FONCTIONS D'UNE VARIABLE p-ADIQUE

par

Pierre Colmez

Résumé. — Ce texte est un exposé des résultats de base d'analyse fonctionnelle sur $\mathbf{Q}_p$. L'accent est mis principalement sur l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ et son dual des distributions d'ordre r, le point étant que ces espaces se sont retrouvés jouer un rôle important en théorie de Langlands p-adique.

Abstract. — This text is a compilation of basic results in functional analysis over $\mathbf{Q}_p$. The stress is mainly put on the space of $\mathscr{C}^r$-functions and on its dual of distributions of order r, the point being that these spaces have come to play an important role in p-adic Langlands theory.

Table des matières

Introduction

Le but de ce texte est de présenter et de démontrer les résultats d'analyse fonctionnelle p-adique dont on a besoin **[7, 8]** en vue de la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations de la série principale de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On donne en particulier plusieurs caractérisations des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$, si r est un réel positif, chacune ayant son intérêt propre :

• l'étude de la dérivation $\frac{d}{dx} : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$ repose sur la décomposition en vaguelettes,

• la décomposition (de Mahler) sur la base des polynômes binomiaux fournit, par dualité, une caractérisation agréable des distributions d'ordre r en termes de l'ordre de leur transformée d'Amice.

C'est cette dernière description qui permet de construire des distributions tempérées à partir de la théorie des (φ, Γ)-modules, ce qui nous fournit un pont entre le monde des représentations p-adiques du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et certains espaces fonctionnels p-adiques qui se trouvent être reliés à certaines représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

La plupart des résultats de ce texte sont parfaitement classiques, et le lecteur est invité à consulter les travaux cités dans la bibliographie pour d'autres points de vue. Il trouvera un dictionnaire entre analyse fonctionnelle p-adique et anneaux de séries de Laurent dans [**9**, § I.1].

I. Espaces fonctionnels p-adiques

I.1. Espaces de Banach p-adiques. — Ce § ne contient que des généralités sur les espaces de Banach p-adiques.

1. L-banach. — On normalise la valuation p-adique v_p sur $\mathbf{C}_p$ par $v_p(p) = 1$. Si L est un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, on note $\mathscr{O}_L = \{x \in L, v_p(x) \geq 0\}$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{m}_L = \{x \in L, v_p(x) > 0\}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_L$, et $k_L = \mathscr{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel.

Si B est un L-espace vectoriel, une *valuation* v_B sur B est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $v_B(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$;

(ii) $v_B(x + y) \geq \inf(v_B(x), v_B(y))$ quels que soient $x, y \in B$;

(iii) $v_B(\lambda x) = v_p(\lambda) + v_B(x)$ quels que soient $\lambda \in L$ et $x \in B$.

Un *L-banach* B est un L-espace vectoriel topologique, la topologie étant définie par une valuation v_B pour laquelle il est complet. Une application $f : B_1 \to B_2$ est un *morphisme de L-banach* si elle est L-linéaire et continue ; c'est une *isométrie* de B_1 dans B_2 si $v_{B_2}(f(x)) = v_{B_1}(x)$, pour tout $x \in B_1$.

Exemple I.1.1. — (i) Si I est un ensemble, soit $\ell_\infty(I, L)$ l'ensemble des familles bornées $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de L. On munit $\ell_\infty(I, L)$ de la valuation v_{ℓ_∞} définie par $v_{\ell_\infty}((a_i)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} v_p(a_i)$, ce qui en fait un L-banach.

(ii) Soit $\ell^0_\infty(I, L)$ le sous-espace de $\ell_\infty(I, L)$ des suites $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de L tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. C'est un L-banach comme sous-L-espace vectoriel fermé d'un L-banach. C'est aussi l'adhérence dans $\ell_\infty(I, L)$ de l'espace des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

(iii) Plus généralement, si I est un ensemble, et si B est un L-banach, l'espace $\ell_\infty(I,B)$ (resp. $\ell_\infty^0(I,B)$) des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de B, qui sont bornées (resp. qui tendent vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies), muni de la valuation v_{ℓ_∞} définie par $v_{\ell_\infty}((a_i)_{i\in I}) = \inf_{i\in I} v_B(a_i)$, est un L-banach.

La plupart des résultats classiques de la théorie des espaces de Banach réels restent valables pour les L-banach (le théorème de Hahn-Banach demande un peu de précaution). En particulier, on a les résultats suivants.

Proposition I.1.2. — (i) *Si $f : B_1 \to B_2$ est un morphisme de L-banach, alors f^{-1} est continu et donc f est un isomorphisme de L-banach (théorème de l'image ouverte).*

(ii) *Une limite simple d'applications linéaires continues sur un L-banach est continue (théorème de Banach-Steinaus).*

2. Bases orthonormales et bases de Banach. — La théorie des espaces de Banach p-adiques est très loin d'être aussi riche que son homologue archimédienne ; elle se rapproche plutôt de celle des espaces de Hilbert réels. En particulier, la notion suivante remplace celle de base hilbertienne dans un espace de Hilbert.

Définition I.1.3. — Soit B un L-banach. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de B est *une base orthonormale de* B de B si l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$, de $\ell_\infty^0(I,L)$ dans B, est une isométrie. On dit que c'est *une base de Banach* si cette application est seulement un isomorphisme de L-banach. Autrement dit, une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si :

(i) tout élément x de B peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$, où les a_i sont des éléments de L tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies,

(ii) $v_B(x) = \inf_{i\in I} v_p(a_i)$.

C'est une base de Banach si elle est bornée et vérifie la condition (i), ce qui implique, d'après le théorème de l'image ouverte, la propriété suivante.

(ii') il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in B$, on ait l'encadrement $-C + \inf_{i\in I} v_p(a_i) \leq v_B(x) \leq C + \inf_{i\in I} v_p(a_i)$.

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de B est *orthogonale* s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de L telle que, quelle que soit la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de L, on ait $v_B(\sum_{i\in I} x_i\lambda_i e_i) = \inf_{i\in I} v_p(x_i)$. Une base orthonormale est donc orthogonale.

Exemple I.1.4. — Si I est un ensemble, et si $i \in I$, on note δ_i la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice i qui est égal à 1. Par définition, ou presque, les δ_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de $\ell_\infty^0(I,L)$.

Proposition I.1.5. — *Si L est de valuation discrète, et π_L est une uniformisante de L, alors :*

(i) *Tout L-banach possède des bases de Banach.*

(ii) *Un L-banach possède des bases orthonormales si et seulement si $v_B(B) = v_p(L)$. De plus, sous cette hypothèse, si on note $B^0 = \{x \in B \mid v_B(x) \geq 0\}$, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique du k_L-espace vectoriel $\overline{B} = B^0/\pi_L B^0$.*

Démonstration. — Si B est un L-banach muni de la valuation v_B, alors v'_B, définie par $v'_B(x) = v_p(\pi_L) \cdot \left[\frac{v_B(x)}{v_p(\pi_L)}\right]$, est une valuation sur B, équivalente à v_B, à valeurs dans $v_p(L)$, ce qui permet de déduire le (i) du (ii). Supposons donc que $v_B(B) = v_p(L)$, et montrons que $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique du k_L-espace vectoriel $\overline{B}$.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de B^0 telle que la famille $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ soit une base du k_L-espace vectoriel $\overline{B}$. Soient S un système de représentants de k_L dans $\mathscr{O}_L$, contenant 0, et $s : k_L \to S$ l'inverse de la réduction modulo π_L. Si $x \in B^0$, on peut écrire $\overline{x}$ comme une somme finie $\sum_{i\in I} a_i\overline{e}_i$, où les a_i sont des éléments de k_L presque tous nuls. Soit $s(x) = \sum_{i\in I} s(a_i)e_i$. Par construction, on a $x - s(x) \in \pi_L B^0$.

Si $x \in B^0$, définissons par récurrence une suite x_n d'éléments de B^0 par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \frac{1}{\pi_L}(x_n - s(x_n))$. On a alors $x = \sum_{n=0}^k \pi_L^n s(x_n) + \pi_L^{k+1}x_{k+1}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. On peut écrire $s(x_n) = \sum_{i\in I} s_{n,i}e_i$, où les $s_{n,i}$ sont des éléments de S presque tous nuls, ce qui montre que si on pose $a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_L^n s_{n,i}$, alors la suite des a_i tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. Ceci montre que l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_ie_i$ est une surjection de $\ell^0_\infty(I)$ sur B. Si $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \in \ell^0_\infty(I)$ vérifie $v_{\ell_\infty}(\mathbf{a}) = 0$, on a $\sum_{i\in I} a_ie_i \neq 0$ modulo π_L car les $\overline{e}_i$, pour $i \in I$, forment une base de $\overline{B}$. Ceci implique que $0 \leq v_B\big(\sum_{i\in I} a_ie_i\big) < v_p(\pi_L)$, et comme on a supposé que $v_B(B) = v_p(\pi_L)$, on en déduit que $v_B\big(\sum_{i\in I} a_ie_i\big) = 0$ et que l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_ie_i$ est une isométrie de $\ell^0_\infty(I)$ sur B. Ceci prouve que si les $\overline{e}_i$, pour $i \in I$, forment une base de $\overline{B}$, alors les e_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de B.

Supposons maintenant que les e_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de B. Si $x \in \overline{B}$, on peut choisir $\tilde{x} \in B^0$ ayant pour image x modulo p. Comme $v_B(\tilde{x}) \geq 0$, on peut écrire $\tilde{x}$, de manière unique, sous la forme $\tilde{x} = \sum_{i\in I} a_ie_i$, où $a_i \in \mathscr{O}_L$ tend vers 0 à l'infini. Il en résulte que la réduction $\overline{a}_i$ modulo π_L de a_i est nulle sauf pour un nombre fini de i (on a $\overline{a}_i \neq 0$ si et seulement si $v_p(a_i) = 0$), et que $x = \sum_{i\in I} \overline{a}_i\overline{e}_i$ est une combinaison linéaire des $\overline{e}_i$; les $\overline{e}_i$ forment donc une famille génératrice de $\overline{B}$. Enfin, si $\sum_{i\in I} a_i\overline{e}_i = 0$ dans $\overline{B}$, et si $\tilde{a}_i \in \mathscr{O}_L$ a pour image a_i modulo π_L, alors $x = \sum_{i\in I} \tilde{a}_ie_i \in pB^0$, et donc $v_B(x) > 0$. Comme $v_B(x) = \inf_{i\in I} v_p(\tilde{a}_i)$, cela implique $v_p(\tilde{a}_i) > 0$, et donc $a_i = 0$, pour tout $i \in I$. Il s'ensuit que les $\overline{e}_i$ forment une famille libre, et donc une base, de $\overline{B}$.

Ceci permet de conclure.

3. Le dual d'un L-banach. — Si B est un L-banach, on note B^* le L-espace vectoriel des formes L-linéaires continues $f : B \to L$. Muni de la *topologie forte* définie par la valuation v_{B^*} donnée par la formule

$$v_{B^*}(f) = \inf_{x\in B-\{0\}} v_p(f(x)) - v_B(x),$$

cet espace est un L-banach. On peut aussi munir B^* de la *topologie faible* de la convergence simple (topologie la plus faible telle qu'une suite f_n, $n \in \mathbf{N}$, ait pour limite f, si et seulement si, quel que soit $x \in B$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$). D'après le théorème de Banach-Steinaus, B^* est aussi complet pour la topologie faible, mais l'espace ainsi obtenu n'est un L-banach que si B est de dimension finie.

Proposition I.1.6. — *Soit I un ensemble.*

(i) *Si $b = (b_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I, L)$, et si $a = (a_i)_{i\in I} \in \ell^0_\infty(I, L)$, la série $\sum_{i\in I} b_i a_i$ converge dans L.*

(ii) *Si $f_b(a)$ désigne la somme de la série $\sum_{i\in I} b_i a_i$, l'application $b \mapsto f_b$ est une isométrie de $\ell_\infty(I, L)$ sur le dual de $\ell^0_\infty(I, L)$.*

Démonstration. — La seule chose non totalement évidente est la surjectivité de l'application $b \mapsto f_b$. Soit donc $f \in \ell^0_\infty(I, L)^*$. Comme f est continue, si on pose $b_i = f(\delta_i)$, on a $v_p(b_i) \geq v_{\ell^0_\infty(I,L)^*}(f)$, ce qui prouve que $b = (b_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I, L)$. Mais alors $f - f_b$ est nul sur le sous-espace de $\ell^0_\infty(I, L)^*$ engendré par les δ_i ; comme celui-ci est dense et $f - f_b$ continue, cela implique $f = f_b$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.1.7. — Soit δ_i^* l'élément de $\ell^0_\infty(I, L)^*$ défini par $\delta_i^*(\delta_j) = 1$, si $j = i$, et $\delta_i^*(\delta_j) = 0$, si $j \neq i$. On montre facilement que, si $f \in \ell^0_\infty(I, L)^*$, alors f est somme de la série $\sum_{i\in I} f(\delta_i)\delta_i^*$ dans $\ell^0_\infty(I, L)^*$, muni de la topologie faible (la série ne converge pas pour la topologie forte, sauf si I est un ensemble fini).

4. Produit tensoriel de L-banach. — Soient B_1 et B_2 deux L-banach. Si $z \in B_1 \otimes_L B_2$, on définit $v_{B_1\otimes B_2}$ comme le maximum des $\inf_{j\in J}(v_{B_1}(x_j) + v_{B_2}(y_j))$ pour toutes les écritures possibles de z sous la forme $\sum_{j\in J} x_j \otimes y_j$. Ceci munit $B_1 \otimes_L B_2$ d'une semi-valuation, et on note $B_1 \widehat{\otimes}_L B_2$ le séparé complété de $B_1 \otimes_L B_2$ pour cette semi-valuation. C'est le *produit tensoriel complété* de B_1 et B_2.

Proposition I.1.8. — *Si I est un ensemble et B est un L-banach, alors $\ell^0_\infty(I, L)\widehat{\otimes}_L B$ est isométrique à $\ell^0_\infty(I, B)$.*

Démonstration. — L'espace $\ell^0_\infty(I, L) \otimes_L B$ est le sous-espace de $\ell^0_\infty(I, B)$ des suites $(a_i)_{i\in I}$ telles que le sous-L-espace vectoriel de B engendré par les a_i, $i \in I$, soit de dimension finie. Il contient en particulier l'espace des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de B, avec $a_i = 0$ en dehors d'un sous-ensemble fini de I. Comme cet dernier espace est dense dans $\ell^0_\infty(I, B)$, il suffit de vérifier que la valuation v définie ci-dessus sur $\ell^0_\infty(I, L)\otimes_L B$ est celle induite par l'inclusion de $\ell^0_\infty(I, L) \otimes_L B$ dans $\ell^0_\infty(I, B)$.

Soit donc $z = \sum_{j\in J} x_j \otimes y_j \in \ell^0_\infty(I,L)\otimes_L B$. On peut écrire x_j, de manière unique, sous la forme $x_j = \sum_{i\in I} a_{i,j}\delta_i$, avec $a_{i,j}\in L$, tendant vers 0 quand i tend vers l'infini. On a alors

$$\inf_{j\in J}(v_{\ell_\infty}(x_j)+v_B(y_j)) = \inf_{j\in J,\, i\in I}(v_p(a_{i,j})+v_B(y_j)) \le \inf_{i\in I} v_B\Big(\sum_{j\in J} a_{i,j}y_j\Big) = v_{\ell_\infty(I,B)}(z).$$

Ceci étant vrai pour toute écriture de z sous la forme $z=\sum_{j\in J} x_j\otimes y_j$, on en déduit l'inégalité $v(z)\le v_{\ell_\infty(I,B)}(z)$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, partons d'une écriture de z sous la forme $z=\sum_{j\in J} x_j\otimes y_j$, et choisissons une base e_r, $r\in R$, du sous-L-espace vectoriel (de dimension finie) de B engendré par les y_j, $j\in J$. Écrivons aussi, comme ci-dessus, x_j sous la forme $x_j=\sum_{i\in I} a_{i,j}\delta_i$, avec $a_{i,j}\in L$, tendant vers 0 quand i tend vers l'infini. Soient $b_{i,r}$, $r\in R$, les coordonnées de $z_i = \sum_{j\in J} a_{i,j}y_j$ dans la base des e_r, $r\in R$. Il existe $I_0\subset I$ fini, tel que $v_B(b_{i,r}e_r) > v(z)$ si $i\notin I_0$. Soit alors $a_r = \sum_{i\in I-I_0} b_{i,r}e_r \in \ell^0_\infty(I,L)$. On peut écrire z sous la forme

$$z=\sum_{r\in R} a_r\otimes e_r + \sum_{i\in I_0}\delta_i\otimes z_i.$$

On peut donc minorer $v(z)$ par

$$\min\Big(\inf_{r\in R} v_{\ell_\infty}(a_r)+v_B(e_r), \inf_{i\in I_0} v_B(z_i)\Big) \ge \min\Big(\inf_{r\in R} v_{\ell_\infty}(a_r)+v_B(e_r), v_{\ell_\infty(I,B)}(z)\Big),$$

et comme on a $v_{\ell_\infty}(a_r)+v_B(e_r) > v(z)$ par construction, on en déduit l'inégalité $v(z)\ge v_{\ell_\infty(I,B)}(z)$ que l'on cherchait à établir. Ceci permet de conclure.

Corollaire I.1.9. — (i) *Si B_1 et B_2 sont des L-banach et si $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ sont des bases orthonormales de B_1 et B_2, alors $(e_i\otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base orthonormale de $B_1\widehat{\otimes}_L B_2$.*

(ii) *Si B est un L-banach, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B, et si K est un sous-corps complet de $\mathbf{C}_p$ contenant L, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale du K-banach $K\widehat{\otimes}_L B$.*

I.2. Fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$

1. Polynômes binomiaux. — Soit $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,L)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans L. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, toute fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ est bornée. Ceci permet de munir $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,L)$ de la valuation $v_{\mathscr{C}^0}$ définie par $v_{\mathscr{C}^0}(\phi)=\inf_{x\in\mathbf{Z}_p} v_p(\phi(x))$, ce qui en fait un L-banach.

Si $n\in\mathbf{N}$, soit $\binom{x}{n}$ le polynôme défini par

$$\binom{x}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0\\ \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} & \text{si } n\ge 1.\end{cases}$$

Proposition I.2.1. — *Si $n\in\mathbf{N}$, alors $v_{\mathscr{C}^0}\big(\binom{x}{n}\big)=0$.*

Démonstration. — On a $\binom{n}{n} = 1$ et donc $v_{\mathscr{C}^0}\big(\binom{x}{n}\big) \leq 0$. D'autre part, si $k \in \mathbf{N}$, $\binom{n+k}{n}$ est le nombre de manière de choisir n objets parmi $n+k$ et est donc entier. On en déduit le fait que $v_p\big(\binom{n+k}{n}\big) \geq 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, et comme $n+\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$, cela implique que $v_p\big(\binom{x}{n}\big) \geq 0$ quel que soit $x \in \mathbf{Z}_p$, ce qui permet de conclure.

2. Coefficients de Mahler des fonctions continues. — On définit *la k-ième dérivée discrète* $\phi^{[k]}$ d'une fonction ϕ par récurrence à partir des formules

$$\phi^{[0]} = \phi \quad \text{et} \quad \phi^{[k+1]}(x) = \phi^{[k]}(x+1) - \phi^{[k]}(x),$$

et, si $n \in \mathbf{N}$, on définit le n-ième *coefficient de Mahler* $a_n(\phi)$ de ϕ, par la formule $a_n(\phi) = \phi^{[n]}(0)$. On a aussi

$$\phi^{[k]}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \phi(x+k-i) \quad \text{et} \quad a_n(\phi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \phi(n-i).$$

Lemme I.2.2. — *Si P_n désigne le polynôme binomial $\binom{x}{n}$, alors*
(i) $P_n^{[k]} = P_{n-k}$ *si $k \leq n$, et $P_n^{[k]} = 0$ si $k > n$;*
(ii) $a_k(P_n) = 0$ *si $k \neq n$, et $a_k(P_n) = 1$ si $k = n$.*

Démonstration. — Cela se démontre par une récurrence immédiate à partir de la formule $\binom{x+1}{n+1} - \binom{x}{n+1} = \binom{x}{n}$.

Théorème I.2.3. — (Mahler) (i) *Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, alors*
a) $\lim_{n\to+\infty} a_n(\phi) = 0$,
b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\phi)\binom{x}{n} = \phi(x)$ *quel que soit $x \in \mathbf{Z}_p$.*
(ii) *L'application $\phi \mapsto a(\phi) = (a_n(\phi))_{n\in\mathbf{N}}$ est une isométrie de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$.*

Corollaire I.2.4. — *Les $\binom{x}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Le corollaire est immédiat. Passons à la démonstration du théorème.

• La formule définissant $a_n(\phi)$ montre que l'on a $v_p(a_n(\phi)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. L'application $\phi \mapsto a(\phi)$ est donc continue de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\ell_\infty(\mathbf{N}, L)$, et on a $v_{\ell_\infty}(a(\phi)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi)$.

• Le sous-espace B de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des ϕ tels que $a(\phi) \in \ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$ est fermé dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ puisque $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$ est fermé dans $\ell_\infty(\mathbf{N}, L)$.

• Si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\binom{x}{n}$ converge normalement dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ en vertu de la proposition I.2.1, et la somme ϕ_a de cette série vérifie $v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a) \geq v_{\ell_\infty}(a)$. D'autre part, le lemme I.2.2 nous fournit la formule $\phi_a^{[k]}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}\binom{x}{n}$ et donc $a(\phi_a) = a$.

• L'application $\phi \mapsto a(\phi)$ est injective car « $a(\phi) = 0$ » implique « $\phi(k) = 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ », et $\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$.

Maintenant, si $\phi \in B$, on a $\phi - \phi_{a(\phi)} = 0$ puisque $a(\phi - \phi_{a(\phi)}) = 0$ et a est injective. Donc $\phi \in B$ implique que ϕ satisfait le b) de la propriété (i) du théorème. De plus, on a

$$v_{\ell_\infty}(a(\phi)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) = v_{\mathscr{C}^0}(\phi_{a(\phi)}) \geq v_{\ell_\infty}(a(\phi)),$$

ce qui montre que ϕ satisfait aussi la propriété (ii) du théorème. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver le a) du (i) ou, autrement dit, $B = \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme I.2.5. — *Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $v_{\mathscr{C}^0}(\phi^{[p^k]}) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) + 1$.*

Démonstration. — Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, ϕ est uniformément continue, et il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $v_p(\phi(x + p^k) - \phi(x)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) + 1$ quel que soit $x \in \mathbf{Z}_p$. Maintenant, on a

$$\phi^{[p^k]}(x) = \phi(x + p^k) - \phi(x) + \Big(\sum_{i=1}^{p^k-1} (-1)^i \binom{p^k}{i} \phi(x + p^k - i)\Big) + (1 + (-1)^{p^k})\phi(x).$$

Tous les termes de la somme $\sum_{i=1}^{p^k-1}$ ont une valuation $\geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) + 1$ car $\binom{p^k}{i}$ est divisible par p, et $(1 + (-1)^{p^k})\phi(x)$ est nul si $p \neq 2$ et de valuation $\geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) + 1$, si $p = 2$. Comme on a choisi k de telle sorte que $v_p(\phi(x + p^k) - \phi(x)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) + 1$ quel que soit $x \in \mathbf{Z}_p$, on a $v_{\mathscr{C}^0}(\phi^{[p^k]}) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi) + 1$, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de l'égalité $B = \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$. Une utilisation répétée du lemme précédent, alliée à l'identité $(\phi^{[k_1]})^{[k_2]} = \phi^{[k_1+k_2]}$, permet de montrer que, si $C \geq 0$ et si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $v_{\mathscr{C}^0}(\phi^{[N]}) \geq C$. Comme $v_p(a_n(\phi)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(\phi^{[N]})$, si $n \geq N$, cela montre que $a_n(\phi)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

I.3. Décomposition en ondelettes des fonctions continues

1. Fonctions localement constantes et fonctions continues. — Si $h \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans L dont la restriction à $a + p^h\mathbf{Z}_p$ est constante, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. On note $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, c'est la limite inductive (i.e. la réunion croissante) des $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, pour $h \in \mathbf{N}$.

Lemme I.3.1. — *$\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ est dense dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — $\mathbf{Z}_p$ étant compact, toute fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ est uniformément continue. Autrement dit, si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ et $C \geq 0$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que, si $v_p(x - y) \geq m$, alors $v_p(\phi(x) - \phi(y)) \geq C$. Soit ϕ_m la fonction localement constante $\sum_{i=0}^{p^m-1} \phi(i)\mathbf{1}_{i+p^m\mathbf{Z}_p}$. Si $x \in \mathbf{Z}_p$, il existe $i \in \{0, \dots, p^m - 1\}$ tel que $x \in i + p^m\mathbf{Z}_p$ et

$v_p(\phi(x)-\phi_m(x)) = v_p(\phi(x)-\phi(i)) \geq C$ par construction de m ; on en déduit que $v_{\mathscr{C}^0}(\phi-\phi_m) \geq C$, ce qui permet de conclure.

Si $i \in \mathbf{N}$, on note $\ell(i)$ le plus petit entier n vérifiant $p^n > i$. On a donc

$$\ell(0) = 0 \quad \text{et} \quad \ell(i) = [\frac{\log i}{\log p}] + 1, \quad \text{si } i \geq 1.$$

Proposition I.3.2. — (i) *Les* $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, *pour* $0 \leq i \leq p^h - 1$, *forment une base de* $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

(ii) *Les* $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, *pour* $i \in \mathbf{N}$, *forment une base de* $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$.

(iii) *Les* $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, *pour* $i \in \mathbf{N}$, *forment une base orthonormale de* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — Par définition, les $\mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}$, pour $0 \leq i \leq p^h - 1$, forment une base de $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme

$$\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p} = \sum_{j=0}^{p^{h-\ell(i)}-1} \mathbf{1}_{i+jp^{\ell(i)}p^h\mathbf{Z}_p}, \quad \text{si } i \leq p^h - 1,$$

la matrice permettant de passer des $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$ aux $\mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}$, pour $0 \leq i \leq p^h - 1$, est triangulaire, à coefficients entiers, avec des 1 sur la diagonale. On en déduit le (i), le (ii), ainsi que le fait que $(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i \mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$ induit une isométrie de l'espace des suites nulles en dehors d'un ensemble fini sur $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ (muni de la valuation $v_{\mathscr{C}^0}$). Comme l'espace des suites nulles en dehors d'un ensemble fini est dense dans $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$, l'application ci-dessus se prolonge en une isométrie de $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$ sur l'adhérence de $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, et comme cette adhérence n'est autre que $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, d'après le lemme I.3.1, cela permet de conclure.

Définition I.3.3. — On appelle *base d'ondelettes* la base orthonormale de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ constituées des $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, pour $i \in \mathbf{N}$. Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, et $\phi = \sum_{i\in\mathbf{N}} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$ est la décomposition de ϕ en ondelettes, les $b_i(\phi)$, $i \in \mathbf{N}$, sont les *coefficients d'amplitude* de ϕ.

2. Coefficients de Mahler des fonctions localement constantes. — Si $z \in L$ vérifie $v_p(z-1) > 0$, la série $\phi_z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n}(z-1)^n$ converge normalement d'après la proposition I.2.1 et définit donc une fonction continue $\phi_z(x)$ de $x \in \mathbf{Z}_p$. D'autre part, si $k \in \mathbf{N}$, on a $\phi_z(k) = z^k$, ce qui nous permet de noter de manière plus parlante $x \mapsto z^x$ la fonction $x \mapsto \phi_z(x)$. On a $z^{x+y} = z^x z^y$ quels que soient $x, y \in \mathbf{Z}_p$ car cette formule est vraie si $x, y \in \mathbf{N}$, et $\mathbf{N}^2$ est dense dans $\mathbf{Z}_p^2$.

Un cas particulièrement utile est celui où z est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p. Si $z^{p^n} = 1$, on a $z^{x+p^n k} = z^x$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et donc $z^x = z^y$, si $y \in x + p^n\mathbf{Z}_p$, ce qui fait que la fonction z^x est localement constante.

Proposition I.3.4. — (i) *Si L contient $\boldsymbol{\mu}_{p^h}$, les ζ^x, pour $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^h}$, forment une base de* $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

(ii) *Si L contient $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, les ζ^x, pour $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, forment une base de* $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — On a

$$\sum_{\zeta^{p^h}=1} \zeta^x = \begin{cases} p^h & \text{si } x \in p^h\mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la fonction caractéristique de $a + p^h\mathbf{Z}_p$ est donc $\frac{1}{p^h}\sum_{\zeta^{p^h}=1} \zeta^{x-a}$. Ceci montre que les ζ^x, pour $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^h}$, engendrent $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et comme il y en a le bon nombre, cela permet de conclure.

Si $i \in \mathbf{N}$, et si $j \in \mathbf{N}$, posons

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \zeta^{-i}(\zeta - 1)^j.$$

Lemme I.3.5. — *On a*

$$\begin{cases} \alpha_{i,j} = 0 & \text{si } j < i, \\ \alpha_{i,j} = 1 & \text{si } i = j, \\ v_p(\alpha_{i,j}) \geq \left[\frac{j - p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)} - p^{\ell(i)-1}}\right] & \text{si } j \geq i. \end{cases}$$

Démonstration. — Si $j < i$, on a $\zeta^{-i}(\zeta-1)^j = \sum_{k=-i}^{-(i-j)} \binom{j}{k}\zeta^k$, et comme $i < p^{\ell(i)}$, la condition $-i \leq k \leq -(i-j)$ implique que k n'est pas un multiple de $p^{\ell(i)}$. En sommant sur $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}$, on obtient 0 comme annoncé.

Si $j = i$, le même raisonnement montre que seul $k = 0$ va contribuer, et donc $\alpha_{i,j} = 1$.

Passons au cas $j > i$. Comme $\alpha_{0,j} = 0$, si $j \geq 1$, on peut se contenter de traiter le cas $i \geq 1$. Notons, comme d'habitude, ζ_{p^n} une racine primitive p^n-ième de l'unité, et F_n le corps $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Ceci permet de réécrire $\alpha_{i,j}$ sous la forme

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{n=1}^{\ell(i)} \mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}\big(\zeta_{p^n}^{-i}(\zeta_{p^n} - 1)^j\big).$$

Comme $v_p(\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}(x)) \geq n + \left[v_p(x) - \frac{1}{p-1}\right]$, et comme $v_p(\zeta_{p^n} - 1) = \frac{1}{p^n - p^{n-1}}$, on obtient

$$v_p(\alpha_{i,j}) \geq \inf_{1 \leq n \leq \ell(i)} \Big(n - \ell(i) + \Big[\frac{j}{p^n - p^{n-1}} - \frac{1}{p-1}\Big]\Big) = \Big[\frac{j - p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)} - p^{\ell(i)-1}}\Big],$$

car la condition $j > i \geq p^{\ell(i)-1}$ fait que le minimum ci-dessus est atteint pour $n = \ell(i)$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.3.6. — On peut démontrer l'égalité $B = \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ du théorème de Mahler en utilisant ce qui précède. On déduit de l'identité

$$\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \zeta^{x-i} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \sum_{j=0}^{+\infty} \zeta^{-i}(\zeta-1)^j \binom{x}{j},$$

la formule $a_n(\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}) = \alpha_{i,n}$. Comme $v_p(\alpha_{i,n})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (lemme I.3.5), cela prouve que B contient les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, et donc aussi $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme B est fermé et $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ est dense dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, cela permet de conclure.

3. Coefficients d'amplitude des fonctions localement constantes. — Les résultats de ce n° serviront dans l'étude des coefficients de Mahler des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. Soit $\phi \in \mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et soient

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{p^h-1} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(\phi)\binom{x}{j}$$

les décompositions en ondelettes et de Mahler de ϕ.

Proposition I.3.7. — *Si $j \leq p^h-1$, alors $v_p(b_j(\phi)) \geq \inf_{i\leq j}\big(v_p(a_i(\phi))+\ell(j)-\ell(i)\big)$.*

Démonstration. — En utilisant la formule

$$\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \zeta^{x-i} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \sum_{j=0}^{+\infty} \zeta^{-i}(\zeta-1)^j \binom{x}{j},$$

on obtient $a_j(\phi) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \alpha_{i,j} b_i(\phi)$. En utilisant le lemme I.3.5, on en déduit la formule $b_j(\phi) = a_j(\phi) - \sum_{i<j} \alpha_{i,j} b_i(\phi)$, et la minoration

$$v_p(b_j(\phi)) \geq \inf\Big(v_p(a_j(\phi)), \inf_{i<j}\Big(v_p(b_i(\phi)) + \Big[\frac{j-p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)}-p^{\ell(i)-1}}\Big]\Big)\Big).$$

Comme

$$\Big[\frac{j-p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)}-p^{\ell(i)-1}}\Big] =\geq \Big[\frac{p^{\ell(j)-1}-p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)}-p^{\ell(i)-1}}\Big] \geq \Big[\frac{p^{\ell(j)-\ell(i)}-1}{p-1}\Big] \geq \ell(j)-\ell(i),$$

une récurrence sur j permet de conclure.

Proposition I.3.8. — *Si $\ell(i) = h$, alors $v_p(b_i(\phi)) \geq \big(\inf_{\ell(j)\geq h} v_p(a_j(\phi))\big) - 1$.*

Démonstration. — Soient c_j, pour $j \in \mathbf{N}$, les coefficients de Mahler de la fonction continue $x \mapsto \phi(x+p^{h-1}) - \phi(x)$. Si on note $P_{k,h}$ le polynome défini par $P_{k,h}(x) = \binom{x+p^{h-1}}{k} - \binom{x}{k}$, on a $c_j = \sum_{k>j} a_k(\phi)\, a_j(P_{k,h})$. Comme les coefficients de Mahler de $P_{k,h}$ sont à valeurs dans $\mathbf{Z}$ puisque $P_{k,h}(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$, on en déduit l'inégalité $\inf_{\ell(j)=h} v_p(c_j) \geq \inf_{\ell(j)\geq h} v_p(a_j(\phi))$, ce qui prouve que démontrer l'inégalité $v_p(b_i(\phi)) \geq \inf_{\ell(j)=h} v_p(c_j) - 1$ suffit pour démontrer la proposition.

Comme $\zeta^{x+p^{h-1}-i} - \zeta^{x-i} = 0$ si $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{h-1}}$, on obtient $c_j = \sum_{i=0}^{p^h-1} \beta_{i,j} b_i(\phi)$, avec $\beta_{i,j} = 0$ si $\ell(i) \leq h-1$, et

$$\beta_{i,j} = \frac{1}{p^h} \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^h} - \boldsymbol{\mu}_{p^{h-1}}} \zeta^{-i}(\zeta^{p^{h-1}} - 1)(\zeta - 1)^j = \frac{1}{p^h} \mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}\big(\zeta_{p^h}^{-i}(\zeta_p - 1)(\zeta_{p^h} - 1)^j\big).$$

Pour démontrer l'inégalité voulue, notons I l'intervalle $[p^{h-1}, p^h - 1]$ de $\mathbf{N}$, notons B la matrice $\{1\} \times I$ des $b_i(\phi)$, pour $i \in I$, C celle des c_j, pour $j \in I$, et M celle des $\beta_{i,j}$, avec $(i,j) \in I \times I$. On a alors $C = BM$.

Par ailleurs, si $i \in I$, posons $u_i = (\zeta_{p^h} - 1)^i$. Les u_i, pour $i \in I$, forment une base de $(\zeta_p - 1)\mathscr{O}_{F_h}$ sur $\mathbf{Z}_p$. On note $(u_i^*)_{i \in I}$, la base de F_h sur $\mathbf{Q}_p$ duale de la base $(u_i)_{i \in I}$. Les u_i^*, pour $i \in I$, forment donc une base de $p^{-h}\mathscr{O}_F$ sur $\mathbf{Z}_p$. De même, si $j \in I$, posons $v_j = (\zeta_p - 1)\zeta_{p^h}^{-j}$. Les v_j, pour $j \in I$, forment une base de $(\zeta_p - 1)\mathscr{O}_{F_h}$ sur $\mathbf{Z}_p$. On note $(v_j^*)_{j \in I}$, la base de F_h sur $\mathbf{Q}_p$ duale de la base $(v_j)_{j \in I}$. Les v_j^*, pour $j \in I$, forment donc aussi une base de $p^{-h}\mathscr{O}_F$ sur $\mathbf{Z}_p$.

Maintenant, comme M est la matrice des $p^{-h}\mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}(u_i v_j)$, pour $(i,j) \in I \times I$, la matrice inverse de M est celle des $p^h \mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}(u_j^* v_i^*)$, pour $(i,j) \in I \times I$. Elle est donc à coefficients dans $p^h \mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}(p^{-2h}\mathscr{O}_{F_h}) = p^{-1}\mathbf{Z}_p$. Ceci permet de conclure.

I.4. Fonctions localement analytiques

1. Fonctions analytiques sur un disque fermé. — Si $a \in L$, et $r \in \mathbf{R}$, soit $B(a,r)$ le disque fermé $\{x \in \mathbf{C}_p,\ v_p(x-a) \geq r\}$. Une fonction $\phi : B(a,r) \to \mathbf{C}_p$ est *L-analytique* s'il existe une suite $a_k(\phi, a)$, $k \in \mathbf{N}$, d'éléments de L, telle que $v_p(a_k(\phi,a)) + kr$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, et $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\phi,a)(x-a)^k$ quel que soit $x \in B(a,r)$. On note $\mathrm{An}(B(a,r), L)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $B(a,r)$, et on munit $\mathrm{An}(B(a,r), L)$ de la valuation $v_{B(a,r)}$ définie par

$$v_{B(a,r)}(\phi) = \inf_{k \in \mathbf{N}} v_p(a_k(\phi,a)) + kr,$$

qui en fait un L-banach.

Remarque I.4.1. — Les $\mathbf{1}_{B(a,r)} \frac{(x-a)^k}{p^{[kr]}}$, pour $k \in \mathbf{N}$, forment une base de Banach de $\mathrm{An}(B(a,r), L)$, et même une base orthonormale si $r \in \mathbf{Z}$. On en déduit le fait que, si K est un sous-corps complet de L contenant a, alors

$$\mathrm{An}(B(a,r), L) = L \widehat{\otimes}_K \mathrm{An}(B(a,r), K).$$

Proposition I.4.2. — *Si $\phi_1 \in \mathrm{An}(B(a,r), L)$, et si $\phi_2 \in \mathrm{An}(B(a,r), L)$, alors $\phi_1\phi_2 \in \mathrm{An}(B(a,r), L)$ et $v_{B(a,r)}(\phi_1\phi_2) = v_{B(a,r)}(\phi_1) + v_{B(a,r)}(\phi_2)$.*

Démonstration. — Soient $a_k = a_k(\phi_1, a)$, $b_k = a_k(\phi_2, a)$ et $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$. On a

$$\begin{aligned} v_p(c_k) + kr &\geq \inf_{0 \leq i \leq k} \big((v_p(a_i) + ir) + (v_p(b_{k-i}) + (k-i)r)\big) \\ &\geq \inf(v_{B(a,r)}(\phi_1) + \inf_{j \geq k/2}(v_p(b_j) + jr), v_{B(a,r)}(\phi_2) + \inf_{i \geq k/2}(v_p(a_i) + ir), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $v_p(c_k)+kr \to +\infty$ quand $k \to +\infty$, que $\phi_1\phi_2 \in \mathrm{An}(B(a,r),L)$, et que $v_{B(a,r)}(\phi_1\phi_2) \geq v_{B(a,r)}(\phi_1)+v_{B(a,r)}(\phi_2)$.

Maintenant, soit i_0 (resp. j_0) le plus petit entier i (resp. j) tel que

$$v_p(a_i)+ir = v_{B(a,r)}(\phi_1) \quad (\text{resp. } v_p(b_j)+jr = v_{B(a,r)}(\phi_2)).$$

Si $k_0 = i_0+j_0$, alors $v_p(a_ib_{k_0-i})+k_0r > v_{B(a,r)}(\phi_1)+v_{B(a,r)}(\phi_2)$ si $i \neq i_0$, et donc $v_p(c_{k_0})+k_0r = v_p(a_{i_0}b_{j_0})+k_0r = v_{B(a,r)}(\phi_1)+v_{B(a,r)}(\phi_2)$. On en déduit l'inégalité $v_{B(a,r)}(\phi_1\phi_2) \leq v_{B(a,r)}(\phi_1)+v_{B(a,r)}(\phi_2)$, ce qui permet de conclure.

Proposition I.4.3. — *Si $\phi \in \mathrm{An}(B(a,r),L)$, alors*

$$v_{B(a,r)}(\phi) = \inf_{x\in B(a,r)} v_p(\phi(x)).$$

Démonstration. — Commençons par supposer que l'on a $a=0$ et $r=0$. Alors $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k$, où $v_p(a_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. L'inégalité $\inf_{x\in B(a,r)} v_p(\phi(x)) \geq \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) = v_{B(0,0)}(\phi)$ est immédiate.

Pour démontrer l'inégalité $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) \geq \inf_{x\in B(a,r)} v_p(\phi(x))$, commençons par remarquer que $v_p(a_k)$ atteint son minimum pour un certain $k_0 \in \mathbf{N}$. En divisant tout par a_{k_0}, on se ramène au cas où $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) = 0$. Soit alors $\overline{\phi}$ la réduction de ϕ modulo $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$. Ceci fait de $\overline{\phi}$ un élément non nul de $\overline{\mathbf{F}}_p[x]$, et, si $x \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ ne se réduit pas en un zéro de $\overline{\phi}$ modulo $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$, on a $\overline{\phi(x)} \neq 0$, ou encore $v_p(\phi(x)) = 0$. On en déduit l'égalité $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) = \inf_{x\in B(a,r)} v_p(\phi(x))$.

Maintenant, s'il existe $c \in \mathbf{C}_p$ tel que $v_p(c) = r$, on peut appliquer ce qui précède à $g \in \mathrm{An}(D(0,0),L)$ définie par $g(x) = \phi(cx+a)$, et dans le cas général, on écrit $B(a,r)$ comme la réunion croissante de $B(a,r_n)$, avec $r_n \in v_p(\mathbf{C}_p)$ tendant vers r en décroissant, pour conclure.

2. Fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. — Si $h \in \mathbf{N}$, soit $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$ l'espace des fonctions $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ dont la restriction à $a+p^h\mathbf{Z}_p$ est la restriction d'une fonction L-analytique $\phi_{a,h}$ sur $B(a,h)$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. On munit $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$ de la valuation v_{LA_h} définie par

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{a\in\mathbf{Z}_p} v_{B(a,h)}(\phi_{a,h}),$$

qui en fait un L-banach. D'après la proposition I.4.3, si S contient un système de représentants de $\mathbf{Z}_p/p^h\mathbf{Z}_p$, on a aussi $v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{a\in S} v_{B(a,h)}(\phi_{a,h})$.

Soit $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p,L)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, c'est la limite inductive des $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$, $h \in \mathbf{N}$, et on le munit de la topologie de la limite inductive.

Remarque I.4.4. — En revenant à la définition de $v_{B(a,h)}$, on peut aussi donner la description suivante de v_{LA_h} : si $a \in \mathbf{Z}_p$, il existe une suite $a_k(\phi,a)$, $k \in \mathbf{N}$, d'éléments de L, telle que l'on ait $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\phi, a)\big(\frac{x-a}{p^h}\big)^k$, quel que soit $x \in a + p^h\mathbf{Z}_p$. On a alors $v_{B(a,h)}(\phi_{a,h}) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi, a))$, et donc

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{a\in S} \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi, a)),$$

si $S \subset \mathbf{Z}_p$ contient un système de représentants de $\mathbf{Z}_p/p^h\mathbf{Z}_p$.

Étant donné h, on peut écrire tout entier n de manière unique sous la forme

$$n = (m(n) + 1)p^h - i(n)$$

avec $1 \leq i(n) \leq p^h$ et $m(n) \in \mathbf{N}$. Soit alors $e_{h,n}(x)$ la fonction

$$e_{h,n}(x) = \mathbf{1}_{n+p^h\mathbf{Z}_p}(x)\Big(\frac{x + i(n)}{p^h}\Big)^{m(n)}.$$

Lemme I.4.5. — *Les $e_{h,n}$ pour $n \in \mathbf{N}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. Plus précisément, si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$ et si $\phi_i(x) = \phi(-i + p^h x)$, alors :*
- *ϕ_i est analytique sur $\mathbf{Z}_p$ et donc $\phi_i(x) = \sum_{m\in\mathbf{N}} \alpha_{i,m} x^m$, où $\alpha_{i,m} \to 0$,*
- *$\phi = \sum_{i=1}^{p^h} \sum_{m\in\mathbf{N}} \alpha_{i,m} e_{h,(m+1)p^h-i} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_{i(n),m(n)} e_{h,n}$,*
- *$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{n\in\mathbf{N}} v_p(\alpha_{i(n),m(n)})$.*

Démonstration. — Cela suit de l'identité $\phi(x) = \sum_{i=1}^{p^h} \mathbf{1}_{-i+p^h\mathbf{Z}_p}(x)\phi_i\big(\frac{x+i}{p^h}\big)$ et de la description de la valuation v_{LA_h} donnée dans la rem. I.4.4, car $\{-i,\ 1 \leq i \leq p^h\}$ est un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo $p^h\mathbf{Z}_p$.

Corollaire I.4.6. — *On a $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L) = L\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ quel que soit le sous-corps fermé L de $\mathbf{C}_p$.*

3. Coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques. — Le résultat suivant, dû à Amice, permet de décrire les fonctions localement analytiques en termes de leurs coefficients de Mahler.

Théorème I.4.7. — *Les $[\frac{n}{p^h}]!\binom{x}{n}$ pour $n \in \mathbf{N}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Corollaire I.4.8. — *Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *$\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$;*
- *$\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) > 0$.*

Démonstration. — Il existe h tel que $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et alors, d'après le th. I.4.7, on a $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) \geq \frac{1}{(p-1)p^h}$. Réciproquement, si $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) > 0$, il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) > \frac{1}{(p-1)p^h}$. Alors $([\frac{n}{p^h}]!)^{-1} a_n(\phi)$ tend vers 0 et $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

Passons à la démonstration du théorème. Posons $g_n(x) = [\frac{n}{p^h}]!\binom{x}{n}$. Notre but est de prouver que les g_n, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthormale de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. Pour cela, nous allons prouver que :

• g_n appartient à la boule unité B_h de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$,

• la matrice exprimant les réductions $\overline{g}_n$, pour $n \leq (m+1)p^h - 1$, en fonction des $\overline{e}_{h,n}$, pour $n \leq (m+1)p^h - 1$, est une matrice inversible, pour tout $m \in \mathbf{N}$ (ces deux derniers points sont une conséquence du lemme I.4.9, comme il est expliqué juste avant la démonstration dudit lemme).

D'après le lemme I.4.5, les $e_{h,n}$, pour $n \in \mathbf{N}$ forment une base orthormale de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, ce qui implique, d'après la prop. I.1.5, que les $\overline{e}_{h,n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base algébrique de B_h/pB_h sur $\mathbf{F}_p$. Le second point implique alors qu'il en est de même des $\overline{g}_n$, pour $n \in \mathbf{N}$, ce qui, d'après la prop. I.1.5, implique que les g_n, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthormale de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, ce que l'on veut démontrer.

Si $j \in \{1, \dots, p^h\}$, soit $g_{n,j}$ le polynôme défini par $g_{n,j}(x) = g_n(-j + p^h x)$. On a donc

$$g_{n,j}(x) = [\frac{n}{p^h}]!\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(-j-k+p^h x).$$

Lemme I.4.9. — (i) *$g_{n,j}$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$.*

(ii) *Sa réduction $\overline{g}_{n,j}$ modulo p vérifie :*

• *$\overline{g}_{n,j} = 0$ si $j > i(n)$,*

• *$\deg(\overline{g}_{n,j}) = m(n)$ si $j = i(n)$,*

• *$\deg(\overline{g}_{n,j}) \leq m(n)$ si $j < i(n)$.*

Ce lemme permet de terminer la démonstration du th. I.4.7. En effet, le (i) implique que g_n appartient à la boule unité de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. Le (ii) se traduit par l'existence d'éléments $\alpha_{j,m} \in \mathbf{F}_p$, pour $m \leq m(n)$, nuls si $j > i(n)$, tels que $\overline{g}_{n,j} = \sum_{m=0}^{m(n)} \alpha_{j,m}x^m$. D'après le lemme I.4.5, on a alors $\overline{g}_n = \sum_{m(k)\leq m(n)} \alpha_{i(k),m(k)}\overline{e}_{h,k}$. Maintenant, si $n \leq (m+1)p^h - 1$, alors $m(k) \leq m(n)$ implique que $k \leq (m+1)p^h - 1$. Il en résulte que les $\overline{g}_n$, pour $n \leq (m+1)p^h - 1$, s'expriment en termes des $\overline{e}_{h,k}$, pour $k \leq (m+1)p^h - 1$. On note M_m la matrice ainsi obtenue. Le (ii) du lemme implique alors que si on découpe la matrice M_m en blocs de taille $p^h \times p^h$, on obtient une matrice triangulaire supérieure par blocs et chacun des blocs diagonaux est triangulaire inférieur avec des éléments inversibles sur la diagonale (cette inversibilité résulte du second point du lemme). La matrice M_m est donc inversible, ce qui montre que le lemme I.4.9 fournit les points manquant pour démontrer le th. I.4.7.

4. Démonstration du lemme I.4.9. — Soit $K_{n,j} = \{k \leq n-1,\ v_p(j+k) \geq h\}$. L'application $k \mapsto j+k$ induisant une bijection de $K_{n,j}$ sur l'ensemble des entiers de $[j, j+n-1] = [0, j+n-1] - [0, j-1]$ divisibles par p^h, on a $|K_{n,j}| = [\frac{j+n-1}{p^h}] - [\frac{j-1}{p^h}]$, et donc $|K_{n,j}| = m(n)+1$ si $j > i(n)$ et $|K_{n,j}| = m(n)$ si $j \leq i(n)$.

On a $g_{n,j} = c_{n,j} f_{n,j}$, où $c_{n,j} \in \mathbf{Q}^*$ et

$$f_{n,j} = \prod_{k \in K_{n,j}} \big(x - \frac{j+k}{p^h}\big) \prod_{k \notin K_{n,j}} \big(1 - \frac{p^h x}{j+k}\big) \in \mathbf{Z}_p[x]$$

a pour réduction $\overline{f}_{n,j} = \prod_{k \in K_{n,j}} \big(x - \beta_k\big)$ modulo p, où $\beta_k \in \mathbf{F}_p$ est la réduction modulo p de $\frac{j+k}{p^h}$. Comme le degré de $\overline{f}_{n,j}$ est le cardinal de $K_{n,j}$, le lemme est équivalent aux résultats suivants :

- $v_p(c_{n,j}) \geq 0$, pour tout j,
- $v_p(c_{n,j}) = 0$, si $j = i(n)$,
- $v_p(c_{n,j}) > 0$, si $j > i(n)$.

On obtient la relation $c_{n,j} \prod_{k \in K_{n,j}} \big(\frac{-j-k}{p^h}\big) = [\frac{n}{p^h}]! \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (-j-k)$ en identifiant les termes constants. On a donc

$$c_{n,j} = [\frac{n}{p^h}]! \frac{1}{n!} \prod_{k \in K_{n,j}} p^h \prod_{k \notin K_{n,j}} (-j-k).$$

$$v_p(c_{n,j}) = v_p([\frac{n}{p^h}]!) - v_p(n!) + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \inf(v_p(j+k), h).$$

En utilisant l'identité $v_p(n!) - v_p([\frac{n}{p^h}]!) = \sum_{\ell=1}^h \big[\frac{n}{p^\ell}\big]$, et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \inf(v_p(j+k), h) = \sum_{\ell=1}^h \big|\{k \leq n-1,\ v_p(j+k) \geq \ell\}\big| = \sum_{\ell=1}^h \Big([\frac{n+j-1}{p^\ell}] - [\frac{j-1}{p^\ell}]\Big),$$

on en déduit la formule

$$v_p(c_{n,j}) = \sum_{\ell=1}^h \Big([\frac{n+j-1}{p^\ell}] - [\frac{j-1}{p^\ell}] - [\frac{n}{p^\ell}]\Big).$$

Comme $[x+y] \geq [x]+[y]$, chacun des termes de la somme est ≥ 0, et donc $v_p(c_{n,j}) \geq 0$, ce qui démontre le premier point.

Pour démontrer le second, on utilise la formule $-[\frac{-a}{b}] = [\frac{a-1}{b}] + 1$, valable quels que soient $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N} - \{0\}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} v_p(c_{n,i}) &= \sum_{\ell=1}^h \Big([\frac{m(n)p^h - 1}{p^\ell}] - [\frac{i(n)-1}{p^\ell}] - [\frac{m(n)p^h - i(n)}{p^\ell}]\Big) \\ &= \sum_{\ell=1}^h \Big(\big(m(n)p^{h-\ell} - 1\big) + \big(1 + [\frac{-i(n)}{p^\ell}]\big) - \big(m(n)p^{h-\ell} + [\frac{-i(n)}{p^\ell}]\big)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, pour démontrer le troisième, constatons que $[\frac{n+j-1}{p^h}] - [\frac{j-1}{p^h}] - [\frac{n}{p^h}] = 1$, si $j > i(n)$, et donc $v_p(c_{n,j}) \geq 1$.

Ceci permet de conclure.

I.5. Fonctions de classe $\mathscr{C}^r$

1. Fonctions dérivables et fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Une fonction $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ est *dérivable en* $x_0 \in \mathbf{Z}_p$, si la quantité $\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. La limite est alors notée $\phi'(x_0)$. Une fonction est *dérivable à l'ordre* 1 si elle est dérivable en tout $x_0 \in \mathbf{Z}_p$; une fonction dérivable à l'ordre 1 est en particulier continue. Plus généralement, on définit par récurrence sur k la notion de fonction dérivable à l'ordre k : ϕ est *dérivable à l'ordre* k si elle est dérivable à l'ordre $k-1$, et si sa dérivée $(k-1)$-ième est dérivable à l'ordre 1.

Si $r \geq 0$, on dit que $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ *est de classe* $\mathscr{C}^r$, s'il existe des fonctions $\phi^{(j)} : \mathbf{Z}_p \to L$, pour $0 \leq j \leq [r]$, telles que, si l'on définit $\varepsilon_{\phi,r} : \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \to L$ et $C_{\phi,r} : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, par

$$\varepsilon_{\phi,r}(x,y) = \phi(x+y) - \sum_{j=0}^{[r]} \phi^{(j)}(x)\frac{y^j}{j!} \quad \text{et} \quad C_{\phi,r}(h) = \inf_{x\in\mathbf{Z}_p,\, y\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) - rh,$$

alors $C_{\phi,r}(h)$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers $+\infty$.

Remarque I.5.1. — En prenant $y=0$, on voit que, si $r \geq 0$, et si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors $\phi^{(0)} = \phi$ et ϕ est continue. Dans le cas $r=0$, on retombe donc sur la définition de fonction uniformément continue et, $\mathbf{Z}_p$ étant compact, une fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ si et seulement si elle est continue.

On note $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ qui sont de classe $\mathscr{C}^r$. On munit $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ de la valuation $v'_{\mathscr{C}^r}$ définie par

$$v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) = \inf\big(\inf_{0\leq j\leq [r],\ x\in\mathbf{Z}_p} v_p(\frac{\phi^{(j)}(x)}{j!}),\ \inf_{x,y\in\mathbf{Z}_p} v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) - r v_p(y)\big),$$

ce qui en fait un L-banach.

Remarque I.5.2. — Sur un intervalle compact de $\mathbf{R}$, une fonction dérivable à l'ordre k, dont la dérivée k-ième est continue, est de classe $\mathscr{C}^k$ avec les définitions ci-dessus (en remplaçant la valuation p-adique par la norme usuelle). Sur $\mathbf{Z}_p$, l'exemple suivant montre qu'il n'en est rien. Tout élément x de $\mathbf{Z}_p$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n a_n(x)$, avec $a_n(x) \in \{0, \dots, p-1\}$, ce qui permet de définir une fonction $\phi : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ grâce à la formule $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{2n} a_n(x)$. On a alors $v_p(\phi(x) - \phi(y)) \geq 2v_p(x-y)$ quels que soient $x, y \in \mathbf{Z}_p$, ce qui montre que ϕ est dérivable, de dérivée nulle, en tout point, (elle est donc dérivable à n'importe quel ordre) bien que ϕ ne soit localement constante au voisinage d'aucun point. Or il est facile de voir que ϕ n'a de développement limité à l'ordre 2 en aucun point.

2. Propriétés locales des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Le but de ce n° est de montrer que, si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors les $\phi^{(j)}$ sont les dérivées successives de ϕ et donc que l'on retombe sur le développement limité naturel de ϕ.

Lemme I.5.3. — *Soit $C(N)=\sum_{n=1}^N v_p(n!)$, et soit a_k, pour $0\leq k\leq N$, une famille d'éléments de L. Alors, quel que soit $h\in\mathbf{Z}$,*

$$\inf_{0\leq k\leq N}\big(v_p(a_k)+kh\big)\geq \inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p\Big(\sum_{k=0}^N a_k\frac{x^k}{k!}\Big)-C(N).$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur N, le résultat étant trivial si $N=0$. Si $N\geq 1$, soient $P,Q\in L[x]$ définis par

$$P(x)=\sum_{k=0}^N a_k\frac{x^k}{k!}\quad\text{et}\quad Q(x)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\frac{x^k}{k!}.$$

Alors, quels que soient $x\in\mathbf{Q}_p$ et $h\in\mathbf{Z}$, on a

$$a_N=p^{-Nh}\sum_{j=0}^N(-1)^{N-j}\binom{N}{j}P(x+jp^h).$$

En prenant $x\in p^h\mathbf{Z}_p$, on obtient la minoration $v_p(a_N)+Nh\geq\inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p}v_p(P(x))$. On en tire la minoration $v_p(Q(x))\geq\inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p}v_p(P(x))-v_p(N!)$, et l'hypothèse de récurrence implique que

$$\inf_{0\leq k\leq N-1}\big(v_p(a_k)+kh\big)\geq\inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p}v_p(Q(x))-C(N-1)\geq\inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p}v_p(P(x))-C(N),$$

ce qui permet de conclure.

Proposition I.5.4. — *Si $r\geq 1$, et si $\phi\in\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$, alors ϕ est dérivable en tout point. De plus,*

(a) *$\phi'\in\mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p,L)$ et il existe $C_0(r)\in\mathbf{R}$ tel que $v'_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi')\geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C_0(r)$, quel que soit $\phi\in\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$.*

(b) *$(\phi')^{(j)}=\phi^{(j+1)}$ si $j\leq r-1$.*

Démonstration. — Il est clair sur la définition que $\lim_{y\to 0}\frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{y}=\phi^{(1)}(x)$, si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, et donc que ϕ est dérivable en tout point, de dérivée $\phi'(x)=\phi^{(1)}(x)$. Par ailleurs, en développant $\varepsilon_{\phi,r}(x,y+z)-\varepsilon_{\phi,r}(x+y,z)$, qui est égal à

$$\Big(\phi(x+y+z)-\sum_{j=0}^{[r]}\phi^{(j)}(x)\frac{(y+z)^j}{j!}\Big)-\Big(\phi(x+y+z)-\sum_{j=0}^{[r]}\phi^{(j)}(x+y)\frac{z^j}{j!}\Big),$$

on obtient, si $v_p(z)\geq h$ et $v_p(y)\geq h$, la minoration

$$v_p\Big(\sum_{j=0}^{[r]}\frac{z^j}{j!}\Big(\phi^{(j)}(x+y)-\sum_{k=0}^{[r]-j}\phi^{(j+k)}(x)\frac{y^k}{k!}\Big)\Big)\geq rh+C_{\phi,r}(h).$$

D'après le lemme I.5.3, cela implique que, si $v_p(y) \geq h$, alors

$$v_p\Big(\phi^{(j)}(x+y) - \sum_{k=0}^{[r]-j} \phi^{(j+k)}(x)\frac{y^k}{k!}\Big) \geq (r-j)h + C_{\phi,r}(h) - C([r]).$$

On en déduit, si $0 \leq j \leq [r]$, l'appartenance de $\phi^{(j)}$ à $\mathscr{C}^{r-j}(\mathbf{Z}_p, L)$, la minoration $v'_{\mathscr{C}^{r-j}}(\phi^{(j)}) \geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C([r])$, et l'identité $(\phi^{(j)})^{(k)} = \phi^{(j+k)}$ si $j+k \leq [r]$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.5.5. — (i) Une récurrence immédiate montre, ô surprise, que $\phi^{(j)}$ est la dérivée j-ième de ϕ. De plus la minoration $v'_{\mathscr{C}^{r-j}}(\phi^{(j)}) \geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C([r])$, obtenue au cours de la démonstration de la proposition I.5.4 est meilleure que celle que l'on obtiendrait par récurrence en utilisant la prop. I.5.4.

(ii) On a obtenu, au cours de la démonstration, la minoration suivante, si $j \leq [r]$,

$$C_{\phi^{(j)},r-j}(h) \geq C_{\phi,r}(h) - C([r]).$$

(iii) Nous montrerons plus loin (prop. I.5.16) que $\frac{d}{dx}$ induit une surjection de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$, si $r \geq 1$.

Proposition I.5.6. — *Si $\phi_1 : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ est de classe $\mathscr{C}^r$, et si $\phi_2 : \mathbf{Z}_p \to L$ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors $\phi_2 \circ \phi_1 : \mathbf{Z}_p \to L$ est de classe $\mathscr{C}^r$.*

Démonstration. — Cela marche exactement de la même manière que pour la composition des développements limités dans le cas archimédien.

3. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Il semble naturel de penser qu'une fonction localement analytique est de classe $\mathscr{C}^r$, pour tout $r > 0$. La proposition suivante montre que c'est bien le cas.

Proposition I.5.7. — *Si $h \in \mathbf{N}$, et si $r \geq 0$, alors $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L) \subset \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. De plus, si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, alors*

$$v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - rh.$$

Démonstration. — Soit $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. On a $v_p(\frac{1}{j!}\phi^{(j)}(x)) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - hj$ quels que soient $x \in \mathbf{Z}_p$ et $j \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, on a

$$\varepsilon_{\phi,r}(x,y) = \begin{cases} \sum_{j>r} \frac{\phi^{(j)}(x)}{j!} y^j & \text{si } v_p(y) \geq h, \\ \phi(x+y) - \sum_{j=0}^{[r]} \frac{\phi^{(j)}(x)}{j!} y^j & \text{si } v_p(y) < h. \end{cases}$$

On en déduit la minoration $v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) + ([r]+1)(v_p(y)-h)$ si $v_p(y) \geq h$, et comme $([r]+1)v_p(y) - rv_p(y)$ tend vers $+\infty$ quand $v_p(y)$ tend vers $+\infty$, cela montre que $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. De plus, la minoration $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - rh$ se déduit facilement, en revenant à la définition, de la formule ci-dessus pour $\varepsilon_{\phi,r}(x,y)$ et de la minoration $v_p(\frac{1}{j!}\phi^{(j)}(x)) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - hj$. Ceci permet de conclure.

4. Coefficients d'amplitude des fonctions localement polynomiales. — Soit I une partie de $\mathbf{N}$. Si $h\in\mathbf{N}$, on note $\mathrm{LP}_h^I(\mathbf{Z}_p,L)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans L dont la restriction à $a+p^h\mathbf{Z}_p$ est un polynôme de la forme $\sum_{i\in I}a_ix^i$, quel que soit $a\in\mathbf{Z}_p$. On note $\mathrm{LP}^I(\mathbf{Z}_p,L)$ l'espace des fonctions localement polynomiales sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L et à degrés dans I. C'est la limite inductive des $\mathrm{LP}_h^I(\mathbf{Z}_p,L)$, pour $h\in\mathbf{N}$.

Si I est une partie de $\mathbf{R}$, on note $\mathrm{LP}_h^I(\mathbf{Z}_p,L)$ et $\mathrm{LP}^I(\mathbf{Z}_p,L)$ respectivement, les espaces $\mathrm{LP}_h^{I\cap N}(\mathbf{Z}_p,L)$ et $\mathrm{LP}^{I\cap\mathbf{N}}(\mathbf{Z}_p,L)$.

Proposition I.5.8. — *Soit $r\geq 0$.*

(i) *Les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}\cdot\big(\frac{x-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k$, pour $0\leq i\leq p^h-1$ et $0\leq k\leq[r]$, forment une base de $\mathrm{LP}_h^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$.*

(ii) *Les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}\cdot\big(\frac{x-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k$, pour $i\in\mathbf{N}$ et $0\leq k\leq[r]$, forment une base de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$.*

Démonstration. — Il suffit d'adapter les arguments de la démonstration des (i) et (ii) de la prop. I.3.2.

Si $i\in\mathbf{N}$ et $k\in\mathbf{N}$, on note $e_{i,k,r}$ l'élément de $\mathrm{LP}^{[0,r]}$ défini par

$$e_{i,k,r}(x)=p^{[\ell(i)r]}\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x)\cdot\big(\frac{x-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k.$$

Lemme I.5.9. — (i) *Les $e_{i,k,r}$, pour $0\leq i\leq p^h-1$ et $0\leq k\leq r$, forment une base de $\mathrm{LP}_h^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$.*

(ii) *Les $e_{i,k,r}$, pour $i\in\mathbf{N}$ et $0\leq k\leq r$, forment une base de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$.*

Démonstration. — Immédiat.

Lemme I.5.10. — *Si $r\geq 0$ et si $k\leq r$, alors*

$$v'_{\mathscr{C}^r}(e_{0,k,r})=0\quad\text{et}\quad v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r})\geq[\ell(i)r]-r\ell(i)+r-k\geq -1,\ \textit{si } i\geq 1.$$

Démonstration. — Le cas $i=0$ est immédiat. Supposons donc $i\geq 1$ (et donc $\ell(i)\geq 1$), et notons ϕ la fonction $e_{i,k,r}$.

- Si $j\leq r$, et si $x\in\mathbf{Z}_p$, alors

$$v_p\big(\frac{\phi^{(j)}(x)}{j!}\big)\geq[\ell(i)r]-j\ell(i)\geq[\ell(i)r]-k\ell(i)\geq[\ell(i)r]-r\ell(i)+r-k.$$

- On a $\varepsilon_{\phi,r}(x,y)=p^{[\ell(i)r]}\big(\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x+y)-\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x)\big)\big(\frac{x+y-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k$. En particulier, $\varepsilon_{\phi,r}(x,y)=0$, si $v_p(y)\geq\ell(i)$, ou si ni x ni $x+y$ n'appartiennent à $i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p$.

— Dans le cas $v_p(y)\leq\ell(i)-1$ et $x+y\in i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p$, on a

$$v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y))-rv_p(y)\geq[\ell(i)r]-r(\ell(i)-1)\geq[\ell(i)r]-r\ell(i)+r-k.$$

— Dans le cas $v_p(y)\leq\ell(i)-1$ et $x\in i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p$, on a

$$v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y))-rv_p(y)=[\ell(i)r]+k(v_p(y)-\ell(i))-rv_p(y)\geq[\ell(i)r]-r\ell(i)+r-k.$$

Ceci permet, en revenant à la définition de $v'_{\mathscr{C}^r}$, de conclure.

Lemme I.5.11. — *Si $r \geq 0$, si $h \in \mathbf{N}$, et si $b_i \in L$, pour $i \leq p^h - 1$, alors*
$$v'_{\mathscr{C}^r}(\sum_{i\leq p^h-1} b_i e_{i,0,r}) - r \leq \inf_{i\leq p^h-1} v_p(b_i).$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur h, le cas $h = 0$ étant trivial. Soit $\phi = \sum_{i\leq p^h-1} b_i e_{i,0,r}$. Comme les $e_{i,0,r}$ sont localement constantes et donc de dérivées nulles, on a $\varepsilon_{\phi,r}(x, y) = \phi(x + y) - \phi(x)$. En particulier, en tenant compte du fait que $e_{i,0,r}$ est constante modulo $p^{h-1}\mathbf{Z}_p$, si $i < p^{h-1}$, on obtient
$$\varepsilon_{\phi,r}(i, p^{h-1}) = \begin{cases} p^{[hr]} b_{i+p^{h-1}} & \text{si } 0 \leq i \leq p^{h-1} - 1, \\ p^{[hr]}(b_{i+p^{h-1}} - b_i) & \text{si } p^{h-1} \leq i \leq p^h - 1. \end{cases}$$

On en déduit que
$$\inf_{p^{h-1}\leq i\leq p^h-1} v_p(b_i) = -[hr] + \inf_{0\leq i\leq p^h-p^{h-1}-1} v_p(\varepsilon_{\phi,r}(i, p^{h-1})) \geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) + (h-1)r - [hr].$$

En particulier, $\inf_{p^{h-1}\leq i\leq p^h-1} v_p(b_i) \geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - r$. De plus, $v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,0,r}) \geq [hr] - hr + r$ et $\sum_{i\leq p^{h-1}-1} b_i e_{i,0,r} = \phi - \sum_{p^{h-1}\leq i\leq p^{h-1}-1} b_i e_{i,0,r}$, et donc
$$v'_{\mathscr{C}^r}(\sum_{i\leq p^{h-1}-1} b_i e_{i,0,r}) \geq \inf\big(v'_{\mathscr{C}^r}(\phi), \inf_{p^{h-1}\leq i\leq p^h-1} v_p(b_i) + v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,0,r})\big) = v'_{\mathscr{C}^r}(\phi),$$

ce qui permet de conclure, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $h - 1$.

Si $\phi \in \mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, on note $b_{i,k}(\phi)$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq k \leq r$, les *coefficients d'amplitude* de ϕ, i.e. les coefficients de ϕ dans la base des $e_{i,k,r}$.

Proposition I.5.12. — *Si $r \geq 0$, il existe $C'_0(r)$ tel que, pour tout $\phi \in \mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, on ait*
$$\inf_{i\in\mathbf{N},\ 0\leq k\leq r} v_p(b_{i,k}(\phi)) \geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C'_0(r).$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur $[r]$. En dérivant, cela permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour minorer $\inf_{i\in\mathbf{N},\ 1\leq k\leq r} v_p(b_{i,k}(\phi))$ sous la forme souhaitée (en utilisant le (i) de la prop. I.5.4 pour minorer $v'_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi')$ en fonction de $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)$). On minore les valuations des coefficients restants en considérant $\phi_1 = \phi - \sum_{i\in\mathbf{N},\,k\geq 1} b_{i,k}(\phi) e_{i,k,r}$, et en utilisant le lemme I.5.11 et la minoration $v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r}) \geq -1$ pour minorer $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi_1)$.

5. Décomposition en vaguelettes des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Le but de ce n° est d'exhiber une base de Banach agréable de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et ce, dans le but de démontrer (prop. I.5.16) la surjectivité de $\frac{d}{dx} : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$ annoncée dans la rem. I.5.5.

Proposition I.5.13. — *Soit $r \geq 0$. Si $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et $h \in \mathbf{N}$, soit ϕ_h l'élément de $\mathrm{LP}_h^{[0,r]}$ défini par*

$$\phi_h(x) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}(x)\Big(\sum_{k=0}^{[r]} \frac{\phi^{(k)}(i)}{k!}(x-i)^k\Big).$$

Alors

(i) $v_{\mathrm{LA}_{h+1}}(\phi_{h+1} - \phi_h) \geq rh + C_{\phi,r}(h) - C([r])$.

(ii) ϕ_h *tend vers* ϕ *dans* $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ *quand* h *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. — Il résulte du (i) de la prop. I.5.7, et de ce que $C_{\phi,r}(h)$ tend vers $+\infty$, que ϕ_h a une limite dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme par ailleurs, $\phi_h(i) = \phi(i)$ si $i \in \mathbf{N}$ et $p^h - 1 \geq i$, cette limite coïncide avec ϕ sur $\mathbf{N}$, et donc partout par continuité. Il suffit donc de prouver le (i). Or $\phi_{h+1}(x) - \phi_h(x)$ est égal à

$$\sum_{i=0}^{p^h-1}\sum_{a=0}^{p-1} \mathbf{1}_{i+ap^h+p^{h+1}\mathbf{Z}_p} \sum_{k=0}^{[r]} \Big(\phi^{(k)}(i+ap^h)\frac{(x-i-ap^h)^k}{k!} - \phi^{(k)}(i)\frac{(x-i)^k}{k!}\Big),$$

et un petit calcul montre que

$$\sum_{k=0}^{[r]} \Big(\phi^{(k)}(i+ap^h)\frac{(x-i-ap^h)^k}{k!} - \phi^{(k)}(i)\frac{(x-i)^k}{k!}\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{[r]} \frac{p^{j(h+1)}}{j!}\Big(\phi^{(j)}(i+ap^h) - \sum_{\ell=0}^{[r]-j} \phi^{(j+\ell)}(i)\frac{(ap^h)^\ell}{\ell!}\Big)\big(\frac{x-i-ap^h}{p^{h+1}}\big)^j,$$

et la prop. I.5.4 (ou plutôt le (ii) de la remarque I.5.5) nous fournit la minoration

$$v_p\Big(\phi^{(j)}(i+ap^h) - \sum_{\ell=0}^{[r]-j} \phi^{(j+\ell)}(i)\frac{(ap^h)^\ell}{\ell!}\Big) \geq C_{\phi,r}(h) - C([r]) + (r-j)h.$$

On en déduit que $v_{\mathrm{LA}_{h+1}}(\phi_{h+1} - \phi_h)$ est minoré par

$$\inf_{j \leq [r]} \big(v_p(\frac{p^j(h+1)}{j!}) + C_{\phi,r}(h) - C([r]) + (r-j)h\big) = rh + C_{\phi,r}(h) - C([r]),$$

ce qui permet de conclure.

Théorème I.5.14. — *La famille des $e_{i,k,r}$, pour $i \in \mathbf{N}$, $0 \leq k \leq r$, est une base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Le lemme I.5.10 montre que $(b_{i,k}) \mapsto \sum_{i\in\mathbf{N},\, 0\leq k\leq r} b_{i,k}e_{i,k,r}$ est une application continue de $\ell_\infty^0(\mathbf{N}\times\{0,\ldots,[r]\})$ dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. La proposition I.5.12 implique que cette application est un isomorphisme de L-banach de $\ell_\infty^0(\mathbf{N}\times\{0,\ldots,[r]\})$ sur l'adhérence de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et comme cette adhérence n'est autre que $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, d'après la prop. I.5.13, cela permet de conclure.

Définition I.5.15. — On appelle *base de vaguelettes* la base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ constituée des $e_{i,k,r}$, pour $i \in \mathbf{N}$, $0 \le k \le r$. Si $\sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{0\le k\le r} b_{i,k}(\phi)e_{i,k,r}$ est la décomposition de $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, en vaguelettes, les $b_{i,k}(\phi)$ sont les *coefficients d'amplitude* de f.

Proposition I.5.16. — (i) *Si $r \ge 1$, la dérivation $\frac{d}{dx}$ induit une surjection de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$; son noyau est l'adhérence de* $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ *dans* $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.

(ii) *Plus généralement, si j est un entier ≥ 1, et si $r \ge j$, l'opérateur $\left(\frac{d}{dx}\right)^j$ induit une surjection de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{C}^{r-j}(\mathbf{Z}_p, L)$; son noyau est l'adhérence de* $\mathrm{LP}^{[0,j-1]}(\mathbf{Z}_p, L)$ *dans* $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j e_{i,k,r} = k(k-1)\cdots(k-j+1)e_{i,k-j,r-j},$$

pour déduire, d'une part la surjectivité de $\left(\frac{d}{dx}\right)^j : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-j}(\mathbf{Z}_p, L)$ du théorème précédent, et, d'autre part, le fait que le noyau de $\left(\frac{d}{dx}\right)^j$ est l'adhérence de l'espace engendré par les $e_{i,k,r}$, avec $k \le j-1$; comme cet espace est précisément $\mathrm{LP}^{[0,j-1]}(\mathbf{Z}_p, L)$, cela permet de conclure.

6. Coefficients de Mahler des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Le but de ce n° est de caractériser les fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ en termes de leur développement de Mahler.

Théorème I.5.17. — *Si $r \ge 0$, si $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\phi)\binom{x}{n}$ est la décomposition de Mahler de ϕ, alors $v_p(a_n(\phi)) - r\ell(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. De plus, la valuation $v_{\mathscr{C}^r}$, définie sur $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ par la formule*

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) = \inf_{n\in\mathbf{N}} \big(v_p(a_n(\phi)) - r\ell(n)\big)$$

est équivalente à la valuation $v'_{\mathscr{C}^r}$.

Corollaire I.5.18. — *Les $p^{[r\ell(n)]}\binom{x}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème ; la démonstration du théorème va demander un peu de préparation.

Proposition I.5.19. — *Si $r \ge 0$, il existe $C_1(r)$ tel que, quels que soient $h \in \mathbf{N}$ et $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, on ait*

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) \ge v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - rh - C_1(r).$$

Démonstration. — En utilisant le th. I.4.7, et l'inégalité $\ell(k) \le \frac{\log(k+1)}{\log p} + 1$, on obtient la minoration

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) \ge \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p([\frac{k}{p^h}]!) - r\frac{\log(1+k)}{\log p} - r.$$

Comme $v_p(a!) = \frac{a-S_p(a)}{p-1}$, si $S_p(a)$ est la somme des chiffres du développement de a en base p, on en déduit la minoration $v_p(a!) \geq \frac{a}{p-1} - \frac{\log(a+1)}{\log p}$, et écrivant k sous la forme $k = p^h a + b$, avec $0 \leq b \leq p^h - 1$, la minoration

$$\begin{aligned} v_p([\frac{k}{p^h}]!) - r\frac{\log(1+k)}{\log p} =& v_p(a!) - r\frac{\log(p^h a + b + 1)}{\log p} \\ \geq& \frac{a}{p-1} - \frac{\log(a+1)}{\log p} - rh - r\frac{\log(a+1)}{\log p}, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut prendre pour $C_1(r)$ le minimum de $\frac{a}{p-1} - (1+r)\frac{\log(a+1)}{\log p} - r$ pour $a \geq 0$.

Corollaire I.5.20. — *Il existe $C_2(r) \in \mathbf{R}$ telle que l'on ait $v_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geq v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_2(r)$ quel que soit $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Il résulte de la prop. I.5.19, et de ce que $v_{\mathrm{LA}_{\ell(i)}}(e_{i,k,r}) = [r\ell(i)]$, que l'on a $v_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r}) \geq -1 - C_1(r)$ quels que soient $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq k \leq r$. Comme les $e_{i,k,r}$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq k \leq r$ forment une base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, cela permet de conclure.

Ceci démontre une des deux inégalités dont on a besoin pour établir le th. I.5.17. Pour démontrer l'autre, il suffit, par densité, de la vérifier pour les éléments de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, et pour cela, il s'agit de minorer les coefficients d'amplitude d'un éléments de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, en termes de la valuation $v_{\mathscr{C}^r}$.

Soit $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$, et soient

$$\sum_{i=0}^{p^h-1} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x) = \phi(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(\phi)\binom{x}{j},$$

les décompositions en ondelettes et de Mahler de ϕ.

Proposition I.5.21. — *Soit $r \geq 0$. Si $v_p(a_j(\phi)) \geq r\inf(h, \ell(j))$ pour tout $j \in \mathbf{N}$, alors*

(i) *$v_p(b_i(\phi)) \geq r\ell(i)$ quel que soit $i \leq p^h - 1$, si $r < 1$;*
(ii) *$v_p(b_i(\phi)) \geq r\ell(i) - 1$ quel que soit $i \leq p^h - 1$, si $r \geq 1$.*

Démonstration. — Si $r < 1$, on utilise la minoration de la prop. I.3.7. Celle-ci nous permet de minorer $v_p(b_i(\phi))$ par

$$\inf_{j\leq i}(v_p(a_j(\phi))+\ell(i)-\ell(j)) \geq \inf_{j\leq i}(r\ell(j)+\ell(i)-\ell(j)) \geq r\ell(i)+(1-r)\inf_{j\leq i}(\ell(i)-\ell(j)) \geq r\ell(i).$$

Si $r \geq 1$, on fait une récurrence sur h en utilisant la minoration de la prop. I.3.8 qui montre que la minoration que l'on cherche à démontrer est vérifiée si $\ell(i) = h$, et si $v_p(a_i(\phi)) \geq rh$ quel que soit $i \geq p^{h-1}$. Considérons alors

$$\phi' = \phi - \sum_{\ell(i)=h} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p} = \sum_{i\leq p^{h-1}-1} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p},$$

et, si $j\in\mathbf{N}$, soit $a'_j=a_j(\phi')$. Comme $v_p(b_i(\phi))\geq rh-1$ si $\ell(i)=h$, on a

$$v_p(a'_j)\geq\inf(v_p(a_j(\phi)),\inf_{\ell(i)=h}v_p(b_i(\phi)))\geq r\inf(h-1,\ell(j)).$$

L'hypothèse de récurrence pour $h-1$ permet donc de montrer que $v_p(b_i(\phi))\geq r\ell(i)-1$ si $\ell(i)\leq h-1$, ce qui permet de conclure.

Corollaire I.5.22. — *Soit $r\geq 0$, soit $\phi\in\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p,L)$, et soit $\phi=\sum_{i=0}^{+\infty}b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, la décomposition de ϕ en ondelettes. Alors*

(i) *si $r<1$, $v_p(b_i(\phi))\geq r\ell(i)+v_{\mathscr{C}^r}(\phi)$ quel que soit $i\in\mathbf{N}$;*

(ii) *si $r\geq 1$, $v_p(b_i(\phi))\geq r\ell(i)+v_{\mathscr{C}^r}(\phi)-1$ quel que soit $i\in\mathbf{N}$.*

Lemme I.5.23. — *Il existe $C_3(r)\in\mathbf{R}$ tel que, si $\phi=\sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{0\leq k\leq r}b_{i,k}e_{i,k,r}$, où les $b_{i,k}$ sont des éléments de $\mathbf{C}_p$ presque tous nuls, alors*

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C_3(r)\leq\inf_{i\in\mathbf{N},\,0\leq k\leq r}v_p(b_{i,k}).$$

Démonstration. — Celle-ci se fait par récurrence sur $[r]$.

• Si $[r]=0$ (i.e. si $r<1$), la condition $0\leq k\leq r$ implique $k=0$. Comme les $b_{i,k}$ sont presque tous nuls, il existe h tel que $b_{i,k}=0$ si $\ell(i)>h$. On déduit alors du (i) du cor. I.5.22 que l'on a $v_p(p^{[\ell(i)r]}b_{i,0})\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi)+\ell(i)r$ quel que soit $i\leq p^h-1$. On en déduit l'inégalité $\inf_{i\in\mathbf{N},\,0\leq k\leq r}v_p(b_{i,k})\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi)$, ce qui permet de conclure.

• Si $[r]\geq 1$, soit ϕ' la dérivée de ϕ. On peut écrire ϕ' sous la forme

$$\phi'=\sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{0\leq k\leq r-1}(k+1)b_{i,k+1}e_{i,k,r-1}.$$

Or $v_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi')\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi)$ (en effet, si $\phi_n=\binom{x}{n}$, alors $\phi'_n=\sum_{k\leq n-1}a_{n,k}\binom{x}{k}$, où $v_p(a_{n,k})\geq-\ell(n)$ car $\sum_{n=0}^{+\infty}\phi'_n(x)T^n=(1+T)^x\log(1+T)$; il en résulte que $v_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi'_n)\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi_n)$, pour tout $n\in\mathbf{N}$, et on en déduit le résultat annoncé). On déduit donc de l'hypothèse de récurrence (i.e. de l'équivalence des valuations $v_{\mathscr{C}^{r-1}}$ et $v'_{\mathscr{C}^{r-1}}$), l'existence d'une constante $C'_0(r)\in\mathbf{R}$ telle que

$$\inf_{i\in\mathbf{N},\,1\leq k\leq r}v_p(kb_{i,k})\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C_3(r-1)-C'_0(r),$$

et donc que

$$\inf_{i\in\mathbf{N},\,1\leq k\leq r}v_p(b_{i,k})\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C_3(r-1)-C'_0(r)-\sup_{1\leq k\leq r}v_p(k).$$

Soit $\phi_0=\sum_{i\in\mathbf{N}}b_{i,0}e_{i,0,r}=\phi-\sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{1\leq k\leq r}b_{i,k}e_{i,k,r}$. On a alors

$$\begin{aligned}v_{\mathscr{C}^r}(\phi_0)&\geq\inf\big(v_{\mathscr{C}^r}(\phi),\inf_{i\in\mathbf{N},\,1\leq k\leq r}v_p(b_{i,k})+v_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r})\big)\\&\geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C_3(r-1)-\sup_{1\leq k\leq r}v_p(k)-C_1(r),\end{aligned}$$

d'après le lemme I.5.10 et la minoration obtenue ci-dessus. Ceci permet, en utilisant le (ii) du cor. I.5.22, d'en déduire la minoration

$$\inf_{i\in\mathbf{N}} v_p(b_{i,0}) \geq v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_3(r-1) - \sup_{1\leq k\leq r} v_p(k) - C_1(r) - 1.$$

Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration du th. I.5.17. D'après le cor. I.5.20 et le lemme I.5.23, l'application $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\binom{x}{n}$ induit un isomorphisme de L-banach, de l'espace des suites d'éléments de L vérifiant $v_p(a_n) - r\ell(n) \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$, sur un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme l'image contient $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ qui, d'après la prop. I.5.13, est dense dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, cela permet de conclure.

I.6. Propriétés locales des caractères de $\mathbf{Q}_p^*$. — Si $\mathscr{L} \in L$, on définit la *branche du logarithme* $\log_{\mathscr{L}} : \mathbf{C}_p^* \to \mathbf{C}_p$ comme étant l'unique fonction localement analytique dont la dérivée est x^{-1} et qui vérifie les équations fonctionnelles

$$\log_{\mathscr{L}}(xy) = \log_{\mathscr{L}} x + \log_{\mathscr{L}} y \text{ quels que soient } x, y \in \mathbf{C}_p^* \quad \text{et} \quad \log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}.$$

Si $\mathscr{L} = \infty$, on pose $\log_{\mathscr{L}} = v_p$. L'équation fonctionnelle $\log_{\mathscr{L}} x = \log_{\mathscr{L}} a + \log_{\mathscr{L}} \frac{x}{a}$, alliée avec le fait que $\log_{\mathscr{L}}(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$ (resp. $\log_\infty(x) = 0$), si $v_p(x-1) > 0$, montre que, dans tous les cas, $\log_{\mathscr{L}}$ est analytique sur $a + p^{1+v_p(a)}\mathbf{Z}_p$, quel que soit $a \in \mathbf{Q}_p^*$.

Si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$ est un caractère continu, la quantité $\frac{\log\delta(u)}{\log u}$ ne dépend pas du choix de $u \in \mathbf{Z}_p^* - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$: en effet, $(\eta, v) \mapsto (1+2p)^v\eta$ induit un isomorphisme de groupes de $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p) \times \mathbf{Z}_p$ sur $\mathbf{Z}_p^*$, et si $u = (1+2p)^v\eta$, alors

$$\delta(u) = \delta(1+2p)^v\delta(\eta), \quad \log u = v\log(1+2p) \quad \text{et} \quad \log\delta(u) = v\log\delta(1+2p)$$

car $\delta(\eta)$ est une racine de l'unité, ce qui nous donne $\frac{\log\delta(u)}{\log u} = \frac{\log\delta(1+2p)}{\log(1+2p)}$, si $v \neq 0$. On note cette quantité $w(\delta)$. La continuité de δ implique l'existence de $n(\delta) \geq 1$ tel que $v_p(\delta(x)-1) \geq v_p(2p)$, si $v_p(x-1) \geq n(\delta)$, et on a alors

$$\delta(x) = \exp(w(\delta)\log x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w(\delta)}{n}(x-1)^n, \quad \text{si } x \in 1 + p^{n(\delta)}\mathbf{Z}_p.$$

En utilisant l'équation fonctionnelle $\delta(x) = \delta(a)\delta(\frac{x}{a})$, on en déduit que δ est analytique sur $a + p^{n(\delta)+v_p(a)}\mathbf{Z}_p$, quel que soit $a \in \mathbf{Q}_p^*$.

Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$, si $n \in \mathbf{N}$, on note $\phi \circ p^{-n} : \mathbf{Z}_p \to L$ la fonction de support $p^n\mathbf{Z}_p$, dont la restriction à $p^n\mathbf{Z}_p$ est donnée par la formule $\phi\circ p^{-n}(x) = \phi(p^{-n}x)$. Le résultat suivant est immédiat.

Lemme I.6.1. — *Si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $\phi\circ p^{-n} \in \mathrm{LA}_{h+n}(\mathbf{Z}_p, L)$, et*

$$v_{\mathrm{LA}_{h+n}}(\phi\circ p^{-n}) = v_{\mathrm{LA}_h}(\phi).$$

Lemme I.6.2. — *Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*, L)$, si $\alpha \in L^*$, et si $k \in \mathbf{N}$, alors la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n n^k \phi \circ p^{-n}$$

converge dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ si $0 \leq r < v_p(\alpha)$.

Démonstration. — Il existe $h \geq 1$ tel que $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. Si $n \geq 0$, alors, d'après la prop. I.5.19 et le lemme I.6.1, on a

$$\begin{aligned} v_{\mathscr{C}^r}(\alpha^n n^k \phi \circ p^{-n}) &\geq n v_p(\alpha) + v_{\mathrm{LA}_{h+n}}(\phi \circ p^{-n}) - r(h+n) - C_1(r) \\ &= n(v_p(\alpha) - r) + v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - rh - C_1(r), \end{aligned}$$

ce qui montre que $v_{\mathscr{C}^r}(\alpha^n n^k \phi \circ p^{-n})$ tend vers $+\infty$ si $v_p(\alpha) - r > 0$, et permet de conclure.

Proposition I.6.3. — *Soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ un caractère continu vérifiant $v_p(\delta(p)) > 0$, soit $\mathscr{L} \in L \cup \{\infty\}$, et soit $k \in \mathbf{N}$. Alors $\delta \cdot \log_{\mathscr{L}}^k$ tend vers 0 en 0, et la fonction obtenue en prolongeant par continuité est de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Q}_p$ pour tout r vérifiant $0 \leq r < v_p(\delta(p))$.*

Démonstration. — Soit $c(\mathscr{L}) = \inf(0, v_p(\mathscr{L}))$ si $\mathscr{L} \in L$, et $c(\mathscr{L}) = 0$ si $\mathscr{L} = \infty$. On a alors

$$v_p((\log_{\mathscr{L}} x)^k \delta(x)) \geq v_p(x) v_p(\delta(p)) + kc(L);$$

on en déduit le premier point. Par ailleurs, comme δ et $\log_{\mathscr{L}}$ sont localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p^*$, il suffit de regarder ce qui se passe en 0, et on peut donc se contenter d'étudier la restriction de $\delta \cdot \log_{\mathscr{L}}^k$ à $\mathbf{Z}_p$. Si $i \in \mathbf{N}$, notons f_i la restriction de $\delta \cdot \log_{\mathscr{L}}^i$ à $\mathbf{Z}_p^*$, et posons $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$ si $\mathscr{L} \in L$, et $\mathscr{L}' = 1$ si $\mathscr{L} = \infty$. Comme

$$\delta(p^n x) \log_{\mathscr{L}}^k(p^n x) = \delta(p)^n \delta(x)(n\mathscr{L}' + \log_{\mathscr{L}} x)^k = \delta(p)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n\mathscr{L}')^{k-i} f_i(x),$$

la restriction de $\delta \cdot \log_{\mathscr{L}}^k$ à $p^n \mathbf{Z}_p^*$ est égale à

$$\delta(p)^n \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n\mathscr{L}')^{k-i} f_i \circ p^{-n} \Big),$$

et donc la restriction de $\delta \cdot \log_{\mathscr{L}}^k$ à $\mathbf{Z}_p$ (prolongée par continuité en 0), est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(p)^n \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n\mathscr{L}')^{k-i} f_i \circ p^{-n} \Big),$$

ce qui permet d'utiliser le lemme I.6.2 pour conclure.

II. Duaux

II.1. L'anneau $\mathscr{R}^+$ et certains de ses sous-espaces. — On note $\mathscr{R}^+$ l'anneau des séries entières $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$, à coefficients dans L, qui convergent si $v_p(T) > 0$. Une telle série définit donc une fonction analytique sur le disque ouvert $B(0, 0^+)$.

Si $h \in \mathbf{N}$, soit $u_h = \frac{1}{(p-1)p^h} = v_p(\zeta_{p^{h+1}} - 1)$. On munit $\mathscr{R}^+$ de la topologie de Fréchet définie par la famille de valuations $v_{B(0,u_h)}$, $h \in \mathbf{N}$.

Un élément $f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n$ de $\mathscr{R}^+$ est *d'ordre* r, si $v_p(b_n) + r\ell(n)$ est borné inférieurement quand n tend vers $+\infty$. On note $\mathscr{R}_r^+$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}^+$ des éléments d'ordre r, et on munit $\mathscr{R}_r^+$ de la valuation v_r définie par $v_r(f) = \inf_{n\in\mathbf{N}} v_p(b_n) + r\ell(n)$, ce qui en fait un L-banach. Notons que ce que nous appelons « ordre » est souvent appelé *ordre de croissance logarithmique* dans la littérature (la série $\log(1+T)$ est d'ordre 1).

L'espace $\mathscr{R}_0^+$ des séries à coefficients bornés est aussi noté $\mathscr{E}^+$; il s'identifie à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur $B(0, 0^+)$.

Lemme II.1.1. — *$f \in \mathscr{R}_r^+$ si et seulement si* $\inf_{h\in\mathbf{N}} \big(v_{B(0,u_h)}(f) + rh\big) \neq -\infty$. *De plus, la valuation v_r est équivalente à la valuation v_r' définie par*

$$v_r'(f) = \inf_{h\in\mathbf{N}} \big(v_{B(0,u_h)}(f) + rh\big).$$

Démonstration. — Si $f(T) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n T^n \in \mathscr{R}^+$, alors $v_r'(f)$ est égal à

$$\inf_{h\in\mathbf{N}} \Big(\inf_{n\in\mathbf{N}} \Big(v_p(a_n) + \frac{n}{(p-1)p^h} + rh\Big)\Big) = \inf_{n\in\mathbf{N}} \Big(v_p(a_n) + \inf_{h\in\mathbf{N}} \Big(\frac{n}{(p-1)p^h} + rh\Big)\Big)$$

Si $n = 0$, le minimum ci-dessus vaut 0. Si $n \geq 1$, La fonction $x \mapsto \frac{n}{(p-1)p^x} + rx$ atteint son minimum en $\frac{1}{\log p} \log\big(\frac{n \log p}{(p-1)r}\big)$, et en prenant $h = \big[\frac{\log n}{\log p}\big] = \ell(n) - 1 \geq \frac{\log n}{\log p} - 1$, on obtient l'encadrement

$$r(\ell(n) - 1) + \frac{r}{\log p}(1 + \log \frac{\log p}{(p-1)r}) \leq \inf_{h\in\mathbf{N}} \Big(\frac{n}{(p-1)p^h} + rh\Big) \leq \frac{p}{p-1} + r(\ell(n) - 1).$$

On en déduit le résultat.

Corollaire II.1.2. — *Si f est d'ordre r et g est d'ordre s, alors fg est d'ordre $r+s$.*

Démonstration. — On a $v_{B(0,u_h)}(fg) + (r+s)h = \big(v_{B(0,u_h)}(f) + rh\big) + \big(v_{B(0,u_h)}(g) + sh\big)$, pour tout $h \in \mathbf{N}$. On en déduit le résultat et la minoration $v_{r+s}'(fg) \geq v_r'(f) + v_s'(g)$.

II.2. Distributions continues. — On appelle distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$ une forme linéaire continue sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ dont la restriction à chaque $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$ est continue. En particulier, si μ est une distribution continue, on peut considérer μ comme un élément du dual de $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et donc définir sa valuation $v_{\mathrm{LA}_h}(\mu)$.

On note $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des distributions continues sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L, et on munit $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ de la topologie de Fréchet définie par la famille de valuations v_{LA_h}, pour $h \in \mathbf{N}$.

Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, on écrira en général $\mu(f)$ sous la forme plus parlante $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\,\mu(x)$ ou simplement sous la forme $\int_{\mathbf{Z}_p} f\,\mu$.

A une distribution continue μ, on associe la série formelle

$$\mathscr{A}_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu(x),$$

appelée *transformée d'Amice* de μ.

Si $v_p(z) > 0$, alors $x \mapsto (1+z)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n} z^n$ est localement analytique, ce qui permet de calculer l'intégrale $\int_{\mathbf{Z}_p} (1+z)^x \mu(x)$, si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$.

Lemme II.2.1. — *Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $v_p(z) > 0$, alors $\int_{\mathbf{Z}_p} (1+z)^x \mu(x) = \mathscr{A}_\mu(z)$.*

Démonstration. — Il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que $v_p(z) > u_h$, ce qui implique que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n} z^n$ converge vers $(1+z)^x$ dans $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, \mathbf{C}_p)$ car $\frac{z^n}{[\frac{n}{p^h}]!}$ tend vers 0. On en déduit le résultat.

Théorème II.2.2. — *L'application $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu$ est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{R}^+$. De plus, si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $h \in \mathbf{N}$, on a*

$$v_{B(0,u_h)}(\mathscr{A}_\mu) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\mu) \geq v_{B(0,u_{h+1})}(\mathscr{A}_\mu) - 1.$$

Démonstration. — Soit μ une distribution et $\mathscr{A}_\mu(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n$ sa transformée d'Amice. En utilisant le th. I.4.7, on montre que, quel que soient $h \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$v_p(b_n) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\mu) + v_{\mathrm{LA}_h}\Big(\binom{x}{n}\Big) = v_{\mathrm{LA}_h}(\mu) - v_p\Big([\frac{n}{p^h}]!\Big) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\mu) - nu_h.$$

Ceci permet de montrer que $\mathscr{A}_\mu$ converge sur $B(0, u_h^+)$ pour tout h, et donc appartient à $\mathscr{R}^+$, et aussi que $v_{B(0,u_h)}(\mathscr{A}_\mu) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\mu)$.

Réciproquement, si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n \in \mathscr{R}^+$, alors pour tout $h \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_p\Big([\frac{n}{p^h}]!b_n\Big) \geq v_p(b_n) + [\frac{n}{p^{h+1}}] \geq v_p(b_n) + nu_{h+1} - 1 \geq v_{B(0,u_{h+1})}(\mathscr{A}_\mu) - 1,$$

et tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que l'on peut définir une distribution continue μ sur $\mathbf{Z}_p$, en posant $\int_{\mathbf{Z}_p} f\,\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a_n(f)$. De plus, on a

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\mu) = \inf_{n \in \mathbf{N}} v_p\Big([\frac{n}{p^h}]!b_n\Big) \geq v_{B(0,u_{h+1})}(\mathscr{A}_\mu) - 1.$$

Ceci permet de conclure.

II.3. Distributions tempérées et mesures

1. Transformées d'Amice des distributions tempérées. — Soit $r \geq 0$. Une distribution continue μ sur $\mathbf{Z}_p$ est dite *d'ordre* r si elle s'étend par continuité à $\mathscr{C}^r$. On note $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des distributions d'ordre r que l'on munit de la valuation $v'_{\mathscr{D}_r}$ définie par

$$v'_{\mathscr{D}_r} = \inf_{f \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) - \{0\}} \Big(v_p\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} f\,\mu \Big) - v_{\mathscr{C}^r}(f) \Big),$$

ce qui fait de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ le dual topologique de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.

Une distribution est dite *tempérée*, s'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ telle qu'elle soit d'ordre r. On note $\mathscr{D}_{\text{temp}}$ l'espace des distributions tempérées.

Proposition II.3.1. — *L'application $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu$ induit une isométrie de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ muni de la valuation $v'_{\mathscr{D}_r}$ sur $\mathscr{R}_r^+$ muni de la valuation v_r.*

Démonstration. — C'est, via la prop. I.1.6, une simple traduction du th. I.5.17.

2. Mesures. — Une distribution d'ordre 0 est aussi appelée *une mesure*. Par définition, l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ des mesures est donc le dual topologique de l'espace des fonctions continues. La prop. II.3.1 permet de construire une mesure à partir d'une série entière dont les coefficients sont bornés. On peut aussi utiliser le fait que les fonctions localement constantes sont denses dans les fonctions continues, ce qui permet de définir une mesure, comme expliqué ci-dessous, en ne connaissant que les intégrales $\int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\mu(x)$ pour $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$.

Soit μ une mesure sur $\mathbf{Z}_p$. Si $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$, soit $\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p) = \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\mu(x)$ *la mesure de* $a+p^n\mathbf{Z}_p$. Comme $a+p^n\mathbf{Z}_p$ est la réunion disjointe des $a+jp^n+p^{n+1}\mathbf{Z}_p$ pour $0 \leq j \leq p-1$, on a $\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p) = \sum_{j=0}^{p-1} \mu(a+jp^n+p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$. De plus, comme $v_{\mathscr{C}^0}(\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}) = 0$, les $\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p)$ sont bornés. Si f est une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$, alors $\sum_{a=0}^{p^n-1} f(a)\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}$ tend vers f dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ et donc

$$\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{a=0}^{p^n-1} f(a)\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p),$$

formule qui ressemble beaucoup à une somme de Riemann.

Réciproquement, si on se donne une famille $\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p)$, $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$, d'éléments de L vérifiant les conditions :

(i) $\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p) = \mu(b+p^n\mathbf{Z}_p)$ si $v_p(a-b) \geq n$,

(ii) $\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p) = \sum_{j=0}^{p-1} \mu(a+jp^n+p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$,

(iii) il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $v_p(\mu(a+p^n\mathbf{Z}_p)) \geq C$ pour tous $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$,

les propriétés (i) et (ii) permettent d'étendre μ en une forme linéaire sur $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$, et la propriété (iii) permet de montrer que $v_p(\mu(f)) \geq v_{\mathscr{C}^0}(f) + C$, ce qui permet d'étendre μ, par continuité, à $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.

3. Distributions tempérées et sommes de Riemann. — La prop. II.3.1 caractérise les distributions tempérées en termes de leurs transformées d'Amice, ce qui permet de construire une distribution tempérée à partir d'une série entière de rayon de convergence 1, vérifiant des conditions de croissance. La connaissance de la transformée d'Amice d'une distribution est équivalente à la connaissance des $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)$, pour $i \in \mathbf{N}$. Le théorème suivant permet de construire une distribution d'ordre fini en ne connaissant que les intégrales du type $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)$ pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq i \leq N$. Cette construction généralise celle des mesures donnée au n° précédent et est très importante pour les applications arithmétiques.

Si I est une partie de $\mathbf{N}$, on note $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des distributions algébriques sur $\mathbf{Z}_p$ (de degré $\in I$), c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur $\mathrm{LP}^I(\mathbf{Z}_p, L)$. Un élément μ de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, L)$ est donc équivalent à la donnée des valeurs $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)$ pour $i \in I$, $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$ avec les relations de compatibilité évidentes

$$\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a+kp^n+p^{n+1}\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x).$$

On a une application naturelle de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, L)$ quel que soit $I \subset \mathbf{N}$.

Si I est une partie de $\mathbf{R}$, on pose $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, L) = \mathscr{D}^{I\cap N}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, L)$

Théorème II.3.2. — (i) *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$, $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k\mu\Big) \geq C - rn.$$

(ii) *Réciproquement, si $N \in \mathbf{N}\cup\{+\infty\}$ est $\geq [r]$, si $\mu \in \mathscr{D}^{[0,N]}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, L)$ est telle qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$, $k \leq N$ et $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k\mu\Big) \geq C - rn,$$

alors μ se prolonge de manière unique en une distribution d'ordre r sur $\mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — (i) La fonction $\phi_{a,n,k}$, définie par $\phi_{a,n,k}(x) = \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x)\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k$ appartient à $\mathrm{LA}_n(\mathbf{Z}_p, L)$ et on a $v_{\mathrm{LA}_n}(\phi_{a,n,k}) = 0$. On en déduit, en utilisant la prop. I.5.19, la minoration

$$v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k\mu\Big) \geq v'_{\mathscr{D}_r}(\mu)+v_{\mathscr{C}^r}(\phi_{a,n,k}) \geq v'_{\mathscr{D}_r}(\mu)+v_{\mathrm{LA}_n}(\phi_{a,n,k})-nr-C_1(r),$$

ce qui démontre le (i) avec $C = v'_{\mathscr{D}_r}(\mu) - C_1(r)$.

(ii) Pour démontrer le (ii), introduisons le sous-espace $\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$ des éléments $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$ tels que la quantité

$$v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) = \inf_{a\in\mathbf{Z}_p,\, k\leq N,\, n\in\mathbf{N}} \Big(v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k\,\mu\Big) + rn\Big)$$

soit finie. D'après le (i), l'application naturelle ι de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,N]}$ envoie $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$, et on est ramené à démontrer que la restriction de ι à $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ induit un isomorphisme de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$.

La restriction de ι à $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ est injective puisque $\mathrm{LP}^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$ est, d'après la prop. I.5.13, dense dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Il ne reste donc que la surjectivité à prouver. Soit $\mu \in \mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$. Si $i \in \mathbf{N}$, et si $k \in \{0, 1, \dots, [r]\}$, posons

$$b_{i,k} = \int_{\mathbf{Z}_p} e_{i,k,r}\,\mu = \int_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p} p^{[r\ell(i)]}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k\,\mu.$$

On a donc $v_p(b_{i,k}) \geq v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) - 1$ quels que soient $i \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, [r]\}$. Il existe donc, d'après le th. I.5.14, un unique élément $\tilde\mu$ de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ tel que, quels que soient $i \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, [r]\}$, on ait $\int_{\mathbf{Z}_p} e_{i,k,r}\,\tilde\mu = b_{i,k}$.

Soit $\lambda = \iota(\tilde\mu) - \mu$. C'est, par construction, un élément de $\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, L)$ dont la restriction à $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$ est identiquement nulle. Maintenant, si $k \leq N$, et si $m \in \mathbf{N}$, on peut écrire $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k\,\lambda$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{p^m-1}\Big(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(a+ip^n)^{k-j}\int_{a+ip^n+p^{n+m}\mathbf{Z}_p}(x-(a+ip^n))^j\,\lambda\Big).$$

Comme les termes avec $j \leq r$ sont nuls, et ceux avec $j > r$ ont une valuation supérieure ou égale à $\big(\inf_{r<j\leq k}(j-r)(n+m)\big) + v_{\mathscr{D}_r,N}(\lambda)$, et comme cette dernière quantité tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$, cela permet de montrer que $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k\,\lambda = 0$ quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$, $k \leq N$ et $n \in \mathbf{N}$. On en déduit l'égalité $\mu = \iota(\tilde\mu)$, ce qui prouve que ι est surjective et permet de conclure.

4. Autres valuations naturelles sur $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$. — La valuation $v'_{\mathscr{D}_r}$ dont nous avons muni $\mathscr{D}_r$ n'est pas toujours très commode. La prop. II.3.3 ci-dessous permet, suivant les cas, d'en choisir une plus adaptée, la valuation $v_{\mathscr{D}_r}$ étant, en général, la plus naturelle.

Proposition II.3.3. — (i) *Si on définit $v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$, pour $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ par la formule*

$$v_{\mathscr{D}_r}(\mu) = \inf_{n\in\mathbf{N}} v_{\mathrm{LA}_n}(\mu) + rn = \inf_{a\in\mathbf{Z}_p,\, k\in\mathbf{N},\, n\in\mathbf{N}} \Big(v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k\,\mu\Big) + rn\Big),$$

alors $v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$ est une valuation sur $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ équivalente à la valuation $v'_{\mathscr{D}_r}$.

(ii) *Si* $N \in \mathbf{N}$ *est* $\geq [r]$, *et si on définit* $v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu)$, *pour* $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ *par la formule*

$$v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) = \inf_{a\in\mathbf{Z}_p,\, k\leq N,\, n\in\mathbf{N}} \Big(v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k \mu\Big) + rn\Big),$$

alors $v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu)$ *est une valuation sur* $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ *équivalente à la valuation* $v_{\mathscr{D}_r}$.

(iii) *Si* $N \in \mathbf{N}$ *est* $\geq [r]$, *et si on définit* $v'_{\mathscr{D}_r,N}(\mu)$, *pour* $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ *par la formule*

$$v'_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) = \inf_{a\in\mathbf{Z}_p,\, n\in\mathbf{N}} \Big(v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^N \mu\Big) + rn\Big),$$

alors $v'_{\mathscr{D}_r,N}(\mu)$ *est une valuation sur* $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ *équivalente à la valuation* $v_{\mathscr{D}_r,N}$.

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont des conséquences du th. II.3.2 et du théorème de l'image ouverte. Pour démontrer le (iii), constatons que $v'_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) \geq v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu)$. Par ailleurs, si $k \leq N$, il existe $\alpha_{0,k}, \dots, \alpha_{N,k} \in \mathbf{Q}$, tels que $x^k = \sum_{i=0}^N \alpha_{k,i}(x-i)^N$. On a alors, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^k = \sum_{i=0}^N \alpha_{k,i}\big(\frac{x-(a+ip^n)}{p^n}\big)^N.$$

On en déduit la minoration $v_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) \geq v'_{\mathscr{D}_r,N}(\mu) + \inf_{0\leq i,k\leq N} v_p(\alpha_{i,k})$. Ceci permet de conclure.

II.4. Opérations sur les distributions

1. Masses de Dirac. — si $a \in \mathbf{Z}_p$, soit δ_a la masse de Dirac en a, c'est-à-dire la mesure qui à ϕ associe $\phi(a)$. Sa transformée d'Amice est $(1+T)^a$.

Comme les polynômes sont denses dans $\mathscr{R}^+$, l'espace vectoriel engendré par les masses de Dirac (et même celui engendré par les masses de Dirac aux entiers ≥ 0) est dense dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ (et dans $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ muni de la topologie faible, si $r \geq 0$).

2. Multiplication par une fonction. — Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$ et f est une fonction localement analytique sur $\mathbf{Z}_p$, on définit la distribution $f\mu$ par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\,(f\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} (f\phi)\,\mu$. On peut de même multiplier une mesure par une fonction continue ou, plus généralement, une distribution d'ordre r par une fonction de classe $\mathscr{C}^r$.

• *Multiplication par* x. On a $x\cdot\binom{x}{n} = ((x-n)+n)\binom{x}{n} = (n+1)\binom{x}{n+1} + n\binom{x}{n}$. On en déduit la formule

$$\mathscr{A}_{x\mu}(T) = \partial\mathscr{A}_\mu(T), \quad \text{où } \partial = (1+T)\frac{d}{dT}.$$

• *Multiplication par* z^x *si* $v_p(z-1) > 0$. D'après le lemme II.2.1, si $v_p(y-1) > 0$, et si λ est une distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$, alors $\int_{\mathbf{Z}_p} y^x\lambda(x) = \mathscr{A}_\lambda(y-1)$. Appliquant ceci à $\lambda = z^x\mu$, on obtient $\mathscr{A}_\lambda(y-1) = \mathscr{A}_\mu(yz-1)$ quel que soit $y \in B(0, 0^+)$. On en déduit la formule

$$\mathscr{A}_{z^x\mu}(T) = \mathscr{A}_\mu((1+T)z-1).$$

• *Division par x.* Le résultat n'est bien défini qu'à addition près d'un multiple de la masse de Dirac en 0. Comme la division par x est l'inverse de la multiplication par x, la transformée d'Amice de $x^{-1}\mu$ est une primitive de $(1+T)^{-1}\mathscr{A}_\mu(T)$, le choix de la constante d'intégration correspondant à l'indétermination sus-mentionnée.

3. Restriction à un ouvert compact. — C'est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ouvert compact. Si $n \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{Z}_p$, la fonction caractéristique de $b + p^n\mathbf{Z}_p$ est $x \mapsto p^{-n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b}\eta^x$. Cela se traduit, au niveau des transformées d'Amice, par la formule

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{b+p^n\mathbf{Z}_p}(\mu)}(T) = p^{-n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b}\mathscr{A}_\mu((1+T)\eta - 1).$$

Si $k \geq 1$ et $F \in \mathscr{R}^+$, notons $\partial^{-k}F$ une solution G de l'équation différentielle $\partial^k G = F$, ce qui fait que $\partial^{-k}F$ n'est bien déterminé qu'à addition près d'un polynôme de degré $\leq k-1$ en $\log(1+T)$.

Proposition II.4.1. — *Soient $n \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{Z}_p$ et $k \in \mathbf{Z}$. On a alors*

$$\int_{b+p^n\mathbf{Z}_p} x^k\,\mu = p^{-n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b}\partial^k\mathscr{A}_\mu(\eta-1),$$

si $k \geq 0$ ou si $k \leq -1$ et $b \notin p^n\mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des discussions précédentes. Si $k \leq -1$, l'indépendance du membre de droite par rapport au choix de $\partial^k\mathscr{A}_\mu$ suit de ce que $\log\eta = 0$ si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}$ et de ce que $\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b} = 0$ si $b \notin p^n\mathbf{Z}_p$.

4. Dérivée d'une distribution. — Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, on définit sa dérivée $\mathrm{d}\mu$ par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi'(x)\,\mu \quad \text{et donc} \quad \mathscr{A}_{\mathrm{d}\mu}(T) = \log(1+T)\cdot\mathscr{A}_\mu(T).$$

On remarquera qu'en p-adique, il n'est en général pas possible de définir la primitive d'une distribution, car au niveau des transformées d'Amice, cette opération correspondrait à la division par $\log(1+T)$ qui a une infinité de zéro sur $B(0,0^+)$.

5. Actions de $\mathbf{Z}_p^*$, φ et ψ. — Ces actions permettent de faire le lien entre la théorie des (φ,Γ)-modules et celles des distributions.

• Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, on définit $\sigma_a(\mu) \in\in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$ par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\sigma_a(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax)\,\mu, \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\sigma_a(\mu)}(T) = \mathscr{A}_\mu((1+T)^a - 1).$$

• On fait agir φ sur une distribution μ par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\varphi(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(px)\,\mu, \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\varphi(\mu)}(T) = \mathscr{A}_\mu((1+T)^p - 1).$$

• Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, on note $\psi(\mu)$ la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-1}x)\,\mu, \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\psi(\mu)} = \psi(\mathscr{A}_\mu),$$

où $\psi : \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ est défini par $\psi(F)((1+T)^p - 1) = \frac{1}{p}\sum_{\eta^p=1} F((1+T)\eta - 1)$.

Les actions de $\mathbf{Z}_p^*$, φ et ψ vérifient les relations suivantes :

(a) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$;

(b) $\psi \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \psi$ et $\varphi \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \varphi$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Par ailleurs, « $\psi(\mu) = 0$ » si et seulement si « μ est à support dans $\mathbf{Z}_p^*$ », et

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu) = (1 - \varphi \circ \psi) \cdot \mu.$$

6. Convolution des distributions. — Si λ et μ sont deux distributions, on définit leur convolée $\lambda * \mu$ par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \ \lambda * \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x+y)\ \lambda(x)\Big)\mu(y).$$

En prenant pour ϕ la fonction $x \mapsto z^x$, avec $v_p(z-1) > 0$, on démontre que l'on a $\mathscr{A}_{\lambda*\mu}(z) = \mathscr{A}_\lambda(z)\mathscr{A}_\mu(z)$ quel que soit $z \in B(0, 0^+)$, et donc que $\mathscr{A}_{\lambda*\mu} = \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\mu$.

Pour donner un sens à l'intégrale double ci-dessus, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme II.4.2. — *Si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, les dérivées de ϕ appartiennent à $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. De plus, $v_{\mathrm{LA}_h}\big(\frac{p^{nh}\phi^{(n)}}{n!}\big) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et la suite de terme général $v_{\mathrm{LA}_h}\big(\frac{p^{nh}\phi^{(n)}}{n!}\big)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Soit S un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo $p^h\mathbf{Z}_p$. Si $x_0 \in S$, alors $\frac{p^{nh}\phi^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k}(\phi, x_0)(\frac{x-x_0}{p^h})^k$. Comme $\binom{n+k}{n}$ est entier, on en déduit l'inégalité

$$v_{B(x_0,h)}\Big(\frac{p^{nh}\phi^{(n)}}{n!}\Big) \geq \inf_{k\geq n} v_p(a_k(\phi, x_0)) \geq \inf_{k\geq 0} v_p(a_k(\phi, x_0)) \geq v_{B(x_0,h)}(\phi).$$

On en déduit la minoration voulue, et le fait que la suite de terme général $v_{\mathrm{LA}_h}\big(\frac{p^{nh}\phi^{(n)}}{n!}\big)$ tend vers $+\infty$ est une conséquence du fait que la suite $v_p\big(a_k(\phi, x_0)\big)$ tend vers $+\infty$.

Pour prouver que l'intégrale double définissant $\lambda * \mu$ converge, il suffit d'écrire $\phi(x+y)$, pour $x \in x_0 + p^h\mathbf{Z}_p$, sous la forme

$$\phi(x+y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{nh}\phi^{(n)}(x_0+y)}{n!}\Big(\frac{x-x_0}{p^h}\Big)^n.$$

Comme $v_p\big(\int_{x_0+p^h\mathbf{Z}_p}\big(\frac{x-x_0}{p^h}\big)^n\lambda\big)\geq v_{\mathrm{LA}_h}(\lambda)$, la série

$$\sum_{x_0\in S}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{x_0+p^h\mathbf{Z}_p}\Big(\frac{x-x_0}{p^h}\Big)^n\lambda\Big)\cdot\frac{p^{nh}\phi^{(n)}(x_0+y)}{n!}$$

converge dans $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$ d'après le lemme II.4.2, ce qui permet de conclure.

Proposition II.4.3. — (i) *La convolée de deux mesures est une mesure.*

(ii) *Plus généralement, si λ est d'ordre r et μ d'ordre s, alors $\lambda*\mu$ est d'ordre $r+s$.*

Démonstration. — C'est, modulo le lemme II.1.1 et la prop. I.4.2, immédiat sur les transformées d'Amice.

Remarque II.4.4. — La formule $\mathscr{A}_{\lambda*\mu}=\mathscr{A}_\lambda\mathscr{A}_\mu$ montre que si $\delta_a*\mu=\mu$ quel que soit $a\in\mathbf{Z}_p$, alors $\mu=0$. Il n'y a donc pas de distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$, invariante par translation ; autrement dit, il n'y a pas de mesure de Haar p-adique.

7. Distributions à support ponctuel. — Si X est un fermé de $\mathbf{Z}_p$, une distribution μ sur $\mathbf{Z}_p$ est *à support dans X*, si on a $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\mu=0$ pour tout $\phi\in\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p,L)$ qui est telle qu'il existe un ouvert contenant X sur lequel ϕ est identiquement nulle.

Proposition II.4.5. — *Si $r\geq 0$, et si $a\in\mathbf{Z}_p$, une distribution d'ordre r, à support dans $\{a\}$ est une combinaison linéaire des dérivées $\mathrm{d}^i\delta_a$, $i\leq r$, de la masse de Dirac en a.*

Démonstration. — On peut se ramener à $a=0$ en convolant avec δ_{-a}. Soit alors $\mu\in\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p,L)$ à support dans $\{0\}$. On peut écrire μ sous la forme

$$\mu=\lambda+\sum_{i=0}^{[r]}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}\frac{x^i}{i!}\,\mu\Big)\cdot\mathrm{d}^i\delta_0,$$

où $\lambda\in\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p,L)$ vérifie $\int_{\mathbf{Z}_p}x^i\,\lambda=0$ si $0\leq i\leq r$, et on est ramené à prouver que $\lambda=0$. Comme μ est à support $\{0\}$, il en est de même de λ, et comme les $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\cdot x^i$, pour $0\leq i\leq r$, forment une base d'un supplémentaire, dans $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$, de l'espace des fonctions identiquement nulles dans un voisinage de 0, on a $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\lambda=0$, quel que soit $\phi\in\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$. La densité (prop. I.5.13) de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p,L)$ dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$ permet de conclure.

Proposition II.4.6. — (i) *Si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de L telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ converge sur tout $\mathbf{C}_p$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\mathrm{d}^n\delta_0$ converge dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p,L)$ vers une distribution de support $\{0\}$.*

(ii) *Réciproquement, si $\mu\in\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p,L)$ est une distribution de support $\{0\}$, il existe une suite d'éléments de L telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ converge sur tout $\mathbf{C}_p$ et telle que $\mu=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\mathrm{d}^n\delta_0$.*

Démonstration. — Pour démontrer le (i), il suffit, d'après le théorème de Banach-Steinaus, de vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\phi^{(n)}(0)$ converge, pour tout $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$, ce qui est immédiat puisque $v_p(\phi^{(n)}(0)) \geq v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) + v_p(n!) - nh$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

Passons au (ii). Soit μ une distribution à support $\{0\}$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $b_n = \int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\mu$. Comme μ est supposée à support $\{0\}$, on a aussi $b_n = p^{nh}\int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_{p^h\mathbf{Z}_p}(x)(\frac{x}{p^h})^n\,\mu$, quel que soit $h \in \mathbf{N}$. On en déduit la minoration $v_p(b_n) \geq nh + v_{\mathrm{LA}_h}(\mu)$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathbf{N}$, ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}X^n$ converge sur $\mathbf{C}_p$ tout entier. D'après le (i), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}\mathrm{d}^n\delta_0$ converge alors dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p, L)$, et la somme λ de cette série vérifie $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\lambda = b_n = \int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\mu$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Les polynômes étant denses dans $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$, cela implique $\mu = \lambda$, ce qui permet de conclure.

II.5. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$

1. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$ et familles de distributions sur $\mathbf{Z}_p$. — Une distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ est un élément du dual $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$ de l'espace $\mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p)$ des fonctions localement analytiques à support compact dans $\mathbf{Q}_p$. Si μ est une telle distribution, et si $n \in \mathbf{N}$, on note $\mu^{(n)}$ l'élément de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ défini par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\,\mu^{(n)} = \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \phi(p^n x)\mu,$$

si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$. Il n'est pas difficile de vérifier que l'on a $\psi(\mu^{(n+1)}) = \mu^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Réciproquement, si $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de distributions sur $\mathbf{Z}_p$ vérifiant $\psi(\mu_{n+1}) = \mu_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors il existe une unique distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait $\mu^{(n)} = \mu_n$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$: si $\phi \in \mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p)$ est à support dans $p^{-n}\mathbf{Z}_p$, alors $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x)\,\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-n}x)\mu_n$, la relation $\psi(\mu_{n+1}) = \mu_n$ permettant de montrer que $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-n}x)\mu_n$ ne dépend pas du choix de n tel que ϕ soit à support dans $p^{-n}\mathbf{Z}_p$.

On définit la *transformée d'Amice* $\mathscr{A}_\mu$ de μ par la formule $\mathscr{A}_\mu = (\mathscr{A}_\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, où l'on a noté $\mathscr{A}_\mu^{(n)}$ la transformée d'Amice de $\mu^{(n)}$.

Proposition II.5.1. — *L'application $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu$, associant sa transformée d'Amice à une distribution sur $\mathbf{Q}_p$, induit une bijection de $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$ sur l'ensemble des suites $F = (F^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\psi(F^{(n+1)}) = F^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction du résultat correspondant sur $\mathbf{Z}_p$.

2. Action du sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — On munit $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$ d'une action de $P(\mathbf{Q}_p) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ a \in \mathbf{Q}_p^*, b \in \mathbf{Q}_p\}$ en posant

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x)\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(ax+b)\,\mu.$$

Si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $p^n a \in \mathbf{Z}_p$ et $p^n b \in \mathbf{Z}_p$, et si ϕ est une fonction à support dans $\mathbf{Z}_p$, on a

$$\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \phi(p^n x) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu = \int_{p^{-n-v_p(a)}\mathbf{Z}_p} \phi(p^n ax + p^n b)\mu,$$

ce qui, appliqué à $\phi(x) = (1+T)^x$, nous donne

$$\mathscr{A}^{(n)}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\star\mu}(T) = (1+T)^{p^n b}\mathscr{A}^{(n+v_p(a))}_{\mu}((1+T)^{p^{-v_p(a)}a}-1), \text{ si } n \geq \sup(-v_p(a), -v_p(b)).$$

On remarquera que, si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$, et si $n \in \mathbf{Z}$, alors $\mu^{(n)}$ est aussi donné par la formule

$$\mu^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\mu) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu).$$

Proposition II.5.2. — *Si μ est une distribution sur $\mathbf{Q}_p$, si $b \in \mathbf{Q}_p$ et si $m \in \mathbf{Z}$, alors quel que soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $bp^n \in \mathbf{Z}_p$ et $n+m \in \mathbf{N}$, on a*

$$p^m \int_{-b+p^m\mathbf{Z}_p} (x+b)^j \, \mu = p^{-(j+1)n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+m}}} \partial^j((1+T)^{bp^n}\mathscr{A}^{(n)}_{\mu}(T))_{|T=\eta-1}.$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} p^m \int_{-b+p^m\mathbf{Z}_p} (x+b)^j \, \mu &= p^{-(j+1)n} p^{n+m} \int_{-bp^n+p^{m+n}\mathbf{Z}_p} (x+p^n b)^j \, \mu^{(n)} \\ &= p^{-(j+1)n} p^{n+m} \int_{p^{m+n}\mathbf{Z}_p} x^j \, \mu^{(n)} * \delta_{bp^n} \\ &= p^{-(j+1)n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+m}}} \partial^j((1+T)^{bp^n}\mathscr{A}^{(n)}_{\mu}(T))_{|T=\eta-1}. \end{aligned}$$

3. Distributions tempérées sur $\mathbf{Q}_p$. — Une distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ est *d'ordre* r si $\mu^{(n)}$ est d'ordre r quel que soit $n \in \mathbf{N}$; elle est *globalement d'ordre* r si elle est d'ordre r et s'il existe $C_r(\mu) \in \mathbf{R}$ telle que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait $v_{\mathscr{D}_r}(\mu^{(n)}) \geq nr + C_r(\mu)$. On note $\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ l'espace des distributions globalement d'ordre r sur $\mathbf{Q}_p$ que l'on munit de la valuation $v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mu) = \inf_{n \in \mathbf{N}} v_{\mathscr{D}_r}(\mu^{(n)}) - nr,$$

ce qui en fait un espace de Banach. On a aussi

$$v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mu) = \inf_{a \in \mathbf{Q}_p,\, n \in \mathbf{Z},\, i \in \mathbf{N}} \Big(v_p\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (x-a)^i \, \mu\Big) - (i-r)n\Big)$$

On en déduit la formule

$$v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu) = v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mu) + mr \quad \text{quel que soit } m \in \mathbf{Z}.$$

4. Vecteurs propres pour l'action de ψ. — La théorie d'Iwasawa fournit des distributions sur $\mathbf{Z}_p$, qui sont vecteurs propres de l'opérateur ψ. La proposition suivante montre que ces distributions s'étendent naturellement en des distributions sur $\mathbf{Q}_p$.

Proposition II.5.3. — *Soit $\alpha \in L^*$ avec $v_p(\alpha) \geq 0$. Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ vérifie l'équation fonctionnelle $\psi(\mu) = \alpha^{-1}\mu$, il existe une unique distribution $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ est μ et qui vérifie l'équation fonctionnelle $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} = \alpha\widetilde{\mu}$. De plus, si μ est d'ordre $v_p(\alpha)$, alors $\widetilde{\mu}$ est globalement d'ordre $v_p(\alpha)$.*

Démonstration. — Commençons par constater que, si $\widetilde{\mu}$ est une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ est nulle et qui vérifie $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} = \alpha\widetilde{\mu}$, alors

$$\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mu} = \left(\begin{smallmatrix} p^{-n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu})) = \alpha^{n+1}\left(\begin{smallmatrix} p^{-n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mu} = 0,$$

ce qui implique que $\widetilde{\mu}$ est identiquement nulle. On en déduit l'unicité d'une distribution $\widetilde{\mu}$ vérifiant les conditions de la proposition. Passons à son existence.

Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mu_n = \alpha^n\mu$. Comme $\psi(\mu_{n+1}) = \mu_n$, il existe une unique distribution $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait $\widetilde{\mu}^{(n)} = \mu_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Par construction, la restriction de $\widetilde{\mu}$ à $\mathbf{Z}_p$ est $\mu_0 = \mu$, et on a, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} - \alpha\widetilde{\mu}) &= \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} - \alpha\widetilde{\mu})) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\widetilde{\mu}^{(n+1)} - \alpha\widetilde{\mu}^{(n)}) = \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\alpha^{n+1}\mu - \alpha^{n+1}\mu) = 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} - \alpha\widetilde{\mu}$ est identiquement nulle et donc que $\widetilde{\mu}$ vérifie les conditions demandées.

Enfin, si μ est d'ordre $r = v_p(\alpha)$, alors $v_{\mathscr{D}_r}(\widetilde{\mu}^{(n)}) - nr = v_{\mathscr{D}_r}(\alpha^n\mu) - nr = v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$, ce qui prouve que $\widetilde{\mu}$ est globalement d'ordre r sur $\mathbf{Q}_p$.

II.6. Distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

1. Conditions de croissance à l'infini. — Soit $D(a,n) = a + p^n\mathbf{Z}_p$, si $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, et soit $D(\infty, n) = \{x,\ v_p(x) \leq -n\}$, si $n \in \mathbf{Z}$.

On note $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$ dans L^*. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ l'espace des fonctions ϕ localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$ telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{Q}_p$. Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, on dit que ϕ a un pôle d'ordre $< r$ (resp. d'ordre $\leq r$) en l'infini, si $\delta(x)\phi(1/x)$ a un zéro d'ordre $> r - v_p(\delta(p))$ (resp. d'ordre $\geq r - v_p(\delta(p))$) en 0.

On note $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ le dual de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mu_2 = \int_{D(\infty,0)} \delta(x)\phi(1/x)\ \mu.$$

On note aussi ι_δ l'involution de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\, \iota_\delta(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)\phi(1/x)\ \mu.$$

On a alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_2) = \iota_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_1))$, et réciproquement, si on part de deux distributions μ_1, μ_2 sur $\mathbf{Z}_p$ dont les restrictions à $\mathbf{Z}_p^*$ vérifient la condition ci-dessus, alors on peut recoller μ_1 et μ_2 en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Par contre, il n'est en général pas possible d'étendre une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$; il y a une condition de croissance à l'infini.

On dit que $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ est d'ordre $\leq r$ si les distributions μ_1 et μ_2 ci-dessus appartiennent à $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p)$. On note $\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ l'ensemble des éléments d'ordre $\leq r$ de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, et on munit $\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ de la valuation $v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) = \inf(v_{\mathscr{D}_r}(\mu_1), v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2))$$

qui en fait un espace de Banach. On peut aussi voir $\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ comme le dual de l'espace $\mathscr{C}^r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ des fonctions ϕ de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Q}_p$ telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Q}_p$.

2. Estimées préliminaires. — Les estimées de ce n$^{\text{o}}$ serviront au n$^{\text{o}}$ suivant pour prolonger à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ des distributions sur $\mathbf{Q}_p$.

Lemme II.6.1. — *Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, si $i \in \mathbf{N}$, si $a \in \mathbf{Q}_p^*$, si $n \geq 1 + v_p(a)$ et si $m \geq \sup(n, n(\delta) + v_p(a))$, alors $\mathbf{1}_{D(a,n)}(x)\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i \in \mathrm{LA}_m(\mathbf{Q}_p)$ et*

$$v_{\mathrm{LA}_m}(\mathbf{1}_{D(a,n)}(x)\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i) \geq v_p(a)v_p(\delta(p)) + i\inf(0, v_p(\mathscr{L})).$$

Démonstration. — On se ramène à $a = 1$ en faisant le changement de variable $x = ay$, auquel cas le résultat s'obtient en revenant à la définition de $n(\delta)$ et en développant.

Lemme II.6.2. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, et si $\mathscr{L} \in L$, il existe une constante $C(r,i,\delta,\mathscr{L}) \in \mathbf{R}$ telle que, si $n \in \mathbf{Z}$ et $i \in \mathbf{Z}$, alors*

$$v_p\Big(\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\,\mu\Big) \geq (r - v_p(\delta(p)))n + v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + C(r,i,\delta,\mathscr{L}).$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\,\mu &= \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(p^{-n}x)(\log_{\mathscr{L}}(p^{-n}x))^i \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu \\ &= \delta(p)^{-n}\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x - n\mathscr{L})^i \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu.\end{aligned}$$

On en déduit la minoration

$$\begin{aligned}v_p\Big(\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\,\mu\Big) \geq{}& -n\,v_p(\delta(p)) + v_{\mathscr{D}_r}(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu) \\ &+ v_{\mathrm{LA}_{n(\delta)}}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*} \cdot \delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x - n\mathscr{L})^i) - n(\delta)r,\end{aligned}$$

et le résultat suit, avec $C(r,i,\delta,\mathscr{L}) = -n(\delta)r + i\inf(0, v_p(\mathscr{L}))$, du lemme II.6.1 et de ce que $v_{\mathscr{D}_r}(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu) = v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + nr$, en écrivant $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}$ sous la forme $\sum_{a=1}^{p-1} \mathbf{1}_{D(a,1)}$.

Lemme II.6.3. — *Soient $r \geq 0$ et $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$.*

(i) *Si $i < r$ est un entier naturel, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_{D(0,-n)} x^i\, \mu = 0$.*

(ii) *Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ a un pôle d'ordre $< r$ en ∞ et si $k \in \mathbf{N}$, la suite de terme général $\int_{D(0,-n)-D(0,0)} (\log_{\mathscr{L}} x)^k \phi\, \mu$ admet une limite $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi\, \mu$ quand $n \to +\infty$.*

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{N}$, on a $v_p(\int_{D(0,-n)} x^i \mu) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + (i-r)(-n)$ qui tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$ si $i < r$, ce qui démontre le (i).

Pour prouver le (ii), il s'agit de vérifier que, si $\sum_{i<r-v_p(\delta(p))} a_i x^i$ converge sur $D(\infty, n_0)$ et donc, si $v_p(a_i) - in_0 \to +\infty$ quand $i \to -\infty$, alors la série double

$$\sum_{n\geq n_0+1} \sum_{i<r-v_p(\delta(p))} a_i \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} x^i \delta(x) (\log_{\mathscr{L}} x)^k\, \mu$$

converge. Or, d'après le lemme II.6.2 (appliqué au caractère $x^i\delta$), on a

$$\begin{aligned} v_p(a_i \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} x^i \delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^k\, \mu) &\geq v_p(a_i) + (r - v_p(\delta(p)) - i)n + C \\ &= v_p(a_i) - in_0 + (r - v_p(\delta(p)) - i)(n - n_0) + C', \end{aligned}$$

avec $C, C' \in \mathbf{R}$. Ceci permet de conclure car $v_p(a_i) - in_0 + (r - v_p(\delta(p)) - i)(n - n_0)$ tend vers $+\infty$ si $i < r - v_p(\delta(p))$ tend vers $-\infty$ ou si n tend vers $+\infty$.

3. Prolongement à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ de distributions sur $\mathbf{Q}_p$. — Soit $r \geq 0$, et soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifiant $v_p(\delta(p)) = 2r$. Notre but est de montrer qu'alors tout élément de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ se prolonge naturellement en un élément de $\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. De manière précise, nous allons prouver le résultat suivant.

Proposition II.6.4. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, et si $\mu_\delta \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ est la distribution définie par*

- *$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\, \mu_\delta = \lim_{n\to+\infty} \int_{D(0,-n)} \phi\, \mu$ si ϕ a un pôle d'ordre $< r$ en ∞,*
- *$\int_{D(\infty,0)} \delta(x) x^i\, \mu_\delta = 0$ si $r - v_p(\delta(p)) \leq i \leq 0$,*

alors μ_δ est d'ordre r.

Démonstration. — Pour calculer l'ordre de μ_δ, il s'agit de calculer celui de la distribution μ' sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\mu' = \int_{D(\infty,0)} \delta(x)\phi(1/x)\mu_\delta,$$

et pour ce faire, il s'agit de minorer $v_p(\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu')$, pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$. Il y a deux cas.

• $n > v_p(a)$. Dans ce cas, on a $\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu' = \int_{\mathbf{Q}_p}\phi_{a,n,i}\,\mu$, avec

$$\phi_{a,n,i}(x) = \mathbf{1}_{D(a^{-1},n-2v_p(a))}(x)\cdot\delta(x)x^{-i}\big(\frac{1-ax}{p^n}\big)^i.$$

Si $m = \sup(n-2v_p(a), n(\delta)-v_p(a))$, on a $\phi_{a,n,i}\in \mathrm{LA}_m(\mathbf{Q}_p)$, et écrivant $(\frac{1-ax}{p^n})^i$ sous la forme $p^{i(m-n)}a^i(\frac{x-a^{-1}}{p^m})^i$, on obtient, en utilisant le lemme II.6.1 pour le caractère $x^{-i}\delta$, la minoration

$$v_{\mathrm{LA}_m}(\phi_{a,n,i}) \geq (i-v_p(\delta(p)))v_p(a)+iv_p(a)+i(m-n) = -2rv_p(a)-i(m-n+2v_p(a)).$$

On en déduit la minoration

$$\begin{aligned} v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big) \geq & v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mu)+v_{\mathrm{LA}_m}(\phi_{a,n,i})-rm \\ = & v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mu)+(i-r)(2v_p(a)+m)-in. \end{aligned}$$

Comme $2v_p(a)+m\geq n$ avec égalité si $n\geq v_p(a)+n(\delta)$, on obtient finalement

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big) \geq v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mu)-rn \text{ si } i\geq r \text{ (ou si } n\geq v_p(a)+n(\delta)).$$

• $n\leq v_p(a)$. On a alors $D(a,n)=D(0,n)$ et donc

$$\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu' = \int_{D(\infty,n)}\delta(x)x^{-i}\big(\frac{1-ax}{p^n}\big)^i\,\mu_\delta = \sum_{j=0}^i\binom{i}{j}\big(\frac{-a}{p^n}\big)^j\int_{D(\infty,n)}\delta(x)x^{-j}\,\mu_\delta.$$

On en déduit la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big) \geq \inf_{0\leq j\leq i} v_p\Big(\int_{D(\infty,n)}\delta(x)x^{-j}\,\mu_\delta\Big).$$

Par ailleurs, on a (avec les conventions évidentes si $n\leq 0$)

$$\int_{D(\infty,n)}x^{-j}\delta(x)\mu_\delta = \begin{cases}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\int_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}x^{-j}\delta(x)\mu & \text{si } j>v_p(\delta(p))-r=r,\\ \sum_{i=1}^{n}\int_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}x^{-j}\delta(x)\mu & \text{si } j\leq v_p(\delta(p))-r=r.\end{cases}$$

Ceci permet, en utilisant le lemme II.6.2, de minorer $v_p(\int_{D(\infty,n)}x^{-j}\delta(x)\mu_\delta)$ par

$$\begin{cases}(j-r)n+v_{\mathscr{D}_r}(\mu)+C(r,\delta) & \text{si } j>r,\\ (j-r)(n-1)+v_{\mathscr{D}_r}(\mu)+C(r,\delta) & \text{si } j\leq r.\end{cases}$$

Comme $n\geq 0$ puisque μ' est à support dans $\mathbf{Z}_p$, on obtient finalement la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu)-rn+C(r,\delta).$$

Les deux minorations ci-dessus montrent que μ' est d'ordre r et qu'il existe $C'(r,\delta)$ tel que $v_{\mathscr{D}_r}(\mu')\geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu)+C'(r,\delta)$, ce que l'on cherchait à démontrer.

4. Restriction à $\mathbf{Q}_p$ de distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. — On suppose encore que l'on a $v_p(\delta(p)) = 2r$. On note $\nu_\delta^{[i]}$ (resp. $\nu_0^{[i]}$) l'élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ défini par

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\, \nu_\delta^{[i]} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}(\delta(x)\phi(1/x))_{|x=0} \quad \Big(\text{resp. } \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\, \nu_0^{[i]} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}(\phi(x))_{|x=0}\Big).$$

C'est une distribution dont le support est réduit à ∞ (resp. 0).

D'après la prop I.6.3, on a $x^i \in \mathscr{C}^r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ si $i < v_p(\delta(p)) - r = r$. L'intégrale $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i\mu$ est donc bien définie si $i < r$ et $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Soit

$$\begin{aligned} \tau_{\geq r} : \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta)) &\to \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta)) \\ \mu &\mapsto \mu - \sum_{0\leq i<r}\Big(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i\mu\Big)\nu_0^{[i]}. \end{aligned}$$

Remarque II.6.5. — (i) $\tau_{\geq r}$ est la projection de $\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ sur le sous-espace des μ vérifiant $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i\mu = 0$ si $0 \leq i < r$, parallèlement à $\oplus_{0\leq i<r} L\cdot\nu_0^{[i]}$.

(ii) Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ et si $\mu_\delta \in \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ est la distribution définie au lemme II.6.3, alors $\tau_{\geq r}(\mu_\delta) = \mu_\delta$.

Proposition II.6.6. — *Si $r \geq 0$, l'application*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} \circ \tau_{\geq r} : \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta)) \to \mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$$

induit une suite exacte

$$0 \to \big(\oplus_{0\leq i<r} L\cdot\nu_0^{[i]}\big) \oplus \big(\oplus_{0\leq i\leq r} L\cdot\nu_\delta^{[i]}\big) \to \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta)) \to \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p) \to 0$$

de L-banach.

Démonstration. — Comme d'habitude, si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\mu_2 = \int_{D(\infty,0)}\delta(x)\phi(1/x)$, ce qui fait de μ_1 et μ_2 des éléments de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p)$. La condition $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu) = 0$ est alors équivalente à ce que μ_2 soit à support 0 et la formule

$$\ker(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\tau_{\geq r}) = \big(\oplus_{0\leq i<r} L\cdot\nu_0^{[i]}\big) \oplus \big(\oplus_{0\leq i\leq r} L\cdot\nu_\delta^{[i]}\big)$$

est une traduction du (i) de la remarque II.6.5 et du fait qu'une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, d'ordre r, et à support 0, est une combinaison linéaire des $\nu_0^{[i]}$, pour $i \leq r$.

La surjectivité de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\tau_{\geq r}$ est une conséquence de la prop II.6.4 et du (ii) de la remarque II.6.5. Pour conclure, il s'agit donc de montrer, d'une part, que, si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ vérifie $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i\mu = 0$ si $0 \leq i < r$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu) \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, et, d'autre part, que $\mu \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ est continue. Pour ce faire, on est amené à étudier les intégrales $\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu$, pour $i \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$.

- Si $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \geq 0$ (i.e. si $D(a,n) \subset \mathbf{Z}_p$), on a

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu\Big) = v_p\Big(\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu_1\Big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu_1) - rn.$$

• Si $a \notin \mathbf{Z}_p$ et $n > v_p(a)$ (i.e. si $D(a,n) \cap \mathbf{Z}_p = \emptyset$), on a

$$\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi_{a,n,i}\, \mu_2,$$

où $\phi_{a,n,i}$ est la fonction qui a été introduite au cours de la démonstration de la prop. II.6.4. On en déduit, comme dans cette démonstration, la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu\Big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2) - rn \;\text{ si } i \geq n \text{ (ou si } n \geq v_p(a) + n(\delta)).$$

• Si $a = 0$, $n < 0$ et $i < r$, on a, grâce à l'hypothèse $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i \mu = 0$ si $i < r$,

$$\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu = -p^{-ni} \int_{\mathbf{Q}_p - p^{-n}\mathbf{Z}_p} x^{-i}\delta(x)\, \mu_2 = -p^{-ni} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{p^{-n-k}\mathbf{Z}_p^*} x^{-i}\delta(x)\, \mu_2.$$

On en déduit la minoration $v_p\big(\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu\big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2) - rn + C(r,\delta)$, en utilisant le lemme II.6.2.

• Si $a = 0$, $n < 0$ et $i \geq r$, on a alors,

$$\begin{aligned}\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu &= \int_{p^n\mathbf{Z}_p} (p^{-n}x)^i \mu \\ &= p^j \int_{p^{n+1}\mathbf{Z}_p} (p^{-n-1}x)^j \mu + \sum_{b=1}^{p-1} \int_{p^n b + p^{n+1}\mathbf{Z}_p} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} b^{i-j} p^j \Big(\frac{x - p^n b}{p^{n+1}}\Big)^j \mu.\end{aligned}$$

Or, on a déjà constaté que $v_p\big(\int_{p^n b + p^{n+1}\mathbf{Z}_p} \big(\frac{x-p^n b}{p^{n+1}}\big)^j \mu\big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2) - (n+1)r$. On en déduit que

$$v_p\Big(\int_{p^n\mathbf{Z}_p} (p^{-n}x)^i \mu\Big) \geq \inf\Big(i + v_p\Big(\int_{p^{n+1}\mathbf{Z}_p} (p^{-n-1}x)^i \mu\Big), v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2) - (n+1)r\Big),$$

et une récurrence descendante immédiate (utilisant $i \geq r$) montre que l'on a

$$v_p\Big(\int_{p^n\mathbf{Z}_p} (p^{-n}x)^i \mu\Big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2) - (n+1)r$$

quel que soit $n < 0$.

• Si $a \notin \mathbf{Z}_p$ et $n \leq v_p(a)$ (i.e. si $D(a,n) \cap \mathbf{Z}_p \neq \emptyset$ et $D(a,n) \not\subset \mathbf{Z}_p$), alors on a $D(a,n) = D(0,n)$ et

$$\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (p^{-n}a)^{i-j} \int_{p^n\mathbf{Z}_p} (p^{-n}x)^j \mu,$$

ce qui permet d'utiliser les deux minorations précédentes pour obtenir

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu\Big) \geq v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2) - (n+1)r.$$

Les minorations précédentes montrent que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$ et qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que

$$v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)) \geq \inf(v_{\mathscr{D}_r}(\mu_1), v_{\mathscr{D}_r}(\mu_2)) + C = v_{\mathscr{D}_r(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) + C,$$

ce qui permet de conclure.

Références

[1] Y. Amice, Interpolation p-adique, Bull. Soc. France **92** (1964), 117–180.

[2] Y. Amice, Duals. Proc. of a conf. on p-adic analysis (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978

[3] Y. Amice, Mesures p-adiques, sém. Delange-Poitou-Pisot 1964-65.

[4] Y. Amice, Dual d'un espace $H(D)$ et transformée de Fourier, groupe d'étude d'analyse ultramétrique 1973-74.

[5] Y. Amice et J. Vélu, Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, Astérisque **24-25** (1975), 119–131.

[6] D. Barsky, Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. S.M.F. **101**, (1973), 397–411.

[7] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[8] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[9] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, ce volume.

[10] K. Mahler, An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable, J. reine und angew. Mathematik **199** (1958), 23–34.

[11] Y. Manin, Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series, Math USSR-Sb. **92** (1973) 371–393.

[12] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.

[13] M. van der Put, Algèbres de fonctions continues p-adiques, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. **A 71** (1968), 556–661.

[14] A. Robert, *A course in p-adic analysis*, G.T.M. **198**, Springer-Verlg, 2000.

[15] A. van Rooij, *Non-Archimedean functional analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. **51**, Marcel Dekker, 1978.

[16] W. Schikhof, Non-archimedian calculus, prépublication, université de Nijmegen, 1978.

[17] W. Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **4**, Cambridge University Press, 1984.

[18] J-P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, Publ. I.H.E.S. **12** (1962), 69–85.

[19] M. Vishik, Non-archimedian measures connected with Dirichlet series, Math. USSR Sbornik **28** (1976), 216–228.

Les résultats concernant les L-banach sont tirés de [**18**]. La base orthonormale d'ondelettes de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ a été introduite dans [**13**] ; celle des polynomes binomiaux dans [**10**]. La caractérisation des fonctions localement analytiques en termes de développement de Mahler apparaît dans [**1**], celle des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ dans [**6**] (au moins si r est entier). La surjectivité de $\frac{d}{dx} : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$ est établie dans [**16**]. La transformée d'Amice apparaît dans [**3**] et est systématisée dans [**2**]. La notion de distribution d'ordre r est issue de [**11, 5, 19**] (voir aussi [**12**]). Le dictionnaire entre analyse fonctionnelle p-adique et anneaux de séries de Laurent auquel il est fait allusion dans l'introduction est en germe dans [**4**]. Je remercie D. Barsky pour ces références.

Pierre Colmez, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr