application $\mathscr{S} \to \mathscr{X}_{\overline{V}}$ a beaucoup trop de points doubles pour ne pas être Zariski dense. Le lemme suivant fait partie du folklore.

Lemme 5.5. — (i) *Z n'est pas vide.*

(ii) *Z contient des points (V, e_1, e_2), avec V irréductible.*

Démonstration. — La prop. 5.2 permet de déduire le (ii) du (i) [10] à condition de prouver que l'on peut trouver un point $V(s)$ de Z, avec $s \in \mathscr{S}$ vérifiant $u(s) > 0$. Comme un élément de Z

[10] Elle permet de montrer qu'il passe, par un point cristallin, une sous-variété de codimension 1 contenant des tas de points cristallins avec un des poids de Hodge-Tate tendant vers l'infini, alors qu'une des valeurs propres de frobenius et l'autre poids de Hodge-Tate restent bornés ; chacun de ces points fournit une représentation irréductible.

correspond à deux points de $\mathscr{S}$, et qu'il y a toujours un des deux points dans $\mathscr{S}_*$ (cf. (iii) du th. 0.6), il suffit en fait de prouver que Z est non vide. Ceci se fait cas par cas.

• Si $\overline{V}$ est irréductible, alors on peut la relever en une représentation cristalline, obtenue en tordant par un caractère une induite d'une puissance symétrique de la représentation attachée à un Lubin-Tate pour $\mathbf{Q}_{p^2}$.

• Si $\overline{V}$ n'est pas irréductible, on peut supposer, quitte à tordre par un caractère, que c'est une extension de k_L par $k_L(\delta)$.

– Si $\delta \notin \{1, \omega\}$, il y une seule telle extension, et on peut relever δ en un caractère de la forme $x^k\delta_0$, où $k > 0$ et δ_0 est constant sur $\mathbf{Z}_p^*$; l'extension de 1 par $x^k\delta_0$ est alors une représentation cristalline ordinaire (de poids de Hodge-Tate 0 et k) possédant un réseau dont la réduction est $\overline{V}$.

– Les extensions de 1 par ω sont classifiées par un invariant $\mathscr{L}$ qui est la réduction modulo p de l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur pour les extensions de 1 par le caractère cyclotomique. On peut alors utiliser la formule de Greenberg-Stevens [**15**], interprétant cet invariant comme une dérivée logarithmique de valeur propre de Frobenius (par rapport au poids de Hodge-Tate), pour prouver qu'il existe une représentation cristalline ordinaire de poids de Hodge-Tate 0 et $p = 1 + (p-1)$ se réduisant sur $\overline{V}$.

– De même, les extensions de 1 par 1 sont classifiées par un invariant $\mathscr{L}$, et il est assez facile de prouver que les extensions de 1 par $(|x|x)^{(p-1)(1+p\alpha)}(1+\beta)^{v_p(x)}$, avec $\alpha \in \{0, \dots, p-1\}$ et $\beta \in \mathfrak{m}_L$, fournissent toutes les extensions dont on a besoin en réduction modulo $\mathfrak{m}_L$.

Revenons à la démonstration du th. 5.4. Soit $x_0 = (V_0, e_{1,0}, e_{2,0}) \in Z$, avec V_0 irréductible. Il existe alors un voisinage $\mathscr{X}(x_0)$ de x_0 dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ pour la topologie p-adique, une $\mathscr{O}_{\mathscr{X}(x_0)}$-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 et une base e_1, e_2 de V sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}(x_0)}$, telles que $V(x_0) = V_0$, $e_1(x_0) = e_{1,0}$ et $e_2(x_0) = e_{2,0}$. Le choix de e_1, e_2 permet de trivialiser l'application $(V, e_1, e_2) \mapsto V$ dans un voisinage de x_0, ce qui permet, quitte à diminuer $\mathscr{X}(x_0)$, d'écrire $\mathscr{X}(x_0)$ sous la forme d'un produit $\mathscr{Y}(x_0) \times \mathscr{B}$, où $\mathscr{Y}(x_0)$ est un voisinage p-adique de V_0 dans l'espace des déformations de $\overline{V}$ (qui est lisse au voisinage de V_0, puisque V_0 est irréductible) et $\mathscr{B}$ est une boule de l'espace de dimension 4, l'application $\mathscr{Y}(x_0) \times \mathscr{B} \to \mathscr{X}(x_0)$ envoyant $(V(s), a, b, c, d)$ sur $(V(s), (1+pa)e_1(s) + pce_2(s), pbe_1(s) + (1+pd)e_2(s))$.

Comme $\mathscr{X}_{\overline{V}}$ est irréductible, $\mathscr{X}(x_0)$ est Zariski dense dans $\mathscr{X}_{\overline{V}}$, et il nous suffit de prouver que $Z \cap \mathscr{X}(x_0)$ est Zariski dense dans $\mathscr{X}(x_0)$, ou encore, en utilisant la factorisation ci-dessus, que l'ensemble $Y \cap \mathscr{Y}(x_0)$ est Zariski dense dans $\mathscr{Y}(x_0)$, où Y désigne l'ensemble des L-représentations cristallines triangulines dont la réduction est $\overline{V}$.

Si $t \in \mathscr{S}_*$ est tel que $V(t) \in \mathscr{Y}(x_0)$, il existe, d'après la prop 5.2, un voisinage $\mathscr{S}(t)$ dans $\mathscr{S}_*$ tel que $V(s) \in \mathscr{Y}(x_0)$, quel que soit $s \in \mathscr{S}(t)$. De plus, toujours d'après la prop. 5.2, l'application $s \mapsto V(s)$ est analytique sur $\mathscr{S}(t)$, et comme elle est injective (puisque $V(s) \cong V(s')$ n'arrive que très rarement, et implique que s et s' sont loin dans $\mathscr{S}_*$), on en déduit le fait que l'adhérence de Zariski $\mathscr{Z}_t$ de l'image de $\mathscr{S}(t)$ dans $\mathscr{Y}(x_0)$ est de dimension 4 (au moins), et donc est de codimension 1 (au plus).

Maintenant, choisissons $s_0 = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_*$ tel que $V(s_0) \cong V_0$. Soit $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{Y}(x_0)}$ identiquement nul sur $Y \cap \mathscr{Y}(x_0)$. En particulier, il existe $N \geqslant 0$ tel que f est nulle sur

$$W(n, k, y_1, y_2) = V(\delta_1 \exp((n+k)\log x + y_1 v_p(x)), \delta_2 \exp(k \log x + y_2 v_p(x)), \infty),$$

si $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$ sont divisibles par $(p-1)p^N$ et si $y_1, y_2 \in \mathscr{O}_L$ ont une valuation $\geqslant N$. Comme $(p-1)^N\mathbf{N} \times (p-1)p^N\mathbf{Z} \times (p^N\mathscr{O}_L)^2$ est Zariski dense dans $\mathscr{S}(s_0)$, on en déduit le fait que f est identiquement nul sur $\mathscr{Z}_{s_0}$. Par ailleurs, la représentation $W(n,0,0,0)$ est aussi isomorphe à $V(t_n)$, où t_n est l'élément $(\delta_2 x^{n+w(s_0)}, \delta_1 x^{-(n+w(s_0))}, \infty)$ de $\mathscr{S}$. Les arguments qui ont permis de montrer que f est nulle sur $\mathscr{Z}_{s_0}$, montrent de même que f est identiquement nulle sur $\mathscr{Z}_{t_n}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Si n est assez grand, $u(t_n) = n + w(s_0) + v_p(\delta_2(p))$ n'est pas égal à $u(s_0)$, ce qui fait que $t_n \notin \mathscr{S}(s_0)$, et donc que $\mathscr{Z}_{t_n}$ n'est pas inclus dans $\mathscr{Z}_{s_0}$. Par ailleurs, $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$ contient l'image de l'ensemble des $(\delta_1 \exp((n+z)\log x + y_1 v_p(x)), \delta_2 \exp(k \log z + y_2 v_p(x)), \infty)$, pour $y_1, y_2, z \in \mathscr{O}_L$ de valuation suffisamment grande. On en déduit que la réunion des $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$ est Zariski dense dans $\mathscr{Z}_{s_0}$. Soit alors r l'ordre du zéro de f sur $\mathscr{Z}_{s_0}$. Il résulte de ce qui précède que f a un zéro d'ordre au moins $r+1$ sur $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$, pour tout n. Comme la réunion des $\mathscr{Z}_{s_0} \cap \mathscr{Z}_{t_n}$ est Zariski dense dans $\mathscr{Z}_{s_0}$, cela implique que f a un zéro d'ordre $r+1$ sur $\mathscr{Z}_{s_0}$. On a donc $r = +\infty$, ce qui implique que f est identiquement nulle sur $\mathscr{Y}(x_0)$. Ceci permet de conclure.

Remarque 5.6. — Si $p = 3$ et $\overline{V}$ est la tordue d'une extension de 1 par ω, la démonstration précédente prouve que l'ensemble Z des triangulines cristallines est Zariski dense dans toute composante irréductible du champs des déformations de $\overline{V}$ contenant un élément irréductible de Z.

Question 5.7. — (i) Le th. 5.4 s'étend-il en dimension supérieure ? La différence entre la dimension de l'espace des représentations de dimension n de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et celui des triangulines est $\frac{n(n-1)}{2}$ qui est > 1 si $n \geqslant 3$. La démonstration précédente ne s'étend donc pas sans modification, mais Chenevier [**4**] a obtenu des résultats allant dans le sens d'une réponse positive.

(ii) Est-ce que l'ensemble des représentations cristabélines (une représentation est cristabéline si elle devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$) à poids de Hodge-Tate 0 et 1 est Zariski dense dans l'espace de tous les représentations ?

A. Compléments à [12]

A.1. Compléments sur $\mathscr{R}$

Lemme A.1. — (i) *Si $\alpha \in L^*$ n'est pas de la forme p^{-i}, $i \in \mathbf{N}$, alors $\alpha\varphi - 1 : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\alpha = p^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors le noyau de $\alpha\varphi - 1 : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est la droite $L \cdot t^i$, et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ est dans l'image de $\alpha\varphi - 1$ si et seulement si $a_i = 0$.*

Démonstration. — Si $k > -v_p(\alpha)$, alors $-\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\varphi)^n$ est un inverse continu de $\alpha\varphi - 1$ sur $T^k\mathscr{R}^+$. (Pour montrer que la somme définit bien une fonction analytique sur $v_p(T) > 0$, il suffit de constater que l'on a $v_p(\varphi^n(T)) = n + C$, si n est assez grand, et donc $v_p(F(\varphi(T))) \geqslant nk + C'$ si F est divisible par T^k.) Le résultat se déduit alors de ce que $\mathscr{R}^+ = \oplus_{i=0}^{k-1} L \cdot t^i \oplus T^k\mathscr{R}^+$ et de ce que $\varphi(t^i) = p^i t^i$.

Lemme A.2. — *Si $b \in \mathscr{E}^\dagger$ et si $v_p(\alpha) < 0$, il existe $c \in \mathscr{E}^\dagger$ tel que $b' = b - (\alpha\varphi - 1)c$ appartienne à $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — Il suffit de résoudre l'équation $\alpha c - \psi(c) = \psi(b)$ dans $\mathscr{E}^\dagger$, or cette équation admet comme solution $c = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{-k}\psi^k(b)$, la convergence de la série dans $\mathscr{E}^\dagger$ étant une conséquence de la prop. [**12**, 1.15].

Corollaire A.3. — *Si $b \in \mathscr{R}$ et si $v_p(\alpha) < 0$, il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $b' = b - (\alpha\varphi - 1)c$ appartienne à $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — D'après le lemme A.1, si $k > -v_p(\alpha)$, il existe $c_1 \in \mathscr{R}$ tel que $b - (\alpha\varphi - 1)c_1$ soit de la forme $\sum_{i<k} a_i T^i$ et donc appartienne à $\mathscr{E}^\dagger$, ce qui permet d'utiliser le lemme A.2 pour conclure.

Lemme A.4. — *Si $v_p(\alpha) < 0$, et si $a \in \mathscr{R}$ vérifie $(\alpha\varphi - 1)a \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, alors $a \in \mathscr{R}^+$.*

Démonstration. — Si $x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k T^k$ est un élément de $\mathscr{R}$, on note x^+ et x^- les séries de Laurent définies par $x^+ = \sum_{k\geqslant 0} x_k T^k \in \mathscr{R}^+$ et $x^- = \sum_{k\leqslant -1} x_k T^k \in \mathscr{E}^\dagger$. D'après [**12**, lemme 1.8], on a $\psi(x)^- = \psi(x^-)$ et $\psi(x)^+ = \psi(x^+)$; on a aussi $\varphi(x)^- = \varphi(x^-)^-$.

Appliquant ce qui précède à $x = (\varphi(a) - a) \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, on en déduit les identités

$$0 = \psi((\varphi(a) - \alpha^{-1}a)^-) = \psi((\varphi(a^-) - \alpha^{-1}a)^-) = (\psi(\varphi(a^-) - \alpha^{-1}a^-))^- = a^- - \alpha^{-1}\psi(a^-),$$

et comme on a supposé $v_p(\alpha) < 0$, une récurrence immédiate montre que $a^- \in \mathfrak{m}_L^k \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, quel que soit $k \in \mathbf{N}$. On en déduit la nullité de a^-, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition A.5. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$. Si $v_p(\delta(p)) > 0$, l'équation*

$$(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(p)^n \varphi^n(1+T)$$

n'a pas de solution dans $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Soit $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(p)^n\varphi^n(1+T)$. Alors $A \in \mathscr{O}_L[[T]]$ vérifie $\psi(A) = \delta(p)A$. Soit $\Theta = (\delta(\gamma)\gamma - 1)$, et soit $B \in \mathscr{R}$ une solution de $\Theta(B) = A$. On a $\Theta(\psi(B) - \delta(p)B) = 0$. On en déduit que $\psi(B) - \delta(p)B = 0$ (sauf si δ est de la forme χ^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, auquel cas $\psi(B) - \delta(p)B = \alpha t^i$, mais en retranchant $(p^{-i} - \delta(p))^{-1}t^i$ à B, on fabrique une solution de $\Theta(B) = A$ vérifiant $\psi(B) - \delta(p)B = 0$).

Décomposons alors B sous la forme $B^+ + B^-$, avec $B^+ \in \mathscr{R}^+$ et $B^- \in \mathscr{E}^\dagger \cap T^{-1}L[[T^{-1}]]$. Comme $\psi(B)^+ = \psi(B^+)$ et $\psi(B)^- = \psi(B^-)$, on a $\psi(B^+) = \delta(p)B^+$ et $\psi(B^-) = \delta(p)B^-$. D'après [**12**, prop.1.13], cela implique que B^- converge sur tout le disque épointé $0 < v_p(T) < +\infty$, et que l'on a

$$\inf_{v_p(x)=r+1} v_p(B^-(x)) \geqslant \inf_{v_p(x)=r} v_p(B^-(x)) - 1 - v_p(\delta(p)), \qquad \text{quel que soit } r \geqslant \frac{1}{p-1}.$$

On en déduit que B^- a un pôle d'ordre fini, puis, grâce au lemme 1.8 de [**12**], que $B^- = 0$. On en déduit l'existence d'une distribution μ sur $\mathbf{Z}_p$ dont B est la transformée d'Amice, et la relation que vérifie B implique que la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ de $\lambda = (\delta(\gamma)\gamma - 1)\mu$ est la masse de Dirac en 1. Ceci est absurde car on aurait

$$1 = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = \delta(\gamma)\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}(\chi(\gamma)x)\,\mu - \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}(x)\,\mu = 0.$$

Ceci permet de conclure.

Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathscr{R}$, on définit le résidu de la forme différentielle $\omega = f\,dT$ par la formule $\mathrm{res}(\omega) = a_{-1}$. On a alors $\mathrm{res}(\gamma(\omega)) = \mathrm{res}(\omega)$ et $\mathrm{res}(\varphi(\omega)) = p\,\mathrm{res}(\omega)$.

Soit $\partial : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ l'opérateur différentiel $\partial = \frac{d}{dt} = (1+T)\frac{d}{dT}$. On a

$$\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial \quad \text{et} \quad \partial \circ \gamma = \chi(\gamma)\,\gamma \circ \partial.$$

Par ailleurs, comme $df = \partial f\,\frac{dT}{1+T}$; on en déduit la proposition suivante :

Proposition A.6. — (i) $\ker \partial = L$ *et* f *est dans l'image de* ∂ *si et seulement si* $\mathrm{res}(f\,\frac{dT}{1+T}) = 0$.
(ii) $\partial : \mathscr{R}[\log T] \to \mathscr{R}[\log T]$ *est surjective.*

On pose $\mathrm{Res}(f) = \mathrm{res}(f\,\frac{dT}{1+T})$. Comme $\log\frac{\gamma(T)}{T}$ et $\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$ appartiennent à $\mathscr{R}$ et donc ont une différentielle dont le résidu est nul, on en déduit les formules

$$\mathrm{Res}(\gamma(x)) = \chi(\gamma)^{-1}\mathrm{Res}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(\varphi(x)) = \mathrm{Res}(x).$$

Lemme A.7. — *Si* $x \in (\mathscr{E}^\dagger)^*$, *alors* $\mathrm{Res}\frac{\partial x}{x} \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. — On peut écrire x de manière unique sous la forme $x = \alpha T^k x^+ x^-$, avec $\alpha \in L^*$, $k \in \mathbf{Z}$, $x^+ \in 1 + T\mathscr{O}_L[[T]]$ et $x^- \in (1 + \mathfrak{m}_L T^{-1}\mathscr{O}_L[[T^{-1}]]) \cap \mathscr{E}^\dagger$. On a alors $\mathrm{Res}\frac{\partial x^-}{x^-} = \mathrm{Res}\frac{\partial x^+}{x^+} = 0$ et $\mathrm{Res}\frac{\partial T^k}{T^k} = k$, ce qui permet de conclure.

Lemme A.8. — *Si* $x \in \mathscr{R}$ *vérifie* $\mathrm{Res}(x) = 0$, *alors il existe* $c \in \mathscr{R}$ *tel que* $(\gamma - 1)c = tx$.

Démonstration. — Ce lemme peut se trouver dans **[2]** (ou plutôt dans la prépublication correspondante). Rappelons-en la démonstration. Soit $\nabla = \frac{\log \gamma}{\log \chi(\gamma)}$. Un petit calcul montre que $\nabla = t\partial$. Par ailleurs, on peut factoriser $\frac{\log(1+T)}{\log \chi(\gamma)}$ sous la forme $TF(T)$, et donc ∇ sous la forme $(\gamma - 1)F(\gamma - 1)$, ce qui prouve que pour trouver une solution de l'équation $(\gamma - 1)c = t^i y$, il suffit d'exhiber une solution de l'équation $\partial c = t^{i-1}y$. Le lemme est alors une conséquence du fait que $\partial c = x$ a une solution dans $\mathscr{R}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(x) = 0$.

A.2. Anneaux de Fontaine. — On renvoie à **[11]** pour la définition des anneaux apparaissant ci-dessous.

Proposition A.9. — *Si* $r > 0$ *et si* $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}, \log \pi]$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $Nx = 0$;
(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}]$.

Démonstration. — C'est évident.

Proposition A.10. — *Si* $r > 0$ *et si* $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}]$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\varphi^{-n}(x) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$ *vérifiant* $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \leqslant r$;
(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate, et pour montrer l'implication (i)⇒(ii), il suffit de prouver que si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ est tel que $\varphi^{-n}(x)$ est divisible par t dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout n vérifiant $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \leqslant r$, alors x est divisible par t dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. Ceci a été démontré par Berger **[2]**.

Lemme A.11. — *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *il existe $n_0 \in N$ tel que $\varphi^{-n}(x) \in \mathbf{A}_{\max}$ quel que soit $n \geqslant n_0$;*
(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Passons à la réciproque. Par hypothèse, si $n \geqslant n_0$, il existe $x_n \in \mathbf{A}_{\max}$ tel que $x = \varphi^n(x_n)$. Par ailleurs, si $y \in \mathbf{A}_{\max}$, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, tendant p-adiquement vers 0, telle que l'on ait

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\Big(\frac{[\tilde{p}]}{p}\Big)^k \quad \text{et donc } \varphi^n(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{k(p^n-1)}\varphi^n(a_k)\Big(\frac{[\tilde{p}]}{p}\Big)^{kp^n};$$

on en déduit l'inclusion $\varphi^n(\mathbf{A}_{\max}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}^+ + p^{n-1}\mathbf{A}_{\max}$, et l'appartenance de x à $\cap_{n\geqslant n_0}(\widetilde{\mathbf{A}}^+ + p^{n-1}\mathbf{A}_{\max})$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \cap p^n\mathbf{A}_{\max} = (p,[\tilde{p}])^n\widetilde{\mathbf{A}}^+$, cela implique que $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est fermé dans $\mathbf{A}_{\max}$; on en déduit l'appartenance de x à $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition A.12. — *Si $r > 0$, et si $0 < s \leqslant r$, les conditions suivantes sont équivalentes pour $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$:*
(i) *la suite $(\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{[s,r]}$;*
(ii) $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Passons à la réciproque. On peut décomposer x sous la forme $x = y + z$ avec $z \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et, quitte à remplacer x par y, on peut supposer $r = +\infty$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, auquel cas le résultat suit du lemme A.11.

Proposition A.13. — *Si $x \in \mathscr{R}$ et si $\alpha \in L^*$ vérifie $v_p(\alpha) \geqslant 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *x est d'ordre $v_p(\alpha)$;*
(ii) *la suite de terme général $\alpha^n\varphi^{-n}(x)$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — On peut écrire x sous la forme $x = x^+ + x^-$, avec $x^+ \in \mathscr{R}^+$ et $x^- \in \mathscr{E}^\dagger$. La suite $(\varphi^{-n}(x^-))_{n\in\mathbf{N}}$ est alors bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$; il en est donc, a fortiori, de même de la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x^-))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$. On peut donc remplacer x par x^+ et se ramener à vérifier que $x \in \mathscr{R}^+$ est d'ordre $v_p(\alpha)$ si et seulement si la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.

Maintenant, on a $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{i\in\mathbf{N}}\varphi^i(\mathbf{B}^+_{\max})$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\varphi^i(\mathbf{B}^+_{\max})$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, ou encore, si et seulement si, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite $(\varphi^{-i}(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{B}^+_{\max}$. Ceci permet de se ramener à prouver que $x \in \mathscr{R}^+$ est d'ordre $v_p(\alpha)$ si et seulement si la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{B}^+_{\max}$. Pour la démonstration de ce dernier fait, voir par exemple [**8**, lemme VIII.3.3].

Références

[1] J. Bellaïche et G. Chenevier, p-adic families of Galois representations and higher rank Selmer groups, Astérisque (à paraître).
[2] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Inv. Math. 148, 2002, 219-284.
[3] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, ce volume.
[4] G. Chenevier, cours Peccot avril 2008.

[5] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[6] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc **12** (1999) 241-268.

[7] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham 1996)*, London Math. Soc. Lect. Note **254** (1997), 1–113.

[8] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998) 485-571.

[9] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[10] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Sém. Bourbaki 2001/02*, exp. 897, Astérisque **290** (2003), 53-101.

[11] P. Colmez, Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[12] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, preprint 2007.

[13] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. **140** (2000), 1–43.

[14] F. Gouvêa et B. Mazur, On the density of modular representations, Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 127–142, AMS/IP Stud. Adv. Math. **7**, 1998.

[15] R. Greenberg et G. Stevens, p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, Invent. Math. **111** (1993) 407–447.

[16] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223** (1994) 59–102.

[17] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque 223, 1994, 113-184.

[18] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[19] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque **295** (2004), 1–115.

[20] L. Herr, Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, Bull. S.M.F. **126** (1998), 563–600.

[21] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[22] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[23] M. Kisin, Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations, preprint 2008.

[24] R. Liu, Cohomology and duality for (φ,Γ)-modules over the Robba ring, I.M.R.N. (2007), à paraître.

[25] B. Mazur, On monodromy invariants occuring in global arithmetic, and Fontaine's theory, Contemp. Math. **165** (1994) 1–20.

[26] K. Nakamura, Classification of two dimensional trianguline representations of p-adic fields, preprint 2008.

[27] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[28] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math. **62** (1980/81), 89–116.

Pierre Colmez, École Polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France • Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.polytechnique.fr`