ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE ET REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM

par

Pierre Colmez

Résumé. — La conjecture de monodromie p-adique de Fontaine « de Rham implique potentiellement semi-stable » est maintenant un théorème : Berger a montré comment associer à une représentation de de Rham un module différentiel avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba, ce qui permet de ramener cette conjecture à la conjecture de monodromie de Crew qui a ensuite été démontrée par André, Mebkhout et Kedlaya de manière indépendante. Dans cet article, nous donnons une nouvelle démonstration de la conjecture de Fontaine ne s'appuyant pas sur la théorie des équations différentielles p-adiques.

Abstract. — The p-adic monodromy conjecture of Fontaine « de Rham implies potentially semi-stable » is now a theorem : Berger showed how to attach to a de Rham representation a differential module with a Frobenius structure over the Robba ring, which reduced Fontaine's conjecture to Crew's monodromy conjecture proved afterwards, independently by André, Mebkhout and Kedlaya. In this paper, we give a new proof of Fontaine's conjecture which bypasses the theory of p-adic differential equations.

Table des matières

Introduction 2
0.1. Notations 2
0.2. La conjecture de monodromie p-adique de Fontaine 3
0.3. Principe de la démonstration 4
0.4. Démonstration de la conjecture de Fontaine 5
0.5. Remarques sur le théorème « de Dieudonné-Manin » 7
0.6. Remarques sur le théorème « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » 8
0.7. Organisation de l'article 8
0.8. Remerciements 8
1. Rappels et compléments sur les Espaces Vectoriels de Dimension finie 9
1.1. Espaces Vectoriels de Dimension finie 9
1.2. Le corps des éléments additifs 11
1.3. Le commutant de E dans $\mathscr{C}$ 12
2. Sous-Espaces Vectoriels des Anneaux de Fontaine 15
2.1. Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{V}^d$ 15
2.2. Les Anneaux de Fontaine 17
2.3. Sous-Espace Vectoriels de $\mathbb{B}_m$ 17
2.4. Sous-Espaces Vectoriels de $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ 18
2.5. Sous-Espaces Vectoriels de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ 19
3. Autour du théorème de Dieudonné-Manin 21

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S.
Mots clefs. — p-adique, Banach, représentations, semi-stable, anneaux de Fontaine.

3.1. Énoncé des résultats ... 21
3.2. Démonstration directe du corollaire 3.7 ... 23
3.3. Démonstration du corollaire 3.5 ... 25
3.4. Démonstration du théorème 3.2 ... 27
4. Les anneaux de caractéristique p ... 28
4.1. Rappels sur les corps locaux ... 28
4.2. L'extension cyclotomique d'une extension finie de F ... 29
4.3. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et certains de ses sous-anneaux ... 31
4.4. L'anneau des normes ... 32
5. Les anneaux parfaits ... 33
5.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ et certains de ses sous-anneaux ... 33
5.2. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et certains de ses sous-anneaux ... 34
5.3. Les anneaux $\mathbf{B}^+_{\mathrm{max}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ ... 36
5.4. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ et ses sous-anneaux ... 37
5.5. Le logarithme et l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}$ ... 37
5.6. L'anneau $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ... 38
6. Les anneaux imparfaits ... 39
6.1. Les anneaux $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ ... 39
6.2. Les éléments π, π_K, π_n et $\pi_{K,n}$ ... 40
6.3. Le corps $\mathbf{B}^\dagger$ et ses sous-anneaux ... 42
7. Anneaux imparfaits et séries de Laurent ... 43
7.1. L'anneau $\mathbf{A}_K$ ... 43
7.2. L'anneau $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ ... 43
7.3. L'anneau $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ ... 44
8. Traces de Tate normalisées ... 46
8.1. Sur $\widehat{K}_\infty$ ... 46
8.2. Sur $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ ... 46
8.3. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ ... 47
8.4. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ ... 48
8.5. Sur $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ ... 49
9. Action de Γ_K ... 50
9.1. Invariants ... 50
9.2. Le Γ_K-module $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ ... 50
9.3. Le Γ_K-module $\big(\mathbf{A}_K^{(0,r]}\big)^{\psi=0}$ ... 52
9.4. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ ... 53
9.5. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ ... 54
10. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine ... 54
10.1. Descente presque étale ... 54
10.2. Décomplétion ... 55
10.3. Cocycles se trivialisant dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ... 55
10.4. Cohomologie de $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ ... 56
10.5. Un résultat du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ ... 57
10.6. Un résultat du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour $\mathbf{U}_{h,a}$ et $\mathbf{U}'_{h,a}$ ... 58
Références ... 59

Introduction

0.1. Notations. — Soient k_F un corps parfait de caractéristique p, $\mathscr{O}_F = W(k_F)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F et $F = \mathscr{O}_F[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathscr{O}_F$, ce qui fait de F un corps complet pour la valuation p-adique v_p (que l'on suppose normalisée par $v_p(p) = 1$), d'anneau des entiers $\mathscr{O}_F$ et de corps résiduel k_F.

On se fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F. La valuation v_p s'étend de manière unique à $\overline{F}$ et on note C le complété de $\overline{F}$ pour la valuation v_p. Si $K \subset \overline{F}$ est une extension algébrique de F, on note $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers de K et k_K son corps résiduel.

On se fixe aussi un système $(\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\overline{F}$ vérifiant $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$. Ceci fait de $\varepsilon^{(n)}$ une racine primitive p^n-ième de l'unité.

Si K est une extension finie de F, on note K_n le corps $K(\varepsilon^{(n)})$ et K_∞ l'extension cyclotomique de K réunion des K_n. On note $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K)$ et $\chi : \mathscr{G}_K \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Soit aussi $\mathscr{H}_K$ le noyau de la restriction de χ à $\mathscr{G}_K$ de telle sorte que $\mathscr{H}_K = \mathrm{Gal}(\overline{F}/K_\infty)$ et soit $\Gamma_K = \mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Alors χ se factorise à travers Γ_K et l'image de Γ_K par χ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$.

0.2. La conjecture de monodromie p-adique de Fontaine. — Soit K une extension finie de F et soit V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension d de $\mathscr{G}_K$, c'est-à-dire un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension d muni d'un morphisme continu de groupes de $\mathscr{G}_K$ dans $\mathrm{GL}(V)$. Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ les anneaux introduits par Fontaine [**14, 15, 17**] pour classifier les $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{G}_K$ venant de la géométrie, et soit $t \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ le « $2i\pi$ p-adique de Fontaine ». Rappelons que V est *de de Rham* si $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}])^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module, ce qui équivaut à ce que le K-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ soit de dimension d. De même, V est *semi-stable* si $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+[\frac{1}{t}])^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module. Une représentation semi-stable est *a fortiori* de de Rham ; réciproquement, une représentation de de Rham est semi-stable si et seulement si $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ possède une base sur K constituée d'éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. On dit que V est *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie L de K telle que V soit semi-stable en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_L$. Une représentation potentiellement semi-stable est de de Rham (car $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ contient $\overline{F}$) et notre but, dans cet article, est de donner une nouvelle démonstration du résultat suivant qui avait été conjecturé par Fontaine [**18**].

Théorème 0.1. — *Toute représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ est potentiellement semi-stable.*

Les démonstrations existantes[(1)] de ce théorème passent par la théorie des équations différentielles p-adiques. En utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules [**16, 6**], Berger [**4**] a associé à une représentation de de Rham V un module différentiel $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$ avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba et a montré que V était semi-stable si et seulement si ce module était quasi-unipotent, réduisant ainsi la conjecture de Fontaine à la conjecture de monodromie p-adique de Crew [**13**]. La conjecture de Crew a ensuite été démontrée de manière indépendante par André [**2**], par Mebkhout [**25**] et par Kedlaya [**24**] ; je renvoie à [**10**] pour plus de détails. Des trois démonstrations de la conjecture de Crew à notre disposition, celle de Kedlaya est celle qui utilise le moins la théorie des équations différentielles p-adiques : elle repose à la place sur une classification à la Dieudonné-Manin des φ-modules sur l'anneau de Robba, ce qui lui permet par dévissage de se ramener au cas d'un module isocline traité par Tsuzuki [**29, 8**].

(1) Depuis la première version de cet article, Fontaine [**20**] a fabriqué une autre démonstration évitant le recours à la théorie des équations différentielles p-adiques ; un de ses ingrédients n'est pas sans rappeler les techniques du n° 3.3 de cet article.

0.3. Principe de la démonstration. — Notre démonstration de la conjecture de Fontaine est parallèle à celle obtenue en combinant les travaux de Berger et Kedlaya, mais évite complètement la théorie des (φ, Γ)-modules et celle des équations différentielles p-adiques (il reste quand-même un fantôme de ces théories dans la démonstration de certains points). Elle a été obtenue en deux temps. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, le seul point où la théorie des équations différentielles p-adiques est utilisée dans les travaux de Kedlaya est à travers le théorème de Tsuzuki. Or celui-ci admet un équivalent (prop. 0.2 ci-dessous), dû à Sen [**26**], dans la théorie des représentations galoisiennes (cf. [**4**, n° 5.6] pour l'équivalence des résultats de Sen et de Tsuzuki) ; avec ce fait en tête, il n'est pas très difficile de fabriquer une démonstration de la conjecture de Fontaine ne faisant pas référence aux équations différentielles p-adiques, en faisant du mécano avec les arguments de Berger et Kedlaya (c'est cette démonstration qui apparaît en filigrane dans cette introduction). Par la suite, des questions provenant de la théorie des déformations de représentations galoisiennes [**5**] nous ont amené à essayer de rendre les ingrédients de la démonstration les plus directs possibles (et à expliciter comment les constantes se comportent dans une famille) dans l'espoir que ceux-ci s'adaptent à une démonstration « en famille ».

Nous remplaçons le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya par un résultat analogue (cf. prop 0.3) pour certains φ-modules sur l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+})$, et utilisons cette décomposition pour une variante $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^{+}(V)$ du module $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(V)$ de Berger. Le théorème de Tsuzuki est remplacé par le résultat suivant de Sen [**26**] (bien antérieur à la définition de représentation semi-stable !), selon lequel une représentation de de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont nuls (ce qui se traduit par l'existence d'un isomorphisme de $\mathscr{G}_K$-modules de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+})^d$) est potentiellement non ramifiée et donc, *a fortiori*, potentiellement semi-stable.

Proposition 0.2. — *Si V est une représentation de Hodge-Tate de $\mathscr{G}_K$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *l'inertie de $\mathscr{G}_K$ agit à travers un quotient fini ;*
(ii) *les poids de Hodge-Tate de V sont tous nuls.*

Le dévissage permettant de se ramener au cas « isocline » est un peu plus délicat que dans le cas des équations différentielles p-adiques, et repose sur des calculs de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine et, plus précisément (cf. prop. 0.4 ci-dessous) sur un énoncé du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour les $\mathscr{G}_K$-modules

$$\mathbf{U}_{h,a} = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+})^{\varphi^h=p^a} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}'_{h,a} = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{+})^{\varphi^h=p^a}.$$

Les méthodes pour faire ces calculs, bien que relativement techniques, sont parfaitement huilées : elle remontent à l'article fondateur de Tate [**28**].

Signalons que Fontaine avait démontré [**19**] le théorème 0.1 ci-dessus (avant qu'il ne soit démontré en toute généralité) pour les représentations de dimension 2, par une méthode qui rappelle un peu celle décrite ci-dessus.

L'analogue du théorème de Dieudonné-Manin auquel il a été fait allusion plus haut est le suivant

Proposition 0.3. — *Soit M un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ et soit $M_{\mathrm{rig}} = \{x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+)^d,\ \varphi^n(x) \in M$, quel que soit $n \in \mathbf{Z}\}$. Alors M_{rig} est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d, et il existe une base $e_1, \dots, e_d$ de M_{rig} sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant :*

(i) *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ si $1 \leqslant i \leqslant d$;*

(ii) *$\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est une base de M sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Rappelons que l'on obtient $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+$ à partir de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ en lui adjoignant un analogue p-adique u de $\log p$. On a alors $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[u]$, et la dérivation $N = -\frac{d}{du} : \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \to \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+$ commute à l'action de $\mathscr{G}_K$. Le résultat du type « $H_g^1 = H_{\mathrm{st}}^1$ » auquel il a été fait allusion ci-dessus est alors le suivant. (Le corps E_h apparaissant dans l'énoncé est l'extension non ramifiée de degré h de $\mathbf{Q}_p$.)

Proposition 0.4. — *Soient a et h des entiers $\geqslant 1$.*

(i) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}_{h,a}$ tel que $\sigma \mapsto \varphi^{-n}(c_\sigma)$ soit un cobord dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors, si $a \neq h$ (resp. si $a = h$), il existe $c \in \mathbf{U}_{h,a}$ (resp. $c \in E_h^{\mathscr{G}_K} u + \mathbf{U}_{h,a}$) tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

(ii) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}_{h,a}'$ tel que $\sigma \mapsto N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma))$ soit un cobord dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, pour tous $k, n \in \mathbf{N}$. Alors il existe $c \in \mathbf{U}_{h,a}'$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

0.4. Démonstration de la conjecture de Fontaine. — Nous renvoyons aux n° 0.5 et n° 0.6 pour des commentaires sur la démonstration des propositions 0.3 et 0.4 ; nous allons maintenant montrer comment on peut en déduire la conjecture de monodromie de Fontaine. (L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ apparaissant ci-dessous est défini par $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ = \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+)$; on a aussi $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[u]$, et on aurait pu définir les $\mathscr{G}_K$-modules $\mathbf{U}_{h,a}$ et $\mathbf{U}_{h,a}'$ par $\mathbf{U}_{h,a} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+)^{\varphi^h = p^a}$ et $\mathbf{U}_{h,a}' = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{\varphi^h = p^a}$.)

Soit V une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, de dimension d, à poids de Hodge-Tate $\leqslant 0$ (on peut s'y ramener en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique). Soit $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V) = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$; l'hypothèse selon laquelle les poids de Hodge-Tate de V sont $\leqslant 0$ implique que $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ est un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$.

Soit $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V) = \{x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \mid \varphi^{-n}(x) \in \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V),$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}\}$. La proposition 0.3 ci-dessus appliquée à $M = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ nous fournit le résultat suivant :

Proposition 0.5. — *$\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d. Plus précisément, $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ possède une base $e_1, \dots, e_d$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant :*

(i) *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ si $1 \leqslant i \leqslant d$;*

(ii) *$\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est une base de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Comme $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ en tant que $\mathscr{G}_K$-module, la proposition 0.6 ci-dessous montre qu'il existe une extension finie L de $\mathscr{G}_K$ telle que $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ contienne d éléments indépendants sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, fixes par I_L. Mais $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ est inclus dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, ce qui prouve que V est semi-stable en tant que représentation de I_L et donc aussi en tant que représentation de $\mathscr{G}_L$, ce que l'on cherchait à démontrer.

Proposition 0.6. — *Soit Y un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d muni d'actions semi-linéaires de φ et $\mathscr{G}_K$ commutant entre elles. Si Y possède une base $e_1, \dots, e_d$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant :*

(i) *il existe* $h \in \mathbf{N}$ *et* $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{N}$ *tels que* $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ *si* $1 \leqslant i \leqslant d$,

(ii) *le* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$*-module engendré par* $\varphi^n(e_1), \ldots, \varphi^n(e_d)$ *est isomorphe à* $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ *en tant que* $\mathscr{G}_K$*-module, quel que soit* $n \in \mathbf{N}$,

alors il existe une extension finie L *de* K *et une base* $f_1, \ldots, f_d$ *de* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} Y$ *sur* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(a) f_i *est fixe par le sous-groupe d'inertie* I_L *de* $\mathscr{G}_L$.

(b) $f_i = e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} e_j$, *avec* $\alpha_{i,j} \in \mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$ (et donc $\varphi^h(f_i) = p^{a_i} e_i$) ;

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal r de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_d\}$. Si $r = 1$ (i.e. si tous les a_i sont égaux à un entier a), alors $W = E_h e_1 \oplus \cdots \oplus E_h e_d$ est l'ensemble des $x \in Y$ vérifiant $\varphi^h(x) = p^a x$; c'est donc un E_h-espace vectoriel de dimension d stable par $\mathscr{G}_K$. D'autre part, le $\mathscr{G}_K$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} W = \oplus_{i=0}^{h-1} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{E_h} \varphi^i(W)$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{hd}$, d'après la propriété (ii) de la base $e_1, \ldots, e_d$. Ceci signifie que W, vu comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_K$, est une représentation de de Rham dont tous les poids de Hodge-Tate sont nuls ; on déduit du théorème de Sen (prop. 0.2) l'existence d'une extension finie L de K telle que les e_i soient fixes par I_L, ce qui conclut l'étude du cas $r = 1$.

Si $r \neq 1$, soit s le plus petit entier tel que $a_{s+1} \neq a_1$, et soient Y' le sous-$\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module de Y engendré par $e_1, \ldots, e_s$ et $Y'' = Y/Y'$. Comme $a_j > a_s$, pour tout $j \geqslant s+1$, le E_h-espace vectoriel engendré par $e_1, \ldots, e_s$ est aussi l'espace $Y^{\varphi^h = p^{a_1}}$. On en déduit que Y' est stable par φ et $\mathscr{G}_K$, ce qui fait que Y' et Y'' sont munis d'actions de φ et $\mathscr{G}_K$ commutant entre elles. D'autre part, si $n \in \mathbf{N}$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y') \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y) \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y'') \to 0$$

de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-modules munis d'une action de $\mathscr{G}_K$. On en déduit la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y'))^{\mathscr{G}_K} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y))^{\mathscr{G}_K} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y''))^{\mathscr{G}_K},$$

et comme $\dim_K((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+} \varphi^n(Y))^{\mathscr{G}_K}) = d$, par hypothèse, et $\dim_K M^{\mathscr{G}_K} \leqslant \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M$, si M est un-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module libre de rang fini muni d'une action de $\mathscr{G}_K$, on en déduit le fait que Y' (muni de la base $e_1, \ldots, e_s$) et Y'' (muni de la base $\overline{e}_{s+1}, \ldots, \overline{e}_d$, où $\overline{e}_j$ désigne l'image de e_j dans Y'') vérifient les conditions de la proposition. On peut appliquer les résultats obtenus pour $r = 1$ à Y' et l'hypothèse de récurrence à Y'', ce qui nous fournit une extension finie L de K et des $\alpha_{i,j} \in \mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$, pour $s+1 \leqslant j < i \leqslant d$, tels que I_L agisse trivialement sur $g_1 = e_1, \ldots, g_s = e_s$ et sur $\overline{g}_i = \overline{e}_i + \sum_{j=s+1}^{i-1} \alpha_{i,j} \overline{e}_j$, pour $s+1 \leqslant i \leqslant d$. Soit $g_i = e_i + \sum_{j=s+1}^{i-1} \alpha_{i,j} e_j$ si $s+1 \leqslant i \leqslant d$. Si $\sigma \in I_L$ et si $i \geqslant s+1$, alors $(\sigma - 1) \cdot g_i \in Y'$, ce qui permet de l'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^{s} \beta_{i,j,\sigma} e_j$, et comme g_i vérifie $\varphi^h(g_i) = p^{a_i} g_i$, l'application $\sigma \mapsto \beta_{i,j,\sigma}$ est un 1-cocycle sur I_L à valeurs dans $\mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$.

Soit M_n le sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module engendré par $\varphi^n(e_1), \ldots, \varphi^n(e_d)$. Comme la matrice de passage de $e_1, \ldots, e_d$ à $g_1 + N^k(g_1), \ldots, g_d + N^k(g_d)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, les $\varphi^n(g_i + N^k(g_i))$ forment une base de M_n sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans laquelle la matrice de $\sigma \in I_L$ est $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_s & B_{k,n,\sigma} \\ 0 & \mathbf{1}_{d-s} \end{smallmatrix}\right)$, où $B_{k,n,\sigma}$ est celle des $\varphi^n(\beta_{i,j,\sigma} + N^k(\beta_{i,j,\sigma}))$. L'hypothèse selon laquelle M_n est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, en tant que $\mathscr{G}_K$-module, se traduit donc par la nullité de l'image, dans $H^1(I_L, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, des cocycles $\sigma \mapsto \varphi^n(\beta_{i,j,\sigma} + N^k(\beta_{i,j,\sigma}))$, pour $s+1 \leqslant i \leqslant d$ et $1 \leqslant j \leqslant d$, quels que soient $n \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$. On déduit de la proposition 0.4 l'existence de $\beta_{i,j} \in \mathbf{U}'_{h,a_i-a_j}$ tel que l'on ait $\beta_{i,j,\sigma} = (1-\sigma)\cdot\beta_{i,j}$, pour tout $\sigma \in I_L$. Il suffit alors de poser $f_i = g_i$ si $i \leqslant s$ et $f_i = g_i + \sum_{j=1}^{s}\beta_{i,j}e_i$ si $s+1 \leqslant i \leqslant d$ pour obtenir une base de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}\otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} Y$ vérifiant les conditions souhaitées. Ceci permet de conclure.

0.5. Remarques sur le théorème « de Dieudonné-Manin ». — Les travaux de Kedlaya et Berger utilisent l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ (que Kedlaya note $\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an,con}}\ldots$) au lieu de l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$; cet anneau contient $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et peut s'obtenir en localisant et complétant $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. C'est un anneau de Bézout [tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments est principal (cf. [**24**, th. 3.20]) et tout sous-module fermé[(2)] d'un module libre est libre (la démonstration de [**4**, th. 4.10] pour l'anneau de Robba s'étend sans problème)]. Par ailleurs, tout φ-module Y de rang d sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ admet une base $e_1,\ldots,e_d$ vérifiant $\varphi^h(e_i) = p^{a_i}e_i$, où h est un entier $\geqslant 1$ et $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_d \in \mathbf{Z}$ (théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya [**24**, th. 4.16] ; ce théorème est loin d'être une évidence). Pour démontrer la proposition 0.3, on peut appliquer ce qui précède à $Y = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}} M$, et obtenir une base $e_1,\ldots,e_d$ de Y sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ ayant les propriétés voulues. Comme un élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ vérifiant $\varphi^h(x) = p^a x$ appartient à $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ (cf. [**4**, prop. 3.2] ou lemme 10.10), cette base est en fait constituée d'éléments de M. Pour démontrer que les e_i forment une base de M sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, on utilise des résultats standard (du type « suites exactes fondamentales ») dans les anneaux de Fontaine (cf. lemme 3.25 et cor. 3.26).

La démonstration de la proposition 0.3 que nous donnons dans le texte principal est totalement différente de celle esquissée ci-dessus : à la place du théorème de Kedlaya, nous utilisons la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie développée dans [**9**] pour construire la décomposition. Le principe de la démonstration est d'étudier les sous-E_h-espaces vectoriels $W_{h,a} = (\mathbf{U}_{h,a})^d \cap M_{\mathrm{rig}}$ de M_{rig} (où l'on a noté E_h l'extension non ramifiée de degré h de $\mathbf{Q}_p$) et, en particulier, de comprendre comment leur « dimension » varie avec a. C'est pour pouvoir parler de dimension que l'on a besoin « d'analytifier » la situation et de considérer $\mathbf{U}_{h,a}$ et $W_{h,a}$ comme les C-points de E_h-Espace Vectoriels $\mathbb{U}_{h,a}$ et $\mathbb{W}_{h,a}$. L'étude de la E_h-Dimension de $\mathbb{W}_{h,a}$ se fait par des arguments combinatoires qui reposent sur les ingrédients suivants :

• la formule $\dim_{E_h}\mathbb{W}_{h,a} = (da - t_H(M), d)$ si $a \gg 0$ [$t_H(M)$ est la longueur du $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d/M$] ;

• une variante $0 \to t_h\mathbb{U}_{h,a} \to \mathbb{U}_{h,a+1} \to \mathbb{V}^1 \to 0$ de la suite exacte fondamentale [t_h est « la » période d'un Lubin-Tate pour E_h et, si d est un entier, $\mathbb{V}^d$ est l'Espace Vectoriel trivial de Dimension $(d,0)$] ;

• le fait que la Dimension (a,b) d'un sous-E_h-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ ne contenant pas de $\mathbb{V}^1$ vérifie $a < b$;

• le fait que $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de $\mathbb{V}^1$ (cet énoncé est l'analogue analytique du fait que $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de sous-anneau isomorphe à C stable par $\mathscr{G}_K$), ce qui permet de montrer que le sous-$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$-Module engendré par un E_h-Espace Vectoriel de Dimension (a,b) est de rang $\leqslant b$.

---

(2) $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ est la limite inductive, pour $r > 0$, d'anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ de Fréchet, et on dit qu'un sous-module M de $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})^d$ est fermé si on peut l'ecrire comme une limite inductive de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$-modules M_r, où M_r est fermé dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})^d$, pour $r > 0$ assez petit (muni de la topologie induite par celle de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, M serait dense s'il était de rang d).

Le premier de ces ingrédients permet de minorer la Dimension de $\mathbb{W}_{h,a}$, alors que les trois autres permettent de majorer la différence entre la Dimension de $\mathbb{W}_{h,a+1}$ et celle de $\mathbb{W}_{h,a}$, ce qui fournit suffisamment de contraintes pour tout déterminer.

0.6. Remarques sur le théorème « $H^1_g = H^1_{\rm st}$ ». — L'espace $\mathbf{U}'_{h,a}$ de la proposition 0.4 est une extension de $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}^+_{\rm dR}/t^m\mathbf{B}^+_{\rm dR}$ (avec $m = a$) par une certaine $\mathbf{Q}_p$-représentation $V'_{h,a}$ de $\mathscr{G}_K$, de dimension finie. On peut étudier les $H^i(\mathscr{G}_K, \mathbf{B}_m)$ par dévissage en utilisant les résultats de Tate sur les $H^i(\mathscr{G}_K, C(k))$; cela permet de ramener la démonstration de la proposition 0.4 à vérifier que l'on a $H^1_g(\mathscr{G}_K, V'_{h,a}) = H^1_{\rm st}(\mathscr{G}_K, V'_{h,a})$, ce que Hyodo [**23**] a fait par des arguments de dimension dans le cas où le corps résiduel est fini. Malheureusement, pour prouver le théorème 0.1, on a besoin du résultat dans le cas où le corps résiduel est algébriquement clos et il nous faut nous rabattre sur les techniques introduites par Berger [**3**, n$^{\rm o}$ IV.2] pour étendre le résultat de Hyodo au cas d'un corps résiduel parfait quelconque. Ceci nous oblige à étudier la cohomologie galoisienne de l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\rm rig}$ (ou plutôt des anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ dont $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\rm rig}$ est la réunion) qui, chassé par la porte du théorème de Dieudonné-Manin, rentre donc par la fenêtre...

On part d'un cocycle continu $\sigma \mapsto c_\sigma$ sur $\mathscr{G}_K$, à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, tel que, pour k assez grand, $\sigma \mapsto \varphi^{-k}(c_\sigma)$ se trivialise dans $\mathbf{B}^+_{\rm dR}$, et on lui fait subir le traitement suivant :

• un peu de « descente presque étale » permet de descendre de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}_K = (\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})^{\mathscr{H}_K}$;

• des « traces de Tate normalisées » permettent de descendre de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}_K$ à $\mathbf{B}^{]0,r]}_{K,n}$ qui est un anneau de fonctions analytiques (en π) sur une couronne ;

• l'existence de fonctions analytiques prenant des valeurs données en des points donnés permet d'utiliser l'hypothèse de trivialité dans $\mathbf{B}^+_{\rm dR}$ pour annuler notre cocycle en « les racines de l'unité », ce qui permet de le rendre divisible par $t = \log(1+\pi)$;

• finalement, on est ramené au problème de trouver une primitive analytique d'une fonction analytique sur une couronne, ce qui est possible sauf si le résidu de cette fonction analytique est non nul, auquel cas la primitive fait intervenir la fonction logarithme, ce qui explique l'apparition du u (et le passage de $\mathbf{U}_{h,a}$ à $\mathbf{U}'_{h,a}$) dans le cas général.

0.7. Organisation de l'article. — L'article comporte deux parties totalement indépendantes : l'une regroupant les §§1-3, consacrée à la démonstration de la proposition 0.3 et l'autre regroupant les §§4-10, aux calculs de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine.

La partie consacrée aux anneaux de Fontaine est beaucoup plus longue que ce qu'elle pourrait être car, en vue d'applications aux familles de représentations p-adiques, nous avons explicité la plupart des constantes implicites se trouvant dans les énoncés de la théorie des (φ, Γ)-modules. Une des raisons qui nous ont poussé à faire ceci (outre les applications sus-mentionnées) est que beaucoup des résultats de la théorie des (φ, Γ)-modules reposent sur le théorème de surconvergence de [**6**]. Malheureusement, l'article en question est entouré d'un flou topologique assez inquiétant et nous avons profité de l'occasion pour faire une mise au point (les techniques restent globalement inchangées, mais les énoncés sont précisés et renforcés ; ils sont utilisés dans [**5**] pour redémontrer la surconvergence des (φ, Γ)-modules, et généralisés aux (φ, Γ)-modules sur une base dans [**1**]).

0.8. Remerciements. — Des discussions avec Laurent Berger, lors d'un séjour au département de mathématiques de l'université de Harvard en octobre 2002, ont été le facteur déclenchant pour la rédaction de cet article. En particulier, la démonstration du théorème de Dieudonné-Manin via la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie a été obtenue au cours de ce séjour.

Par ailleurs, la rédaction de cet article a bénéficié de la sérénité d'esprit procurée par la contemplation des couchers de soleil depuis le jardin de l'institut Tata de Bombay en novembre 2002 ; je voudrais en profiter pour remercier ces deux institutions, L. Berger et R. Sujatha de leur hospitalité, ainsi que le programme d'échanges franco-indien CEFIPRA qui a rendu possible le séjour à l'institut Tata.

1. Rappels et compléments sur les Espaces Vectoriels de Dimension finie

L'objet de ce §, outre de rappeler certains faits de base concernant la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie développée dans [**9**], est d'étendre, ce qui se fait sans douleur, ladite théorie aux E-Espaces Vectoriels, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

1.1. Espaces Vectoriels de Dimension finie. — Pour nous, une C-algèbre de Banach Λ est une C-algèbre unitaire complète pour une norme $\| \ \|_\Lambda$ vérifiant les conditions

(i) $\|cx\|_\Lambda = |c| \cdot \|x\|_\Lambda$ si $c \in C$ et $x \in \Lambda$,

(ii) $\|x+y\|_\Lambda \leqslant \sup(\|x\|_\Lambda, \|y\|_\Lambda)$ et $\|xy\|_\Lambda \leqslant \|x\|_\Lambda \cdot \|y\|_\Lambda$ si $x, y \in \Lambda$.

Le *Spectre* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ de Λ est l'ensemble des morphismes continus $s : \Lambda \to C$ de C-algèbres et on dit que Λ est *spectrale* si $\|x\|_\Lambda = \sup_{s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)} |s(x)|$. (Comme il s'agit du spectre maximal, cet espace aurait aussi pu être noté $\mathrm{Spm}(\Lambda)$...)

Une C-algèbre de Banach Λ est dite *connexe* si elle ne possède pas d'idempotent autre que 0 et 1 ; elle est dite *p-close* si tout élément $x \in \Lambda$ vérifiant $\|x-1\|_\Lambda < 1$ a une racine p-ième dans Λ et elle est dite *sympathique* si elle est spectrale, connexe et p-close. Toute algèbre de Banach spectrale et connexe possède une clôture sympathique $\widetilde{\Lambda}$ obtenue en rajoutant suffisamment de racines p-ièmes et en complétant [**9**, n$^{\mathrm{o}}$ 5.5].

Un *Espace Vectoriel* $\mathbb{W}$ est un foncteur (covariant) de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels vérifiant la condition : pour toute algèbre sympathique Λ, l'application naturelle de $\mathbb{W}(\Lambda)$ dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des applications $\mathrm{Spec}(\Lambda) \to \mathbb{W}(C)$ est injective. Ce procédé s'étend à d'autres catégories comme, par exemple, celle des anneaux [**9**, § 7]. Les exemples les plus simples de tels objets sont :

- les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie : si U est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, on peut voir U comme un Espace Vectoriel en posant $U(\Lambda) = U$, pour toute l'algèbre sympathique Λ, et en prenant l'identité pour tous les morphismes de transition ;
- si $d \in \mathbf{N}$, l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^d$ défini par $\mathbb{V}^d(\Lambda) = \Lambda^d$, pour toute l'algèbre sympathique Λ, et le morphisme évident $\Lambda_1^d \to \Lambda_2^d$, si $s : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ est un morphisme d'algèbres sympathiques.

Un Espace Vectoriel $\mathbb{W}$ est dit *de Dimension finie* s'il admet une présentation de la forme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & \mathbb{Y} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{V}^d \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathbb{W} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où U et V sont les Espaces Vectoriels associés à des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et les suites

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow 0$$

sont des suites exactes d'Espaces Vectoriels. (On rappelle que, par définition, c'est le cas si et seulement si, pour toute algèbre sympathique, la suite exacte correspondante est exacte.) A un tel Espace Vectoriel, on peut associer sa dimension principale $\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbb{W}) = d \in \mathbf{N}$, sa dimension résiduelle $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} V \in \mathbf{Z}$ et sa Dimension $\mathrm{Dim}(\mathbb{W}) = (\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbb{W}), \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W})) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. Un des principaux résultats [**9**, §7] de la théorie est le suivant :

Proposition 1.1. — (i) *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de Dimension finie, sa Dimension ne dépend pas de la présentation choisie.*

(ii) *Si $f : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ est un morphisme d'Espaces Vectoriels, et si $\mathbb{W}_1$ et $\mathbb{W}_2$ sont de Dimension finie, alors* $\mathrm{Ker}\, f$ *et* $\mathrm{Im}\, f$ *sont des Espaces Vectoriels de Dimension finie et on a* $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Dim}(\mathbb{W}_1)$.

Remarque 1.2. — On peut reformuler cette proposition sous la forme : la catégorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie est une catégorie additive munie de fonctions additives $\dim_{\mathrm{pr}}$, $\dim_{\mathrm{res}}$ et Dim caractérisées par les formules

(a) $\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbf{Q}_p) = 0$, $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbf{Q}_p) = 1$ et $\mathrm{Dim}(\mathbf{Q}_p) = (0, 1)$;

(b) $\dim_{\mathrm{pr}}(\mathbb{V}^1) = 1$, $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{V}^1) = 0$ et $\mathrm{Dim}(\mathbb{V}^1) = (1, 0)$.

Plus généralement, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ *contenue dans* C, on définit un E-Espace Vectoriel comme un foncteur de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des E-espaces vectoriels. Comme E est contenu dans C, l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^d$ est un E-espace vectoriel. On dispose d'un morphisme naturel (oubli de la E-structure) de la catégorie des E-Espaces Vectoriels dans celle des Espaces Vectoriels et on dit qu'un E-Espace Vectoriel est de Dimension finie s'il l'est en tant qu'Espace Vectoriel. La proposition 1.1 admet comme conséquence immédiate l'énoncé suivant :

Proposition 1.3. — *la catégorie des E-Espaces Vectoriels de Dimension finie est une catégorie additive munie de fonctions additives* $\dim_{\mathrm{pr},E}$, $\dim_{\mathrm{res},E}$ *et* Dim_E *caractérisées par la formules*

(a) $\dim_{\mathrm{pr},E}(E) = 0$, $\dim_{\mathrm{res},E}(E) = 1$ *et* $\mathrm{Dim}_E(E) = (0, 1)$ *;*

(b) $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{V}^1) = 1$, $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{V}^1) = 0$ *et* $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{V}^1) = (1, 0)$.

Remarque 1.4. — (i) Si $\mathbb{W}$ est un E-Espace Vectoriel de Dimension $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{W}) = (a, b)$, alors $\mathrm{Dim}\mathbb{W} = (a, [E : \mathbf{Q}_p] \cdot b)$;

(ii) Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel, alors $E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbb{W}$ est naturellement muni d'une structure de E-Espace Vectoriel et, $\mathrm{Dim}_E(E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbb{W})=([E:\mathbf{Q}_p]\cdot a,b)$, si $\mathrm{Dim}\mathbb{W}=(a,b)$.

1.2. Le corps des éléments additifs. — Soit $C\{X\}$ la C-algèbre des séries $f=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$, où $a_n\in C$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Si on munit $C\{X\}$ de la norme de Gauss $\|f\|_G=\sup_{n\in\mathbf{N}}|a_n|$, alors $C\{X\}$ devient une C-algèbre de Banach, spectrale, connexe, dont le spectre s'identifie naturellement à $\mathscr{O}_C$. Si $\widetilde{C\{X\}}$ est la clôture sympathique de $C\{X\}$, alors la clôture intégrale $C\{X\}^{(\infty)}$ de $C\{X\}$ dans $\widetilde{C\{X\}}$ est dense dans $\widetilde{C\{X\}}$ par construction [**9**, n° 5.5] et est une extension étale galoisienne de $C\{X\}$ dont on note H_C le groupe de Galois. Le groupe H_C est, par construction, un pro-p-groupe abélien (i.e. un $\mathbf{Z}_p$-module compact) ; son action sur $C\{X\}^{(\infty)}$ s'étend, par continuité, à $\widetilde{C\{X\}}$. D'autre part, on note T_C l'ensemble des morphismes continus $\tau:\widetilde{C\{X\}}\to\widetilde{C\{X\}}$ de C-algèbres, tels que $\tau(X)-X\in C$. On a alors $\tau(X)-X\in\mathscr{O}_C$, ce qui nous fournit une suite exacte

$$1\longrightarrow \mathrm{H}_C\longrightarrow \mathrm{T}_C\longrightarrow \mathscr{O}_C\longrightarrow 1$$

de groupes topologiques, l'application de T_C dans $\mathscr{O}_C$ étant donnée par $\tau\mapsto x(\tau)=\tau(X)-X$.

On choisit une fois pour toutes $s_0\in\mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})$ vérifiant $s_0(X)=0$ [i.e. s_0 est au-dessus de $0\in\mathscr{O}_C=\mathrm{Spec}(C\{X\})$]. Alors $\tau\mapsto s_0\circ\tau$ est une bijection de T_C sur $\mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})$. Si $f\in\widetilde{C\{X\}}$, on note $f(\tau)$ [resp. $f(0)$] l'élément $s_0\circ\tau(f)$ [resp. $s_0(f)$] de C. On dit que $f\in\widetilde{C\{X\}}$ est *additif* si l'on a $f(\sigma\tau)=f(\sigma)+f(\tau)$ quels que soient $\sigma,\tau\in\mathrm{T}_C$, et on dit que f, additif, est *de rang* r (resp. *de rang fini*) si $U_f^0=f(\mathrm{H}_C)$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de rang r (resp. de rang fini).

On note $\mathscr{C}\subset\widetilde{C\{X\}}$ l'ensemble des éléments additifs de rang fini. On dispose d'une injection naturelle $c\mapsto cX$ de C dans $\mathscr{C}$.

Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel, on dit que $\ell\in\mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est additif de rang r si l'on a :

(a) $\ell(\sigma\tau)=\ell(\sigma)+\ell(\tau)$ quels que soient $\sigma,\tau\in\mathrm{T}_C$;

(b) $\ell(\mathrm{H}_C)$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de rang r.

Si $\mathbb{W}=\mathbb{V}^1$, on retombe sur la notion précédente. Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de Dimension finie, et si $\ell\in\mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est un élément additif de rang fini, on note L_ℓ le sous $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{W}(C)$ engendré par $\ell(\mathrm{T}_C)$ et $\mathbb{L}_\ell$ le sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$ engendré par L_ℓ. L'Espace Vectoriel $\mathbb{L}_\ell$ est appelé *le sous-Espace Vectoriel de* $\mathbb{W}$ *engendré par* ℓ.

Si $f\in\mathscr{C}$, on appelle *Graphe* de f le sous-Espace Vectoriel $\mathbb{L}_{X,f}$ de $\mathbb{V}^2$ engendré par l'élément additif (X,f) de $\mathbb{V}^2(\widetilde{C\{X\}})$. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{L}_{X,f}=\mathbb{L}_{X,f}(C)$ est le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par le graphe Γ_f de f, où

$$\Gamma_f=\{(s_C\circ\tau(X),s_C\circ\tau(f))\mid\tau\in\widetilde{\mathrm{T}}_C\}=\{(x(\tau),f(\tau)),\ \tau\in\mathrm{T}_C\}.$$

On dispose de deux projection pr_1 et pr_2 de $\mathbb{L}_{X,f}$ sur $\mathbb{V}_1$ envoyant $(x(\tau),f(\tau))$ sur $x(\tau)$ et $f(\tau)$ respectivement. Si $g\in\mathscr{C}$, il existe dans $\mathbb{L}_{X,f}(\widetilde{C\{X\}})$ un unique $\widetilde{g}$ additif vérifiant $\mathrm{pr}_1(\widetilde{g})=g$ et on définit le composé $f\cdot g$ de f et g par la formule naturelle $f\cdot g=\mathrm{pr}_2(\widetilde{g})$. On a alors le résultat suivant [**9**, §6] :

Proposition 1.5. — *Muni des lois + et ·, l'ensemble $\mathscr{C}$ est un corps non commutatif, de centre $\mathbf{Q}_p$, dont C est un sous-corps commutatif maximal.*

Il existe une (unique) famille $(X_\alpha)_{\alpha\in C}$ d'éléments de $\widetilde{C\{X\}}$ vérifiant les propriétés suivantes :
(i) $X_{\alpha+\beta} = X_\alpha X_\beta$, si $\alpha, \beta \in C$;
(ii) $X_\alpha = e^{\alpha X} \in C\{X\}$, si $\alpha \in \mathfrak{a} = \{x \in C \mid v_p(x) > \frac{1}{p-1}\}$;
(iii) $X_\alpha(0) = 1$, si $\alpha \in C$.

De plus, si $\alpha \in C$, il existe $\chi_\alpha(\tau) \in C^*$ tel que l'on ait $\tau(X_\alpha) = \chi_\alpha(\tau)X_\alpha$. L'application $\tau \to \chi_\alpha(\tau)$ est un morphisme de groupes de T_C dans C^* et la restriction de χ_α à H_C est à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$. Si $\alpha \in \mathfrak{a}$ et si $\tau \in \mathrm{H}_C$, il existe un unique élément $\psi_\alpha(\tau)$ de $\mathbf{Z}_p$ tel que l'on ait $\chi_{p^{-n}\alpha}(\tau) = (\varepsilon^{(n)})^{\psi_\alpha(\tau)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L'application $\tau \mapsto \psi_\alpha(\tau)$ est un morphisme de groupes de H_C dans $\mathbf{Z}_p$.

Si $f \in \mathscr{C}$, la restriction de f à H_C est un morphisme de groupes continu et, si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ est une base de $U_f^0 = f(\mathrm{H}_C)$ sur $\mathbf{Z}_p$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathfrak{a}$ uniquement déterminés tels que la restriction de f à H_C soit égale à $\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \psi_{\alpha_i}$. L'image de $\sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \alpha_i$ dans $C \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{a} = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a faits, ce qui nous fournit une application naturelle $\delta : \mathscr{C} \to C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$.

Remarque 1.6. — Il est assez malaisé de réconcilier la structure de corps de $\mathscr{C}$ avec la suite exacte de la proposition 1.7 ci-dessous, mais un calcul immédiat montre que, si $f \in \mathscr{C}$ vérifie $\delta(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes \beta_i \in C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$, et si $c \in C$, alors

$$\delta(c \cdot f) = \sum_{i=1}^r c\alpha_i \otimes \beta_i \quad \text{et} \quad \delta(f \cdot c) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes c\beta_i.$$

C'est à partir de cette expression que l'on montre que C est un sous-corps commutatif maximal.

L'application $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha\beta$ induit par linéarité une application $\mathrm{Tr} : C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \to C$. On a alors [**9**, §10] le résultat suivant.

Proposition 1.7. — *Les applications δ et* Tr *définies ci-dessus donnent naissance à la suite exacte de C-espaces vectoriels* (« à droite » et « à gauche »)

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathscr{C} \xrightarrow{\delta} C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \xrightarrow{\mathrm{Tr}} C \longrightarrow 0$$

Remarque 1.8. — Le rang de f se lit sur $\delta(f)$ comme le montre la construction de l'application δ : si $\delta(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes \beta_i$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ forment une famille libre sur $\mathbf{Q}_p$ et aucun des α_i n'est nul, alors $\mathrm{rg}(f) = r$. En particulier,
(a) f est de rang 0 si et seulement si $f \in C$;
(b) f ne peut pas être de rang 1.

1.3. Le commutant de E dans $\mathscr{C}$. — Soit $\mathscr{C}_E \subset \mathscr{C}$ le commutant de E ; c'est un sous-corps de $\mathscr{C}$ qui joue, pour les E-Espaces Vectoriels de Dimension finie, le rôle que joue $\mathscr{C}$ pour les Espaces Vectoriels de Dimension finie. Nous allons avoir besoin d'analyser sa structure d'un peu plus près.

Lemme 1.9. — *Si $f \in \mathscr{C}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *$f \in \mathscr{C}_E$;*
(ii) *$\delta(f \cdot c) = \delta(c \cdot f)$ quel que soit $c \in E$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est une évidence ; montrons la réciproque. Si $c \in E$, soit $u(c) = c \cdot f - f \cdot c$. Par hypothèse, on a $\delta(u(c)) = 0$ et donc $u(c) \in C$. D'autre part, on a

$$u(cd) = cd \cdot f - f \cdot cd = cd \cdot f - c \cdot f \cdot d + c \cdot f \cdot d - f \cdot cd = c \cdot u(d) + u(c) \cdot d,$$

et comme c, d, $u(c)$ et $u(d)$ sont des éléments de C et donc commutent deux à deux, l'application $c \mapsto u(c)$ est une $\mathbf{Q}_p$-dérivation sur E ; elle est donc identiquement nulle, ce qui permet de conclure.

Lemme 1.10. — *Si $f \in \mathscr{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *$f \in \mathscr{C}_E$;*
(ii) *le Graphe $\mathbb{L}_{X,f}$ de f est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^2$.*

Démonstration. — (i)⇒(ii) : si $f \in \mathscr{C}$ et $g \in \mathscr{C}$, alors $\mathbb{L}_{X,f}$ contient l'élément $(g, f \cdot g)$ de $\mathscr{C}^2 \subset \mathbb{V}^2(\widetilde{C\{X\}})$. En particulier, si $f \in \mathscr{C}_E$, si $c \in E$ et si $g = cX$, alors $\mathbb{L}_{X,f}$ contient $(cX, f \cdot c) = (cX, cf) = c(X, f)$. Comme (X, f) engendre $\mathbb{L}_{X,f}$, on en déduit l'inclusion $c\mathbb{L}_{X,f} \subset \mathbb{L}_{X,f}$ qui prouve que $\mathbb{L}_{X,f} \subset \mathbb{V}^2$ est stable par multiplication par un élément de E.

(ii)⇒(i) : si $c \in E$, on a $\mathrm{pr}_1(c(X, f)) = \mathrm{pr}_1(cX, cf) = cX$ et, comme (cX, cf) est additif, on déduit de la formule définissant la multiplication dans $\mathscr{C}$ (cf. prop. 1.5), que $cf = \mathrm{pr}_2(cX, cf) = f \cdot c$, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.11. — Le lemme précédent montre que, si $f \in \mathscr{C}_E$, alors $U_f = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} f(\mathrm{H}_C)$ est un E-espace vectoriel. On définit le *E-rang* $\mathrm{rg}_E(f)$ de f comme la dimension de ce E-espace vectoriel.

Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de E sur $\mathbf{Q}_p$ et soit $e_1^*, \dots, e_d^*$ la base de E duale de $e_1, \dots, e_d$ pour la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(xy)$. L'élément $\sum_{i=1}^d e_i^* \otimes e_i$ de $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} E \subset C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ correspond à l'identité de $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}_p}(E) \cong E^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$, si on utilise l'isomorphisme $E^* \cong E$ induit par la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(xy)$. En particulier, cet élément ne dépend pas de la base $e_1, \dots, e_d$; nous le noterons e_E. Par ailleurs, si $c \in E$, on a $\mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(cx \cdot y) = \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(x \cdot cy)$, ce qui se traduit par le fait que e_E commute à E (i.e. $\sum_{i=1}^d ce_i^* \otimes e_i = \sum_{i=1}^d e_i^* \otimes e_i c$ si $c \in E$). Ceci nous permet de définir une application C-linéaire $\iota_E : C \otimes_E C \to C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ par la formule

$$\iota_E(x \otimes y) = x \cdot e_E \cdot y = \sum_{i=1}^d x e_i^* \otimes e_i y.$$

Cett application est injective comme on le voit en l'écrivant dans une base de C sur E.

Proposition 1.12. — *Si $x \in C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *x commute à E ;*
(ii) *x est dans l'image de ι_E.*

Démonstration. — (ii)⇒(i) est une conséquence du fait que e_E commute à E. Pour la réciproque, choisissons une base $(\beta_j)_{j \in J}$ de C sur E, ce qui fait de $(e_i \beta_j)_{1 \leqslant i \leqslant d, j \in J}$ une base de C sur $\mathbf{Q}_p$. On peut alors écrire x de manière unique sous la forme $\sum_{i,j} x_{i,j} e_i^* \otimes e_i \beta_j$, où $x_{i,j}$ est un élément de C nul pour presque tout couple (i, j), et il s'agit de prouver que $x_{i,j}$ ne dépend pas de i.

On a $ce_i = \sum_{k=1}^d \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(ce_ie_k^*)e_k$ et donc

$$x\cdot c = \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^d \Big(\sum_{i=1}^d \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(ce_ie_k^*)e_j^*x_{i,j}\Big)\otimes e_k\beta_j.$$

Par ailleurs,

$$c\cdot x = \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^d cx_{k,j}e_k^*\otimes e_k\beta_j,$$

ce qui fait que x commute à E si et seulement si $ce_k^*x_{k,j} = \sum_{i=1}^k \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(ce_ie_k^*)e_j^*x_{i,j}$ quels que soient $1\leqslant k\leqslant d$ et $c\in E$. On peut en particulier appliquer cette identité à $c=(e_k^*)^{-1}e_\ell^*$ et obtenir $e_\ell^*x_{k,j} = e_\ell^*x_{\ell,j}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 1.13. — *Il existe une unique application $\delta_E : \mathscr{C}_E \to C\otimes_E C$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_E \arrow[r, "\delta_E"] \arrow[d] & C\otimes_E C \arrow[d, "\iota_E"] \\ \mathscr{C} \arrow[r, "\delta"] & C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C \end{tikzcd}$$

Démonstration. — La proposition 1.12 montre que l'image de $\mathscr{C}_E$ par δ est incluse dans l'image de $C\otimes_E C$ par ι_E ; l'injectivité de ι_E permet de conclure.

Théorème 1.14. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{C}_E \arrow[r, "\delta_E"] \arrow[d] & C\otimes_E C \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[d, "\iota_E"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & \mathscr{C} \arrow[r, "\delta"] & C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif et les lignes horizontales sont exactes.

Démonstration. — Pour la commutativité du diagramme, la seule chose à vérifier est que l'on a $\mathrm{Tr}\circ\iota_E = \mathrm{Tr}$, ce qui suit du lemme 1.15 ci-dessous. Maintenant, la ligne du bas est exacte d'après la proposition 1.7 ; l'exactitude de celle du haut s'en déduit par une chasse au diagramme sans difficulté, la surjectivité de Tr étant évidente.

Lemme 1.15. — *Soient K un corps, $P\in K[X]$ un polynôme séparable de degré d et $L = K[X]/P$. Alors, si $e_1,\dots,e_d$ est une base de L sur K et si $e_1^*,\dots,e_d^*$ est la base de L sur K duale de $e_1,\dots,e_d$ pour la forme bilinéaire $(x,y)\mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$, on a*

$$\sum_{i=1}^d e_ie_i^* = 1.$$

Démonstration. — Comme on l'a déjà vu, l'algèbre L étant étale sur K, l'élément $\sum_{i=1}^d e_i^*\otimes e_i$ de $L\otimes_K L$ ne dépend pas du choix de la base $e_1,\dots,e_d$; il en est donc *a fortiori* de même de $\sum_{i=1}^d e_ie_i^*$. Par ailleurs, cette quantité ne change pas si on remplace K par une extension, ce qui permet de supposer que K contient toutes les racines de P et donc que $L\cong K^d$. On peut alors prendre pour e_i l'idempotent de K^d projetant sur le i-ième facteur, auquel cas on a $e_i^* = e_i$ et $\sum_{i=1}^d e_i e_i^* = \sum_{i=1}^d e_i = 1$, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.16. — Si $f \in \mathscr{C}_E$ et si $\delta_E(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \otimes \beta_i$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ forment une famille libre sur E et aucun des α_i n'est nul, alors $\mathrm{rg}_E(f) = r$. En particulier,
(a) $\mathrm{rg}_E(f) = 0$ si et seulement si $f \in C$;
(b) $\mathrm{rg}_E(f) \neq 1$ quel que soit $f \in \mathscr{C}_E$.

2. Sous-Espaces Vectoriels des Anneaux de Fontaine

Dans ce §, nous rappelons un certain nombre de résultats du §9 de [**9**] comme la définition des Espaces Vectoriels $\mathbb{B}_m$ et $\mathbb{B}_{h,a}$, et les complétons sur certains points. En particulier, les propositions 2.4 et 2.18, qui fournissent des conditions numériques sur les sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{V}^d$ et $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, joueront un rôle crucial dans la démonstration du théorème « de Dieudonné-Manin ».

2.1. Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{V}^d$. — Dans tout ce qui suit, Λ désigne une algèbre sympathique « générique ». On définit l'Anneau $\mathbb{A}$ comme le foncteur en anneaux sur les algèbres sympathiques associant à Λ sa boule unité. On note $\mathbb{B}$ l'Anneau $\mathbb{A}[\frac{1}{p}]$; on a donc $\mathbb{B}(\Lambda) = \Lambda$. On peut aussi voir $\mathbb{B}$ comme l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^1$ en oubliant la structure d'anneau.

On dispose d'un foncteur naturel de la catégorie des C-espaces vectoriels de dimension finie dans celle des E-Espaces Vectoriels de Dimension finie, à savoir le foncteur $\mathrm{W} \mapsto \mathbb{B} \otimes_C \mathrm{W}$. Ce foncteur est exact (évident) et, si W est de dimension d sur C, alors $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{B} \otimes_C \mathrm{W}) = (d, 0)$.

La plupart des résultat de ce n° sont des conséquences de l'énoncé suivant, qui découle de [**9**, prop. 7.13] appliqué à l'injection de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{V}^1$.

Proposition 2.1. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^1$ de Dimension finie, et si $\mathbb{W} \neq \mathbb{V}^1$, alors $\mathbb{W}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

Lemme 2.2. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ vérifiant $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}) = r$, alors il existe une partie I à r éléments de $\{1, \dots, d\}$ telle que la projection π_I de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{V}^I$ donne naissance à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}^I \longrightarrow 0,$$

où A est un E-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant évident. Soit $\pi_i : \mathbb{V}^d \to \mathbb{B}$ l'application « i-ième coordonnée ». Si $r \geqslant 1$, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\dim_{\mathrm{pr},E}(\pi_i(\mathbb{W})) \geqslant 1$, ce qui signifie que π_i est surjective (cf. prop. 2.1). L'Espace Vectoriel $\mathbb{W}' = \mathbb{W} \cap \ker \theta_i$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^{\{1,\dots,d\}-\{i\}}$ vérifiant $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}) = r - 1$; on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $J \subset \{1, \dots, d\} - \{i\}$ de cardinal $r - 1$ telle que π_J donne naissance à la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{W}' \longrightarrow \mathbb{V}^J \longrightarrow 0,$$

où A est un E-espace vectoriel de dimension finie. Il suffit alors de prendre $I = J \cup \{i\}$ pour obtenir le résultat souhaité.

Lemme 2.3. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ de Dimension $(1,0)$, et si e est un élément non nul de de $\mathbb{W}(C)$, alors $\mathbb{W} = \mathbb{B}\cdot e$.*

Démonstration. — Soit $\delta : \mathbb{W}\oplus\mathbb{B}\to\mathbb{V}^d$ l'application $(x,b)\mapsto x-be$. Soit $\mathbb{Y}$ le noyau de δ. L'image de δ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ contenant $\mathbb{W}$. On en déduit que $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{Y})\leqslant \dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{B}) = 1$. Par ailleurs, comme $\mathbb{Y}$ est inclus dans $\mathbb{V}^{d+1}$ et $\operatorname{Im}\delta$ dans $\mathbb{V}^d$, il résulte du lemme 2.2, que $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y})\geqslant 0$ et $\dim_{\mathrm{res},E}(\operatorname{Im}\delta)\geqslant 0$, et comme

$$\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) + \dim_{\mathrm{res},E}(\operatorname{Im}\delta) = \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) + \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{B}) = 0,$$

on en déduit que $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) = 0$. Enfin, comme $\mathbb{Y}$ est non trivial puisqu'il contient $(e,1)$, on en déduit, en utilisant la prop. 2.1, que $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{Y}) = (1,0)$. Considérons alors les projections naturelles de $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{W}$ et $\mathbb{B}$. Leurs noyaux respectifs sont de dimensions résiduelles $\geqslant 0$ et, comme $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{Y}) = 0$, les mêmes arguments que ci-dessus permettent de montrer que ces projections sont des isomorphismes. On en déduit le résultat.

Proposition 2.4. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$ vérifiant* $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W})\geqslant \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W})$*, alors $\mathbb{W}$ contient un sous-Espace isomorphe à $\mathbb{V}^1$.*

Démonstration. — Soient $r = \dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W})$ et $s = \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W})$. D'après le lemme 2.2, quitte à renuméroter les coordonnées de $\mathbb{V}^d$, on peut supposer que la projection de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{V}^r = \mathbb{V}^r\times\{0\}^{d-r}$, parallèlement à $\mathbb{V}^{d-r} = \{0\}^r\times\mathbb{V}^{d-r}$, est surjective ; le noyau A de cette projection est alors un sous-E-espace vectoriel de dimension de s de $\mathbb{V}^{d-r}$.

Si $1\leqslant i\leqslant r$, notons $\widetilde{\ell}_i\in\mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ le relèvement additif de $(0,\dots,X,\dots,0)\in\mathbb{V}^r(\widetilde{C\{X\}})$, le X étant en i-ième position, et soit $\ell_i\in\mathbb{V}^{d-r}(\widetilde{C\{X\}})$ l'image de $\widetilde{\ell}_i$ par la projection de $\mathbb{V}^d$ sur $\mathbb{V}^{d-r}$, parallèlement à $\mathbb{V}^r$. On a $\delta_E(\ell_i)\in A\otimes_E C$, ce qui permet, ayant choisi une base $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ de A sur E, d'écrire $\delta_E(\ell_i)$ sous la forme $\delta_E(\ell_i) = \sum_{j=1}^s\alpha_j\otimes a_{i,j}$.

Comme $s\leqslant r$, il existe $\beta_1,\dots,\beta_r\in C$ non tous nuls, tels que l'on ait $\sum_{i=1}^r a_{i,j}\beta_i = 0$ si $2\leqslant j\leqslant s$. Soient alors $\widetilde{\ell}\in\mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ le relèvement additif de $(\beta_1X,\dots,\beta_rX)\in\mathbb{V}^r(\widetilde{C\{X\}})$, et ℓ l'image de $\widetilde{\ell}$ dans $\mathbb{V}^{d-r}(\widetilde{C\{X\}})$. On a $\ell = \sum_{i=1}^r\ell_i\cdot\beta_i$ et donc

$$\delta_E(\ell) = \sum_{i=1}^r\delta_E(\ell_i)\cdot\beta_i = \sum_{j=1}^s\alpha_j\otimes\Big(\sum_{i=1}^r a_{i,j}\beta_i\Big) = \alpha_1\otimes\Big(\sum_{i=1}^r a_{i,1}\beta_i\Big).$$

En particulier, le E-rang de ℓ est $\leqslant 1$ et donc est nul (cf. (b) de la rem. 1.16), ce qui se traduit par le fait que la projection de $\mathbb{L}_{\widetilde{\ell}}\subset\mathbb{W}$ sur $\mathbb{B}\cdot(\beta_1,\dots,\beta_r)$ est injective et donc que $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{L}_{\widetilde{\ell}}) = (1,0)$. Ceci permet de conclure.

Proposition 2.5. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-E-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^d$, alors il existe $r\leqslant d$ et un sous-E-Espace Vectoriel $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{W}$ ne contenant pas de sous-Espace de Dimension $(1,0)$ tel que l'on ait $\mathbb{W} = \mathbb{Y}\oplus\mathbb{V}^r$.*

Démonstration. — Si $\mathbb{W}$ contient un sous-Espace de Dimension $(1,0)$, alors il existe $e\in\mathbb{W}(C)$ tel que $\mathbb{W}$ contienne $\mathbb{B}\cdot e$ d'après le lemme 2.3. Comme le foncteur $V\mapsto\mathbb{B}\otimes_C V$ est exact, si X est un supplémentaire de $C\cdot e$ dans C^d et $\mathbb{X} = \mathbb{B}\otimes_C X$, alors $\mathbb{X}\cong\mathbb{V}^{d-1}$ et l'application $(b,x)\mapsto be+x$ est un isomorphisme de $\mathbb{B}\cdot e\oplus(\mathbb{X}\cap\mathbb{W})$ sur $\mathbb{W}$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire la proposition.

2.2. Les Anneaux de Fontaine. — Nous allons rappeler très rapidement la construction des anneaux de Fontaine vus comme Anneaux, c'est-à-dire comme foncteurs de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des anneaux ; le lecteur est invité à se reporter à [**17**] ou [**9**, §9] pour les détails.

Soit $a \in \mathscr{O}_C$ avec $v_p(a) = \frac{1}{p}$. On définit l'Anneau $\mathbb{R}$ comme le foncteur

$$\Lambda \mapsto \mathbb{R}(\Lambda) = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}},\ x_n \in \mathbb{A}(\Lambda)/a\mathbb{A}(\Lambda) \text{ et } x_{n+1}^p = x_n \text{ si } n \in \mathbf{N}\}.$$

En particulier, $\mathbb{R}(\Lambda) \supset \mathbb{R}(C)$ contient l'élément ε formé à partir du système compatible de racines de l'unité que l'on s'est fixé. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{R}(\Lambda)$ et si $\hat{x}_n \in \mathbb{A}(\Lambda)$ a pour image x_n modulo a, alors la suite $\hat{x}_{n+k}^{p^k}$ converge, quand k tend vers $+\infty$, vers un élément $x^{(n)}$ de $\mathbb{A}(\Lambda)$ qui ne dépend que de x. Ceci permet de mettre $\mathbb{R}(\Lambda)$ en bijection avec l'ensemble des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x^{(n)} \in \mathbb{A}(\Lambda)$ et $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$.

L'anneau $\mathbb{R}$ est un Anneau parfait de caractéristique p et on définit l'Anneau $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ comme le foncteur $\Lambda \mapsto W(\mathbb{R}(\Lambda))$ associant à Λ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}(\Lambda)$. Si $x \in \mathbb{R}(\Lambda)$, on note $[x] \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(\Lambda)$ son représentant de Teichmüller, et tout élément de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\Lambda)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$. Le Frobenius φ « élévation à la puissance p » sur $\mathbb{R}$ se relève en un morphisme d'Anneaux $\varphi : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathbb{A}_{\text{inf}}$; ce morphisme est bijectif.

On définit $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathbb{A}$ par la formule $\theta(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}$; c'est un morphisme d'Anneaux qui est surjectif et dont le noyau est l'idéal principal engendré par $\omega = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}$.

On note $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ l'Anneau $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$ et on étend, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, φ en un isomorphisme d'Anneaux de $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ et θ en un morphisme de d'Anneaux de $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ sur $\mathbb{B}$.

Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{B}_m$ l'Anneau $\mathbb{B}_{\text{inf}}/\omega^m\mathbb{B}_{\text{inf}}$; on a donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$. On définit l'Anneau $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ comme la limite projective des $\mathbb{B}_m$. Par construction, θ s'étend en un morphisme d'Anneaux de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ sur $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$, et on a $\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+/\omega^m\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ quel que soit $m \in \mathbf{N}$. On note v_H la valuation sur $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ définie par $v_H(x) = m$, si $x \in \omega^m\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ - \omega^{m+1}\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$.

On définit l'Anneau $\mathbb{A}_{\max}$ comme le séparé complété de $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{\omega}{p}]$ pour la topologie p-adique et l'Anneau $\mathbb{B}_{\max}^+$ par $\mathbb{B}_{\max}^+ = \mathbb{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. L'identité de $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ se prolonge en une injection continue de $\mathbb{A}_{\max}$ et, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, de $\mathbb{B}_{\max}^+$ dans $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$, qui permet de voir $\mathbb{B}_{\max}^+$ comme un sous-Anneau de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$, ce que nous ferons.

Le morphisme de Frobenius $\varphi : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathbb{A}_{\text{inf}}$ se prolonge en un morphisme continu de $\mathbb{A}_{\max}$ dans $\mathbb{A}_{\max}$ et, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, en un morphisme de $\mathbb{B}_{\max}^+$ dans $\mathbb{B}_{\max}^+$; ce morphisme est injectif mais pas surjectif et on définit l'Anneau $\widetilde{\mathbb{B}}_{\text{rig}}^+$ comme l'intersection des $\varphi^n(\mathbb{B}_{\max}^+)$, pour $n \in \mathbf{N}$; ceci fait de $\widetilde{\mathbb{B}}_{\text{rig}}^+$ un Anneau sur lequel φ est bijectif. Par ailleurs, comme $\widetilde{\mathbb{B}}_{\text{rig}}^+ \subset \mathbb{B}_{\max}^+$, on considérera $\widetilde{\mathbb{B}}_{\text{rig}}^+$ comme un sous-Anneau de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ sans plus de commentaire.

Les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \mathbb{R}(C)$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathbb{A}_{\text{inf}}(C)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \mathbb{B}_{\text{inf}}(C)$, $\mathbf{B}_m = \mathbb{B}_m(C)$, $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(C)$, $\mathbf{B}_{\max}^+ = \mathbb{B}_{\max}^+(C)$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \widetilde{\mathbb{B}}_{\text{rig}}^+(C)$ sont étudiés plus en détail au § 5.

2.3. Sous-Espace Vectoriels de $\mathbb{B}_m$.— On peut aussi voir $\mathbb{B}_m$ comme un Espace Vectoriel en oubliant la structure d'anneau. On montre [**9**, cor. 9.23] que cet Espace est de Dimension

$(m,0)$ et on dispose de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega\mathbb{B}_{m-1} \longrightarrow \mathbb{B}_m \xrightarrow{\theta} \mathbb{B} \longrightarrow 0\ ,$$

qui montre que $\mathbb{B}_m$ admet une filtration par les $\mathbb{W}_i = \omega^i\mathbb{B}_{m-i}$, vérifiant $\mathbb{W}_0 = \mathbb{B}_m$, $\mathbb{W}_m = 0$ et $\mathbb{W}_i/\mathbb{W}_{i+1} \cong \mathbb{V}^1$ si $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Lemme 2.6. — *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel admettant une filtration décroissante par des sous-Espaces Vectoriels $\mathbb{W}_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, avec $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}$ et $\mathbb{W}_i/\mathbb{W}_{i+1} \cong \mathbb{V}^1$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$* ($\mathbb{W}$ est donc de Dimension $(n,0)$) *et si $\mathbb{X}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$, alors* $\dim_{\mathrm{res}} \mathbb{X} \geqslant 0$.

Démonstration. — Le résultat se démontre par récurrence sur n : il résulte de la prop. 2.1 que les seuls sous-Espaces Vectoriels de Dimension finie de $\mathbb{V}^1$ sont $\mathbb{V}^1$ et les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbb{V}^1(C)$; tous ces espaces ont une dimension résiduelle $\geqslant 0$. Pour passer de $n-1$ à n, soit $\mathbb{X}_1 = \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{X}$. On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{X}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{X}/\mathbb{X}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{W}_1 \arrow[r] & \mathbb{W} \arrow[r] & \mathbb{V}^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes horizontales sont exactes et les flèches verticales sont injectives. La dimension résiduelle de $\mathbb{X}$ est donc la somme de celle de $\mathbb{X}_1$ (qui est $\geqslant 0$ grâce à l'hypothèse de récurrence) et de celle de $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ (qui est aussi positive puisque $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ s'identifie à un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^1$). Ceci permet de conclure.

Corollaire 2.7. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de Dimension finie de $\mathbb{B}_m$, alors $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}) \geqslant 0$.*

2.4. Sous-Espaces Vectoriels de $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. — Si h est un entier $\geqslant 1$, on note E_h l'extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, de degré h ; on a donc $E_1 = \mathbf{Q}_p$. Soit $t_h \in \mathbf{B}^+_{\max}$ « la » période d'une forme différentielle invariante d'un groupe de Lubin-Tate associé à l'uniformisante p de l'extension E_h. En particulier, t_1 est, à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}_p^*$, le $2i\pi$ p-adique t de Fontaine, $\omega^{-1}t$ est une unité de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et t_h est caractérisé (cf. [**12**, lemme 6.4.] ou [**9**, prop. 9.10, lemmes 9.17 et 9.18]), à multiplication près par un élément de E_h^*, par les propriétés :

(i) $\varphi^h(t_h) = pt_h$ et (ii) $v_H(t_h) = 1$;

et, de plus, t_h vérifie les propriétés

(iii) $v_H(\varphi^j(t_h)) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant h-1$ et $t^{-1}\prod_{j=0}^{h-1}\varphi^j(t_h) \in \mathbf{Q}_p^*$;

(iv) t_h est un générateur de l'idéal $\mathbb{J}^{[+\infty]}_{\max,h} = \{x \in \mathbb{B}^+_{\max}, \varphi^{nh}(x) \in t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}\}$ de $\mathbb{B}^+_{\max}$.

La propriété (iv), qui est la plus délicate, est le point crucial pour démontrer l'exactitude des « suites exactes fondamentales » (cf. [**9**, n° 9.7]) que nous utiliserons sous la forme de la proposition 2.10.

Lemme 2.8. — *Si $x \in \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ vérifie $\varphi^{nh}(x) \in t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, alors x est divisible par t_h dans $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — D'après la propriété (iv) de t_h, si $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire $\varphi^{-nh}(x)$ sous la forme $t_h y_n$, avec $y_n \in \mathbb{B}^+_{\max}$. On a alors $t_h y_0 = x = \varphi^{nh}(t_h y_n) = p^n t_h \varphi^{nh}(y_n)$, ce qui prouve que y_0 appartient à $\varphi^{nh}(\mathbb{B}^+_{\max})$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$; on en déduit l'appartenance de y_0 à $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 2.9. — *Soit $n \mapsto a_n$ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, périodique de période h. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un élément x de $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$:*
(i) *x est divisible par $\prod_{i=0}^{h-1} \varphi^{-i}(t_h)^{a_i}$ dans $\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$;*
(ii) *$\varphi^n(x) \in t^{a_n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) suit des propriétés (i) et (ii) de t_h et l'implication (ii)⇒(i) se démontre par récurrence sur $a_0 + \cdots + a_{h-1}$ en utilisant le lemme précédent.

Si $a \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{U}_{h,a}$ le E_h-Espace Vectoriel $(\mathbb{B}^+_{\max})^{\varphi^h = p^a} = (\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi^h = p^a}$. C'est un E_h-Espace Vectoriel de Dimension $\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{U}_{h,a}) = (a, 1)$ (cf. [**9**, cor. 9.21]).

Proposition 2.10. — *Si $a \leqslant b$ sont des entiers, alors l'injection de $\mathbb{B}^+_{\max}$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ induit la suite exacte*

$$0 \longrightarrow t_h^a \mathbb{U}_{h,b-a} \longrightarrow \mathbb{U}_{h,b} \longrightarrow \mathbb{B}_a \longrightarrow 0.$$

Corollaire 2.11. — *Si $b, a_0, \ldots, a_r \in \mathbf{N}$ et si $a = a_0 + \cdots + a_r$, alors $x \mapsto (x, \varphi(x), \ldots, \varphi^r(x))$ induit la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \big(\textstyle\prod_{i=0}^r \varphi^{-i}(t_h)^{a_i}\big)\mathbb{U}_{h,b} \longrightarrow \mathbb{U}_{h,a+b} \longrightarrow \oplus_{i=1}^r \mathbb{B}_{a_i} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Récurrence sur r utilisant la proposition précédente.

Corollaire 2.12. — *Si $b, a_0, \ldots, a_{h-1} \in \mathbf{N}$, si $a = a_0 + \cdots + a_{h-1}$, et si x est un élément de $\big(\prod_{i=0}^r \varphi^{-i}(t_h)^{-a_i}\big)\mathbb{U}_{h,a+b}$ tel que $\varphi^n(x) \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $x \in \mathbb{U}_{h,b}$.*

Démonstration. — Soit $y = \big(\prod_{i=0}^r \varphi^{-i}(t_h)^{a_i}\big)x$. La propriété (iii) de t_h montre que l'image de $\varphi^i(y)$ dans $\mathbb{B}_{a_i}$ est nulle, ce qui permet d'utiliser le corollaire précédent pour conclure.

2.5. Sous-Espaces Vectoriels de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$

Lemme 2.13. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de Dimension finie de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, alors $\mathbb{W} \cap t^k\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} = 0$ si k est assez grand.*

Démonstration. — Soit $\mathbb{W}_k = \mathbb{W} \cap t^k\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Comme $\cap_{k=0}^{+\infty} t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} = 0$, on a $\cap_{k=0}^{+\infty}\mathbb{W}_k(C) = 0$. Si $\mathrm{Dim}\mathbb{W}_k = (a_k, b_k)$, la suite de terme général a_k est décroissante, et donc stationnaire pour $k \geqslant k_0$. Si $a_{k_0} \neq 0$, alors $\mathbb{W}_{k_0}(C)$ est de dimension non dénombrable sur $\mathbf{Q}_p$. Par ailleurs, si $k \geqslant k_0$, alors $\mathbb{W}_k(C)$ est de codimension finie (sur $\mathbf{Q}_p$) dans $\mathbb{W}_{k_0}(C)$ et donc $\cap_{k \geqslant k_0}\mathbb{W}_k(C)$ est de codimension dénombrable (sur $\mathbf{Q}_p$) dans $\mathbb{W}_{k_0}(C)$. Comme $\cap_{k=0}^{+\infty}\mathbb{W}_k(C) = 0$, cela conduit à une contradiction et donc $a_k = 0$ si $k \geqslant k_0$. La suite $(\mathbb{W}_k)_{k \geqslant k_0}$ est donc une suite décroissante de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et, comme $\cap_{k=0}^{+\infty}\mathbb{W}_k(C) = 0$, on a $\mathbb{W}_k = 0$ si k est assez grand, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 2.14. — *$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de sous-Espace Vectoriel isomorphe à $\mathbb{V}^1$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Soit $\mathbb{W} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ isomorphe à $\mathbb{V}^1$. Quitte à rempacer $\mathbb{W}$ par $t^{-i}\mathbb{W}$, on peut supposer que $\mathbb{W}$ n'est pas inclus dans le noyau de $\theta : \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbb{B}_1$.

Soit $\mathbb{W}' = \mathbb{W} \cap t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathbb{W}'' = \theta(\mathbb{W})$. Comme $\mathbb{W} \cap t^k\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ = 0$ si $k \gg 0$, l'application naturelle de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{B}_k$ est injective si $k \gg 0$ et $\mathbb{W}'$ s'identifie à un sous-Espace Vectoriel de $t\mathbb{B}_{k-1} \subset \mathbb{B}_k$; en particulier, $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}') \geqslant 0$ (cf. lemme 2.6). Comme par ailleurs, $\mathbb{W}''$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}_1$, on a aussi $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}'') \geqslant 0$. Comme par hypothèse,

$$0 = \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}') + \dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}''),$$

cela implique $\dim_{\mathrm{res}}(\mathbb{W}'') = 0$, et comme $\mathbb{W}''$ est un sous-Espace Vectoriel non nul de $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{V}^1$, on a $\mathbb{W}'' = \mathbb{B}_1$ et θ est un isomorphisme de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{B}_1$. Soit $\ell_{\mathbb{W}} \in \mathbb{W}(\widehat{C\{X\}})$ l'image inverse de X par θ ; c'est un élément additif de rang 0 puisque θ est un isomorphisme.

Maintenant, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_{1,1}$ est une extension non triviale de $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$ dans la catégorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie (c'est même l'extension universelle [**9**, n° 10.4]) ; soit $\ell_{\mathbb{U}}$ l'élément additif de $\mathbb{U}(\widehat{C\{X\}})$ vérifiant $\theta(\ell_{\mathbb{U}}) = X$. Comme $\mathbb{U}$ est une extension non triviale de $\mathbb{B}_1$ par $\mathbf{Q}_p$, cela implique que $\ell_{\mathbb{U}}$ est de rang 1. On en déduit le fait que $f = \theta(t^{-1}(\ell_{\mathbb{W}} - \ell_{\mathbb{U}}))$ est un élément de $\mathscr{C}$ de rang 1 (en effet, $\ell_{\mathbb{W}}(\mathrm{H}_C) = 0$ puisque $\ell_{\mathbb{W}}$ est de rang 0, et donc $f(\mathrm{H}_C) = t^{-1}\ell_{\mathbb{U}}(\mathrm{H}_C)$ est un sous-$\mathbf{Z}_p$-réseau de $\mathbf{Q}_p$), ce qui contredit le (b) de la remarque 1.8 et permet de conclure.

Remarque 2.15. — Cet énoncé est l'analogue analytique du fait que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ne contient pas de sous-anneau isomorphe à C stable par Galois.

Proposition 2.16. — *Si $\mathbb{W} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un sous-E-Espace Vectoriel non nul de Dimension finie, alors* $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) \geqslant 1$.

Démonstration. — Soit $\mathbb{W}_k = \mathbb{W} \cap t^k\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et soit k_0 le plus grand entier k tel que $\mathbb{W}_k \neq 0$ (cf. lemme 2.13). Alors $\mathbb{W}_{k_0}$ s'injecte dans $t^{k_0}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^{k_0+1}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cong \mathbb{V}^1$, et comme $\mathbb{W}_{k_0}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, cette injection ne peut être un isomorphisme (lemme 2.14). On a donc $\dim_{\mathrm{pr},E}(\mathbb{W}_{k_0}) = 0$ et $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{k_0}) > 0$. Par ailleurs, $\mathbb{W}/\mathbb{W}_{k_0}$ s'injecte dans $\mathbb{B}_{k_0}$ et donc $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}/\mathbb{W}_{k_0}) \geqslant 0$. On en déduit l'inégalité

$$\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{k_0}) + \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}/\mathbb{W}_{k_0}) > 0\,,$$

qui permet de conclure.

Soit $\mathbb{W}$ un sous-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$. Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$ le sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ engendré par $\mathrm{W} = \mathbb{W}(C)$ et soit $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ l'Espace Vectoriel engendré par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$: par définition, si Λ est une algèbre sympathique,

$$(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W})(\Lambda) = \{x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda))^d,\ s(x) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W} \text{ pour tout } s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)\}.$$

Lemme 2.17. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, alors $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ est un $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module libre de rang $\leqslant d$, et on a* $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$.

Démonstration. — $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ étant un anneau de valuation discrète d'uniformisante t, on peut trouver une base $e_1, \dots, e_d$ de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, un entier $r \leqslant d$ et des entiers $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$ tels que $t^{a_1}e_1, \dots, t^{a_r}e_r$ forment une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathrm{W}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Soit alors Λ une algèbre sympathique et $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda))^d$. On peut écrire x de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^d x_ie_i$, avec $x_i \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda)$ si $1 \leqslant i \leqslant d$. Maintenant, $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W})(\Lambda)$ si et seulement si, quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, l'image de $s(x_i)$ est nulle dans $\mathbf{B}_k$ pour $k \leqslant a_i$ (resp. $k \in \mathbf{N}$) si $i \leqslant r$ (resp. $i \geqslant r+1$). Comme $\mathbb{B}_k$ est un Espace Vectoriel, cela signifie que l'image de x_i est nulle dans $\mathbb{B}_k(\Lambda)$ pour $k \leqslant a_i$ (resp. $k \in \mathbf{N}$) si $i \leqslant r$ (resp. $i \geqslant r+1$), et donc que $x_i \in t^{a_i}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda)$ (resp. $x_i = 0$) si $i \leqslant r$ (resp. $i \geqslant r+1$). Ceci permet de montrer que $t^{a_1}e_1, \ldots, t^{a_r}e_r$ forment une base de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et permet de conclure.

Proposition 2.18. — *Si* $\mathbb{W}$ *est un sous-E-Espace Vectoriel de* $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, *de Dimension* $\mathrm{Dim}_E(\mathbb{W}) = (a,h)$, *alors le rang de* $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}$ *est* $\leqslant h$.

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur d, le cas $d=1$ correspondant à la proposition 2.16. Si $i \in \mathbf{N}$, soit $\mathbb{W}_i = \mathbb{W} \cap ((\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^i \times \{0\}^{d-i})$. les $\mathbb{W}_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant d$ forment une suite croissante de E-Espaces Vectoriels de Dimension finie. Soit $i_0 \geqslant 1$ le plus petit i tel que $\mathbb{W}_i \neq 0$. Alors $\mathbb{W}_{i_0}$ (resp. $\mathbb{W}/\mathbb{W}_{i_0}$) s'identifie à un sous-$E$-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (resp. de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{d-i_0}$) et on a

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}) = \mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot (\mathbb{W}/\mathbb{W}_{i_0})) + 1 &\leqslant \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}/\mathbb{W}_{i_0}) + 1 \\ &= \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}) + 1 - \dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{i_0}),\end{aligned}$$

et comme $\dim_{\mathrm{res},E}(\mathbb{W}_{i_0}) \geqslant 1$ d'après la proposition 2.16, cela permet de conclure.

3. Autour du théorème de Dieudonné-Manin

3.1. Énoncé des résultats. — Si $r = \frac{b}{k} \in \mathbf{Q}$, avec $k \geqslant 1$ et $(b,k) = 1$, on note $D_{[r]}$ le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\oplus_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_p \cdot e_i$ muni de l'action du Frobenius φ donnée par

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i \neq 0, \\ p^b e_1 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Soit M un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$. Comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est de valuation discrète d'idéal maximal engendré par t_h, il existe des entiers $a_1, \ldots, a_d$ et une base $u_1, \ldots, u_d$ de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tels que $t_h^{a_1}u_1, \ldots, t_h^{a_d}u_d$ soit une base de M sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On note $t_H(M)$ la quantité $\sum_{i=1}^d a_i$.

Soit $\mathbb{M} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M$ le sous-$\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ engendré par M.

Lemme 3.1. — $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d/\mathbb{M}$ *est un* E_h*-Espace Vectoriel de dimension* $(t_H(M), 0)$.

Démonstration. — On a $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d/\mathbb{M} = \oplus_{i=1}^d \mathbb{B}_{a_i} \cdot u_i$, ce qui permet de conclure.

Soit $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ le sous-$\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-Module de $(\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+)^d$ défini par

$$\mathbb{M}_{\mathrm{rig}} = \{x \in (\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+)^d,\ \varphi^n(x) \in \mathbb{M} \text{ quel que soit } n \in \mathbf{Z}\}.$$

Le résultat principal de ce § est le théorème suivant :

Théorème 3.2. — *Le* $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+$*-Module* $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ *est un* $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+$*-module libre de rang* d *admettant une décomposition sous la forme* $\oplus_{i \in I} M_i$, *où* $M_i \cong \widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{[r_i]}$.

Remarque 3.3. — Les r_i, comptés avec multiplicité $\dim_{\mathbf{Q}_p} D_{[r_i]}$, s'appellent les *pentes* de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$; il y a donc d pentes. La décomposition ci-dessus n'a rien d'intrinsèque ; par contre la filtration (croissante) par les sous-$\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-Modules $\mathbb{M}_{\mathrm{rig},r} = \oplus_{r_i \leqslant r} M_i$ est, elle, parfaitement intrinsèque.

Remarque 3.4. — Le théorème 3.2 admet comme corollaires faciles les corollaires 3.5 et 3.7 ci-dessous, mais ce n'est pas dans cet ordre que l'on peut établir les résultats. Une des difficultés de la démonstration est que l'on ne sait pas à l'avance quels vont être les dénominateurs des pentes de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$, ce qui nous amène à commencer par démontrer le corollaire 3.7 en utilisant la théorie des Espaces Vectoriels de Dimension finie ; on en déduit le corollaire 3.5 par des arguments purement combinatoires. Enfin, le théorème 3.2 se déduit du corollaire 3.5 de manière assez classique.

Si $h \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$, soit

$$\mathbb{W}_{h,a} = \mathbb{M}_{\mathrm{rig}}^{\varphi^h = p^a} = \{x \in (\mathbb{U}_{h,a})^d,\ \varphi^n(x) \in \mathbb{M} \text{ quel que soit } n \in \mathbf{N}\};$$

c'est un sous-E_h-Espace Vectoriel de $(\mathbb{U}_{h,a})^d$ dont on note $(w_{h,a}, w'_{h,a})$ la E_h-Dimension. Comme $\mathbb{U}_{h,a} = 0$ si $a < 0$, on a $w_{h,a} = w'_{h,a} = 0$ si $a < 0$.

Corollaire 3.5. — *Il existe des rationnels $r_1 = \frac{a_1}{h_1}, \dots, r_d = \frac{a_d}{h_d}$, un entier $h_0 \geqslant 1$ multiple de $h_1, \dots, h_d$, et une famille $e_1, \dots, e_d$ d'éléments de $(\mathbf{B}^+_{\max})^d$ vérifiant $\varphi^{h_i}(e_i) = p^{a_i} e_i$ tels que, si h est un multiple de h_0, alors*

$$\mathbb{W}_{h,a} = \oplus_{i=1}^d \mathbb{U}_{h,a-hr_i} \cdot e_i.$$

Lemme 3.6. — *Si $r = \frac{b}{k}$, alors*

$$\mathrm{Dim}_{E_h}\big((\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{[r]})^{\varphi^h = p^a}\big) = \begin{cases} (ka - hb, k) & si\ \frac{a}{h} \geqslant r, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. — Si e est le p.g.c.d de k et h, l'application $i \mapsto i + h$ est périodique de période $\frac{k}{e}$ sur $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$; on en déduit un isomorphisme

$$(\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{[r]})^{\varphi^h = p^a} \cong \big(\mathbb{U}_{\frac{kh}{e}, \frac{ka-hb}{e}}\big)^e,$$

et le résultat. (L'isomorphisme en question est $x_1 e_1 + \dots + x_k e_k \mapsto (x_1, \dots, x_e)$.)

Corollaire 3.7. — *Il existe des entiers $y'_{h,a}$, $y_{h,a}$ tels que l'on ait*
(i) $0 \leqslant y_{h,a} < y'_{h,a}$ *et* $\sum_{a \in \mathbf{Z}} y'_{h,a} = d$;
(ii) $w'_{h,a} = w'_{h,a-1} + y'_{h,a}$ *et* $w_{h,a} = w_{h,a-1} + w'_{h,a-1} + y_{h,a-1}$.

Démonstration. — Il résulte du lemme 3.6 que $\mathrm{Dim}_{E_h} \mathbb{W}_{h,a} = \sum_{r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1)$ et donc que

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}_{E_h} \mathbb{W}_{h,a} - \mathrm{Dim}_{E_h} \mathbb{W}_{h,a-1} &= \sum_{\frac{a-1}{h} < r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1) + \sum_{r_i \leqslant \frac{a-1}{h}} (1, 0) \\ &= \sum_{\frac{a-1}{h} < r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1) + (w'_{h,a-1}, 0); \end{aligned}$$

on en déduit le résultat en posant $(y_{h,a}, y'_{h,a}) = \sum_{\frac{a-1}{h} < r_i \leqslant \frac{a}{h}} (a - hr_i, 1)$.

3.2. Démonstration directe du corollaire 3.7. — On note $\mathbb{M}_{h,a}$ le sous-$\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-Module $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{W}_{h,a}$ de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ engendré par $\mathbb{W}_{h,a}$, et $m_{h,a}$ son rang. On note aussi $W_{h,a}$ et $M_{h,a}$ respectivement les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathbb{W}_{h,a}(C)$ et $\mathbb{M}_{h,a}(C)$. On a $M_{h,a} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot W_{h,a}$, et donc, en particulier, $W_{h,a} \subset M_{h,a}$.

Lemme 3.8. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors $\mathbb{W}_{h,a} \cap t_h\mathbb{M} = t_h\mathbb{W}_{h,a-1}$.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{W}_{h,a} \cap t_h\mathbb{M}$. Alors $t_h^{-1}x \in (t_h^{-1}\mathbb{U}_{h,a})^d$ est tel que $\varphi^n(t_h^{-1}x) \in \mathbb{M} \subset (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ (il faut regarder séparément les cas « h divise n » et « h ne divise pas n » et utiliser les propriétés (ii) et (iii) de t_h). D'après le corollaire 2.12, ceci implique que $t_h^{-1}x \in (\mathbb{U}_{h,a-1})^d$; on en déduit le résultat.

Lemme 3.9. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, on dispose de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow t_h\mathbb{W}_{h,a} \longrightarrow \mathbb{M}_{h,a} \cap \mathbb{W}_{h,a+1} \longrightarrow \mathbb{M}_{h,a}/t_h\mathbb{M}_{h,a} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — L'exactitude à gauche est une évidence et celle au milieu résulte du lemme 3.8. Pour montrer l'exactitude à droite, posons $m = m_{h,a}$ et choisissons une base $e_1, \dots, e_m$ de $\mathbb{M}_{h,a}$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ constituée d'éléments de $W_{h,a}$. Alors $\mathbb{M}_{h,a} \cap \mathbb{W}_{h,a+1}$ contient $\mathbb{U}_{h,1}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{U}_{h,1}e_m$ et l'exactitude à droite suit de ce que $\theta : \mathbb{U}_{h,1} \to \mathbb{B}_1$ est surjective.

Corollaire 3.10. — *On a $\mathbb{M}_{h,a} \subset \mathbb{M}_{h,a+1}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$, et $m_{h,a} = d$ si a est assez grand.*

Démonstration. — L'exactitude à droite de la suite du lemme 3.9 alliée à l'inclusion $W_{h,a} \subset M_{h,a}$ montre que $M_{h,a} \cap M_{h,a+1}$ se surjecte sur $M_{h,a}/t_hM_{h,a}$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ étant de valuation discrète, cela implique que $M_{h,a} \cap M_{h,a+1}$ contient $M_{h,a}$ ou, autrement dit, que $M_{h,a} \subset M_{h,a+1}$. On en déduit, en utilisant le lemme 2.17, l'inclusion de $\mathbb{M}_{h,a}$ dans $\mathbb{M}_{h,a+1}$. D'autre part, M étant un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, il contient $(t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ pour un certain i, ce qui fait que $\mathbb{W}_{h,hi+a}$ contient $(t^i\mathbb{U}_{h,a})^d$ [et donc $m_{h,hi+a} = d$], si $a \in \mathbf{N}$. Ceci permet de conclure.

Lemme 3.11. — *Si a est assez grand, alors $w'_{h,a} = d$ et $w_{h,a} = da - ht_H(M)$.*

Démonstration. — Si $c \in \mathbf{N}$, soit $\mathbb{D}_c = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d/(\mathbb{M} + (t_h^c\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d)$. Si $b \in \mathbf{N}$ est tel que M contienne $(t_h^b\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ et si $c \geqslant b$, alors $\mathbb{D}_c = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d/\mathbb{M}$ et $x \in \mathbb{M}$ si et seulement si son image dans $\mathbb{D}_c$ est nulle.

Soit alors $a \geqslant hb$. Écrivons a sous la forme $a = a_0 + \cdots + a_{h-1}$, avec $a_0, \dots, a_{h-1} \geqslant b$. Il résulte de la discussion précédente que $\mathbb{W}_{h,a}$ est le noyau de l'application $x \mapsto (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{h-1}(x))$ de $(\mathbb{U}_{h,a})^d$ dans $\oplus_{i=0}^{h-1}\mathbb{D}_{a_i}$. D'autre part, cette application est surjective d'après le corollaire 2.11 puisque $\mathbb{D}_{a_i}$ est un quotient de $(\mathbb{B}_{a_i})^d$; on a donc

$$\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{W}_{h,a}) = d\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{U}_{h,a}) - \sum_{i=0}^{h-1} \mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{D}_{a_i}),$$

et on conclut en utilisant les formules (cf. lemme 3.1 pour la seconde)

$$\mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{U}_{h,a}) = (a,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}_{E_h}(\mathbb{D}_{a_i}) = (t_H(M), 0).$$

Lemme 3.12. — *Le $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-Module $\mathbb{M}/\mathbb{M}_{h,a}$ est sans torsion.*

Démonstration. — On a $\mathbb{M} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M$ et $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M_{h,a}$ d'après le lemme 2.17. On en déduit l'égalité $\mathbb{M}/\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} (M/M_{h,a})$, et il suffit de montrer que $M/M_{h,a}$ est sans torsion. Soient $m = m_{h,a}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ une base de $M_{h,a}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, constituée d'éléments de $W_{h,a}$. Si $x \in M$ est tel que $t_h x \in M_{h,a}$, on peut écrire $t_h x$, de manière unique, sous la forme $x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m$ avec $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Comme $\theta : \mathbf{U}_{h,1} \to C$ est surjectif, il existe $\widetilde{x}_i \in \mathbf{U}_{h,1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, tel que $x_i - \widetilde{x}_i \in t_h \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Si $y_i = t_h^{-1}(x_i - \widetilde{x}_i)$, on a

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}_1\alpha_1 + \cdots + \widetilde{x}_m\alpha_m = t_h x - t_h(y_1\alpha_1 + \cdots y_m\alpha_m),$$

et comme $y_1\alpha_1 + \cdots + y_m\alpha_m \in M_{h,a} \subset M$, on voit que $\widetilde{x} \in t_h M$. Par ailleurs $\widetilde{x} \in (\mathbf{U}_{h,a+1})^d$ et $\varphi^n(t_h^{-1}\widetilde{x}) \in M$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le corollaire 2.12, ceci implique $t_h^{-1}\widetilde{x} \in W_{h,a}$, et donc $x \in t_h M_{h,a}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 3.13. — *On a $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{M}$ si $a \gg 0$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 3.10, $\mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+} \mathbb{M}_{h,a} = d = \mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+} \mathbb{M}$ si $a \gg 0$ et donc $\mathbb{M}/\mathbb{M}_{h,a}$ est un $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-Module de torsion ; le lemme précédent montre que ce Module est nul, ce qui permet de conclure.

Comme $M/M_{h,a}$ et $M/M_{h,a-1}$ sont sans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-torsion, $M_{h,a-1}$ admet des supplémentaires dans $M_{h,a}$. Soient $M'_{h,a}$ un de ces supplémentaires, et $\mathbb{M}'_{h,a} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+} M'_{h,a}$. On a donc $\mathbb{M}_{h,a} = \mathbb{M}_{h,a-1} \oplus \mathbb{M}'_{h,a}$. Soit $\mathbb{Y}_{h,a} = \mathbb{M}'_{h,a} \cap (\mathbb{W}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1})$.

Lemme 3.14. — (i) *$\mathbb{Y}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$ contient $\mathbb{W}_{h,a}$.*

(ii) *L'application naturelle de $\mathbb{Y}_{h,a}$ dans $\mathbb{M}'_{h,a}/t_h\mathbb{M}'_{h,a}$ est injective.*

Démonstration. — Il suffit d'écrire $y \in \mathbb{W}_{h,a}$ sous la forme $y_1 + y_2$, avec $y_1 \in \mathbb{M}_{h,a-1}$ et $y_2 \in \mathbb{M}'_{h,a}$ car alors $y_2 = y - y_1$ appartient à $\mathbb{W}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$, et donc aussi à $\mathbb{Y}_{h,a}$.

Pour démontrer le (ii), partons de $y \in \mathbb{W}_{h,a} \cap t_h\mathbb{M}'_{h,a}$. Il existe donc $m' \in \mathbb{M}'_{h,a}$, $m \in \mathbb{M}_{h,a-1}$ et $w \in \mathbb{W}_{h,a}$ tels que l'on ait $y = t_h m' = m + w$. D'après le lemme 3.9, il existe $w' \in \mathbb{W}_{h,a} \cap \mathbb{M}_{h,a-1}$ et $m_1 \in t_h\mathbb{M}_{h,a-1}$, tels que $w' - m = t_h m_1$, ce qui se traduit par $t_h(m' + m_1) = w + w'$. On en déduit, en utilisant le lemme 3.8, que $w + w' \in t_h\mathbb{W}_{h,a-1}$, et comme $\mathbb{W}_{h,a-1} \subset \mathbb{M}_{h,a-1}$, cela implique $y = t_h m' \in \mathbb{M}_{h,a-1}$, et donc $y = 0$ puisque $\mathbb{M}_{h,a-1} \cap \mathbb{M}'_{h,a} = 0$. Ceci permet de conclure.

Le lemme précédent permet, entre autre, de montrer que $\mathbb{Y}_{h,a}$ est de Dimension finie ; on note $(y_{h,a}, y'_{h,a})$ sa E_h-Dimension.

Lemme 3.15. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors*

(i) *$m_{h,a} - m_{h,a-1} \leqslant y'_{h,a}$.*

(ii) *$y_{h,a} < y'_{h,a}$, si $y'_{h,a} \neq 0$.*

Démonstration. — $\mathbb{Y}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$ contient $\mathbb{W}_{h,a}$ et donc $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{Y}_{h,a} + \mathbb{M}_{h,a-1}$ est égal à $\mathbb{M}_{h,a}$. On en déduit l'inégalité $\mathrm{rg}_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cdot \mathbb{Y}_{h,a}) \geqslant m_{h,a} - m_{h,a-1}$. Comme par ailleurs, $\mathbb{Y}_{h,a} \subset \mathbb{M}'_{h,a}$, cette inégalité est une égalité et le (i) découle du corollaire 2.18.

Quant au (ii), il découle du (i), grâce à la proposition 2.4, une fois que l'on a remarqué que $\mathbb{Y}_{h,a}$, étant un sous-E_h-Espace Vectoriel de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, ne contient pas de $\mathbb{V}^1$ (prop. 2.14), et (lemme 3.14) que $\mathbb{Y}_{h,a}$ s'identifie à un sous-E_h-Espace Vectoriel de $\mathbb{M}'_{h,a}/t_h\mathbb{M}'_{h,a} \cong \mathbb{V}^{m_{h,a}-m_{h,a-1}}$.

Corollaire 3.16. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors $m_{h,a} - m_{h,a-1} = y'_{h,a}$ et $w'_{h,a} = m_{h,a}$.*

Démonstration. — On a $w'_{h,b} = \sum_{a\leqslant b} y'_{h,a} \geqslant \sum_{a\leqslant b} m_{h,a} - m_{h,a-1} = m_{h,b}$. Par ailleurs, pour $b \gg 0$, on a $w'_{h,b} = m_{h,b} = d$ (cf. corollaire 3.10 et lemme 3.11). Toutes les inégalités dans la somme sont donc des égalités, ce qui permet de conclure.

En regroupant les résultats obtenus dans le lemme 3.11 et les corollaires 3.13 et 3.16, on obtient le résultat suivant qui termine la démonstration du corollaire 3.7.

Corollaire 3.17. — *Les entiers $w'_{h,a}$, $w_{h,a}$, $y'_{h,a}$ et $y_{h,a}$ vérifient les relations*

(i) $\sum_{a\in\mathbf{Z}} y'_{h,a} = d$;

(ii) $y_{h,a} < y'_{h,a}$, *si* $y'_{h,a} \neq 0$;

(iii) $w'_{h,a} - w'_{h,a-1} = y'_{h,a}$ *et* $w_{h,a} - w_{h,a-1} = w'_{h,a-1} + y_{h,a}$.

3.3. Démonstration du corollaire 3.5. — Le principe de la démonstration est d'étudier ce qui se passe quand on remplace h par un multiple.

Proposition 3.18. — *Si $h, k \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$, alors*

(i) $\mathbb{W}_{kh,ka} = E_{kh} \otimes_{E_h} \mathbb{W}_{h,a}$;

(ii) $w_{kh,ka} = kw_{k,a}$, $w'_{kh,ka} = w'_{h,a}$ *et* $m_{kh,ka} = m_{h,a}$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). Soit $e_1, \dots, e_k$ une base de E_{kh} sur E_h. Comme $\varphi^h, \dots, \varphi^{kh}$ sont les éléments de $\mathrm{Gal}(E_{kh}/E_h)$, la matrice de coefficients $(\varphi^{jh}(e_i))_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ est inversible. On peut donc trouver des éléments $a_1, \dots, a_k$ de E_{kh} tels que l'on ait $\sum_{i=1}^k \varphi^{kh}(e_i)a_i = 1$ et $\sum_{i=1}^k \varphi^{jh}(e_i)a_i = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Un petit calcul montre alors que les applications $(w_1, \dots, w_k) \mapsto \sum_{i=1}^k a_i w_i$ et $w \mapsto (w_1, \dots, w_k)$, avec $w_i = \sum_{j=1}^k p^{-ja}\varphi^{jh}(xe_i)$ sont inverses l'une de l'autre et envoient respectivement $(\mathbb{W}_{h,a})^k$ dans $\mathbb{W}_{kh,ka}$ et $\mathbb{W}_{kh,ka}$ dans $(\mathbb{W}_{h,a})^k$. Ceci permet de démontrer le (i) et termine la démonstration.

Lemme 3.19. — *Si $a \in \mathbf{Z}$, alors*

$$\sum_{i=0}^{k-1} y'_{kh,ka-i} = y'_{h,a}.$$

Démonstration. — D'après le (iii) du cor. 3.17, on a

$$\sum_{i=0}^{k-1} y'_{kh,ka-i} = m_{kh,ka} - m_{kh,k(a-1)} = m_{h,a} - m_{h,a-1} = y'_{h,a}.$$

Lemme 3.20. — *Si $y_{h,a} = 0$ et si $k(a-1) < b \leqslant ka$, alors $y_{kh,b} = 0$.*

Démonstration. — On a $w_{kh,ka} - w_{kh,k(a-1)} = k(w_{h,a} - w_{h,a-1}) = kw'_{h,a-1}$, d'après le (ii) de la prop. 3.18 et le (iii) du cor. 3.17. Par ailleurs, d'après le (iii) du cor. 3.17, on a

$$w_{kh,ka} - w_{kh,k(a-1)} = \sum_{i=0}^{k-1}(w'_{kh,k(a-1)+i} + y_{kh,k(a-1)+i+1}) \geqslant kw'_{kh,k(a-1)} + \sum_{k(a-1)<b\leqslant ka} y_{kh,b}.$$

On en déduit le résultat, en utilisant l'égalité $w'_{h,a-1} = w'_{kh,h(a-1)}$ de la prop. 3.18.

Lemme 3.21. — *Si $y_{h,a}>0$ et si $k=y'_{h,a}$, alors*
$$\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka,\ y_{kh,b}\neq 0}(y'_{kh,b}-1)<y'_{h,a}-1.$$

Démonstration. — Notons que, d'après le lemme 3.15, $k=y'_{h,a}>y_{h,a}\geqslant 1$; en particulier, $k\geqslant 2$. On déduit du (ii) de la prop. 3.18 et du (iii) du cor. 3.17, que
$$k(w_{h,a}-w_{h,a-1})=w_{kh,ka}-w_{kh,k(a-1)}=kw'_{kh,k(a-1)}+\sum_{i=0}^{k-1}(iy'_{kh,ka-i}+y_{kh,ka-i})$$
et donc $\sum_{i=0}^{k-1}(iy'_{kh,ka-i}+y_{kh,ka-i})$ est divisible par k. Comme par ailleurs, d'après le lemme 3.19, $\sum_{i=0}^{k-1}y'_{kh,ka-i}=k$, il y a deux cas :

• il existe $0\leqslant i\leqslant k-1$ tel que $y'_{kh,ka-i}=k$ et $y'_{kh,ka-j}=0$ si $j\neq i$. Dans ce cas, on déduit du (ii) du cor. 3.17 que $y_{kh,ka-j}=0$, si $j\neq i$ et que $y_{kh,ka-j}<y'_{kh,ka-i}=k$ est divisible par k, et donc est nul ; on a donc $\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka,\ y_{kh,b}\neq 0}(y'_{kh,b}-1)=0<k-1$;

• le cardinal r de l'ensemble des $i\in\{0,\dots,k-1\}$ vérifiant $y'_{kh,ka-i}\neq 0$ est $\geqslant 2$, auquel cas on obtient, en utilisant le lemme 3.19,
$$\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka,\ y_{kh,b}\neq 0}(y'_{kh,b}-1)\leqslant\Big(\sum_{k(a-1)<b\leqslant ka}y'_{kh,b}\Big)-r\leqslant y'_{h,a}-2,$$
ce qui permet de conclure.

Définissons le défaut de h comme la quantité $\Delta(h)=\sum_{\{a,y_{h,a}\neq 0\}}(y'_{h,a}-1)$. Comme $y'_{h,a}>y_{h,a}$, on a $\Delta(h)=0$ si et seulement si $y_{h,a}=0$ pour tout a, et donc si et seulement si $\mathbb{Y}_{h,a}$ est un E_h-espace vectoriel de dimension finie quel que soit $a\in\mathbf{Z}$.

Proposition 3.22. — *Il existe h tel que $\Delta(h)=0$.*

Démonstration. — Soit h réalisant le minimum de $\Delta(h)$. Si $\Delta(h)\neq 0$, il existe $a\in\mathbf{N}$ tel que $y_{h,a}\neq 0$ et, si $k=y'_{h,a}$, les lemmes 3.20 et 3.21 montrent que $\Delta(kh)<\Delta(h)$, ce qui conduit à une contradiction qui permet de conclure.

Supposons dorénavant que $\Delta(h)=0$ et, si $b\in\mathbf{Z}$, soit $e_{b,j}$, pour $1\leqslant j\leqslant y'_{h,b}$ une base de $\mathbb{Y}_{h,b}$ sur E_h. Soit de plus $I=\coprod_{b\in\mathbf{Z}}\{(b,j),\ 1\leqslant j\leqslant y'_{h,b}\}$ et, si $i=(b,j)\in I$, soit $r_i=\frac{b}{h}$.

Proposition 3.23. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

(i) $(\varphi^n(e_i))_{i\in I}$ *est une base de M sur $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$;*

(ii) $\mathbb{W}_{h,a}=\oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot e_i\big)$ *si $a\in\mathbf{Z}$.*

Démonstration. — Par construction, on a $\mathbb{M}_{h,a}=\oplus_{b\leqslant a}\mathbb{B}_{\rm dR}^+\cdot\mathbb{Y}_{h,a}$, ce qui montre que les e_i, avec $r_i\leqslant\frac{a}{h}$, engendrent $\mathbb{M}_{h,a}$. En particulier, comme $\mathbb{M}_{h,a}=\mathbb{M}$ si $a\gg 0$ (corollaire 3.13), les e_i, $i\in I$, engendrent un sous-réseau de $(\mathbb{B}_{\rm dR}^+)^d$ et, comme $|I|=d$ ((i) du corollaire 3.17), cela montre que les e_i forment une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{B}_{\rm dR}^+$ et donc aussi de M sur $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$.

En particulier, les e_i, $i\in I$ forment une famille libre sur $\mathbb{B}_{\rm dR}^+$ et l'application naturelle $\oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot e_i\big)\to\mathbb{W}_{h,a}$ est injective. Une récurrence immédiate sur a (utilisant le (ii) du corollaire 3.17) montrant que les E_h-Espaces Vectoriels $\oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}\cdot e_i\big)$ et $\mathbb{W}_{h,a}$ ont la même dimension, cela prouve que cette application est un isomorphisme.

Finalement, si $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathbb{W}_{h,a} = \varphi^n(\mathbb{W}_{h,a}) = \oplus_{i\in I}\big(\varphi^n(\mathbb{U}_{h,a-hr_i}) \cdot \varphi^n(e_i)\big) = \oplus_{i\in I}\big(\mathbb{U}_{h,a-hr_i} \cdot \varphi^n(e_i)\big),$$

ce qui montre que les $\varphi^n(e_i)$, $i \in I$, engendrent le même sous-$\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$-Module de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ que les e_i, $i \in I$, et termine la démonstration de la proposition.

3.4. Démonstration du théorème 3.2

Lemme 3.24. — *On a*

$$\sum_{i\in I} r_i = t_H(M).$$

Démonstration. — D'après le (ii) de la proposition 3.23 et le lemme 3.11, on a

$$\sum_{i\in I}(a - hr_i) = \dim_{\mathrm{pr},E_h}(\mathbb{W}_{h,a}) = da - ht_H(M),$$

si a est assez grand. Ceci permet de conclure.

Choisissons une bijection $I \cong \{1,\dots,d\}$ et, si $1 \leqslant i \leqslant d$, soient $a_{i,1},\dots,a_{i,d} \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ les coordonnées de e_i. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+)$ et soit $\delta = \det A$.

Lemme 3.25. — *On a $t^{-t_H(M)}\delta \in E_h^*$.*

Démonstration. — Comme $\varphi^h(e_i) = p^{hr_i}(e_i)$, on a $\delta \in \mathbf{U}_{h,\sum_{i=1}^d hr_i} = \mathbf{U}_{h,ht_H(M)}$. Par ailleurs, $\varphi^n(e_1),\dots,\varphi^n(e_d)$ formant une base de M sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, on a $v_H(\varphi^n(\delta)) = t_H(M)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$; le corollaire 2.11 montre que ceci implique l'appartenance de $\big(\prod_{i=0}^{h-1}\varphi^{-i}(t_h)^{-t_H(M)}\big)\delta$ à $\mathbf{U}_{h,0} = E_h$, ce qui, compte tenu de la propriété (iii) de t_h, permet de conclure.

Corollaire 3.26. — *Les e_i, $i \in I$ forment une base de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ sur $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+$*

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$. D'après le lemme précédent, on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, avec $x_i \in \widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t}] = \widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t_h},\dots,\frac{1}{\varphi^{h-1}(t_h)}]$. Par ailleurs, on a $\varphi^n(x_i) \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (puisque les $\varphi^n(e_i)$, $i \in I$, forment une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$) ; on en déduit, utilisant le corollaire 2.12 (pour $(\prod_{j=0}^{h-1}\varphi^{-i}(t_h)^a)x_i$, avec $a \gg 0$), l'appartenance de x_i à $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathrm{rig}}^+$, ce qui permet de conclure.

Proposition 3.27. — *Soit h un entier $\geqslant 1$, soit $a \in \mathbf{Z}$ et soit e le p.g.c.d. de a et h. Soit Y un E_h-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ telle que l'on ait $\varphi^h(x) = p^a x$ quel que soit $x \in Y$. Alors*

(i) *Si $e \neq 1$, et si Y' est le sous-$E_{h/e}$-espace vectoriel de Y des éléments vérifiant $\varphi^{h/e}(x) = p^{a/e}x$, on a $Y = E_h \otimes_{E_{h/e}} Y'$.*

(ii) *Si a et h sont premiers entre eux, alors la dimension de Y sur E_h est un multiple ℓh de h et il existe des éléments $f_1,\dots,f_\ell$ de Y tels que les $\varphi^j(f_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$ et $0 \leqslant j \leqslant h-1$, forment une base de Y sur E_h.*

Démonstration. — Le (i) se démontre comme la proposition 3.19. Pour démontrer le (ii), introduisons l'algèbre $H_{h,a} = E_h \oplus E_h\varphi \oplus \cdots \oplus E_h\varphi^{h-1}$ avec les règles de commutation $\varphi^i \cdot \alpha = \varphi^i(\alpha) \cdot \varphi^i$ et la relation $\varphi^h = p^a$. C'est une algèbre à division de dimension h^2 sur $\mathbf{Q}_p$ et d'invariant $\frac{a}{h}$, et comme a et h sont premiers entre eux, cette algèbre est un corps (non commutatif). Par ailleurs,

Y est naturellement un $H_{h,a}$-module de type fini et, $H_{h,a}$ étant un corps, c'est un $H_{h,a}$-module libre de rang fini. Il suffit de prendre pour $f_1, \dots, f_\ell$ une base de Y sur $H_{h,a}$ pour démontrer le (ii).

Le théorème 3.2 se déduit de la proposition ci-dessus (et du corollaire 3.26) en faisant une récurrence sur le nombre de pentes. Si tous les r_i, $i \in I$, sont égaux à $r = \frac{a}{h}$, on a $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{E_h} \mathbb{Y}_{h,a}$, où $\mathbb{Y}_{h,a}$ est un E_h-espace vectoriel de dimension finie auquel on peut appliquer la proposition 3.27. Soit e le p.g.c.d. de a et h. En utilisant le (i), on obtient un isomorphisme $\mathbb{Y}_{h,a} = E_h \otimes_{E_{\frac{h}{e}}} \mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ et en utilisant le (ii), on obtient une décomposition $\mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}} = \oplus_{i=1}^{\ell} E_{h.e} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot f_i)$ et $\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot f_i$ est isomorphe à $D_{[h/a]}$, ce qui permet de conclure.

Si le nombre de pentes est $\geqslant 2$, soit $r = \frac{a}{h}$ la plus grande des pentes, soit e le p.g.c.d. de a et h, et soit J le sous-ensemble des $i \in I$ vérifiant $r_i = r$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-$\widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-Module M' engendré par les e_i, $i \in I - J$, et la proposition 3.27 à $\mathbb{W}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}} / (\mathbb{W}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}} \cap M') \cong \mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$. (Comme on n'a rien imposé à $\mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ en ce qui concerne φ, il n'a aucune raison d'être stable sous l'action de φ et on ne peut pas lui appliquer directement la proposition 3.27, mais l'isomorphisme précédent permet de le faire.) Si $f_1, \dots, f_\ell$ est une famille d'éléments de $\mathbb{Y}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ vérifiant les conclusions de la proposition 3.27, et si $\tilde{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, est un élément $\mathbb{W}_{\frac{h}{e},\frac{a}{e}}$ relevant f_i, alors $\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot \tilde{f}_i$ est isomorphe à $D_{[h/a]}$. On obtient alors une décomposition de $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ sous la forme voulue en écrivant $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}}$ sous la forme $\mathbb{M}_{\mathrm{rig}} = M' \oplus \big(\oplus_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathbb{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{Q}_p[\varphi] \cdot \tilde{f}_i)\big)$, et en utilisant la décomposition de M' fournie par l'hypothèse de récurrence.

4. Les anneaux de caractéristique p

Ce § est consacré à des rappels sur la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger [**21, 30**]. Pour les applications aux familles de représentations p-adiques de $\mathscr{G}_K$, il s'avère utile de préciser comment les constantes dépendent de K, ce qui nous amène à entrouvrir la boite noire que cette théorie constitue d'habitude ; les rappels sont donc un peu longs...

4.1. Rappels sur les corps locaux. — On note $\mathscr{G}_F^s$, pour $s \geqslant -1$, les sous-groupes d'inertie de $\mathscr{G}_F$ en numérotation supérieure. En particulier, $\mathscr{G}_F^{-1} = \mathscr{G}_F$; le sous-groupe d'inertie I_F de $\mathscr{G}_F$ est égal $\mathscr{G}_F^s$, pour tout $s \in]-1, 0]$, et le sous-groupe d'inertie sauvage de $\mathscr{G}_F$ est la réunion des $\mathscr{G}_F^s$, avec $s > 0$.

Si $s \geqslant -1$, on note $\overline{F}^{(s)}$ l'intersection des $\overline{F}^{\mathscr{G}_F^t}$, pour $t > s$. En particulier, $\overline{F}^{(s)}$ est l'extension maximale non-ramifiée (resp. modérément ramifiée) de F si $s \in [-1, 0[$ (resp. si $s = 0$). Si $L \subset \overline{F}$ est une extension de F, et $s \geqslant -1$, on note $L^{(s)}$ le sous-corps $L \cap \overline{F}^{(s)}$ de L et on définit le *conducteur* $c(L) \in [-1, +\infty]$ de L comme la borne inférieure de l'ensemble des s tels que $L^{(s)} = L$. On dit que L est *profondément ramifiée* si $c(L) = +\infty$ (ceci ne peut, bien évidemment, se produire que si L est une extension infinie de F).

Lemme 4.1. — (i) $c(L) = -1$ *si et seulement si* L *est une extension non ramifiée de* F *;*

(ii) $c(L) = 0$ *si et seulement si* L *est une extension modérément ramifiée de* F *;*

(iii) $c(F_n) = n - 1$ *si* $n \in \mathbf{N}$, *et* $F_\infty^{(s)} = F_n$ *si* $n - 1 \leqslant s < n$ *;*

(iv) $c(L_1 L_2) = \sup(c(L_1), c(L_2))$, *si* L_1 *et* L_2 *sont deux extensions de* F.

Démonstration. — Les deux premiers points sont évidents ; le troisième est un résultat standard, et l'inégalité $c(L_1L_2) \geqslant \sup(c(L_1), c(L_2))$ est immédiate sur la définition du conducteur. Réciproquement, si $s = \sup(c(L_1), c(L_2))$, on a $L_1 \subset \overline{F}^{(s)}$ et $L_2 \subset \overline{F}^{(s)}$, et donc $L_1L_2 \subset \overline{F}^{(s)}$ et $c(L_1L_2) \leqslant s$. Ceci permet de conclure.

Si K est une extension finie de F, notons $\mathfrak{d}_{K/F}$ sa différente. La formule suivante nous sera très utile :

$$v_p(\mathfrak{d}_{K/F}) = \int_{-1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{[K : K^{(s)}]}\Big)\, ds = \int_{-1}^{c(K)} \Big(1 - \frac{1}{[K : K^{(s)}]}\Big)\, ds.$$

On en déduit en particulier la majoration $v_p(\mathfrak{d}_{K/F}) \leqslant c(K)+1$. Soit $n_0(K)$ le plus petit entier $\geqslant c(K) + 1$.

4.2. L'extension cyclotomique d'une extension finie de F

Lemme 4.2. — *Si $n \geqslant n_0(K)$, alors :*

(i) *$c(K_n) = n - 1$ et Γ_K contient $1 + p^n\mathbf{Z}_p$;*

(ii) *K_{n+1}/K_n est une extension totalement ramifiée de degré p ;*

(iii) *$K^{(s)}_{n+1} = K^{(s)}_n$ quel que soit $s < n_0(K) - 1$.*

Démonstration. — On a $c(K_n) = \sup(c(K), c(F_n)) = \sup(c(K), n - 1)$; on en déduit le (i) et le (ii). Par ailleurs, $K^{(s)}_n = K^{(s)}_{n+1} \cap K_n$, et donc $K^{(s)}_{n+1}/K^{(s)}_n$ est de degré p si $K^{(s)}_{n+1} \neq K^{(s)}_n$. Ceci implique que l'on a $K_{n+1} = K^{(s)}_{n+1}K_n$, ce qui conduit à une contradiction car $c(K_{n+1}) = n$ et $c(K^{(s)}_{n+1}K_n) = \sup(c(K^{(s)}_{n+1}), c(K_n)) \leqslant \sup(s, n - 1) \leqslant n - 1$ si $s < n_0(K) - 1 \leqslant n - 1$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire 4.3. — *Si $n \geqslant n_0(K)$, alors*

(i) *$f(K_{n+1}/F_{n+1}) = f(K_n/F_n)$,*

(ii) *$e(K_{n+1}/F_{n+1}) = e(K_n/F_n)$;*

(iii) *l'application naturelle de l'ensemble des plongements de K_∞ dans $\overline{F}$ au-dessus de F_∞ dans celui des plongements de K_n dans $\overline{F}$ au-dessus de F_n est une bijection ; en particulier, si K/L est galoisienne, alors* $\mathrm{Gal}(K_n/F_n) = \mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty) = \mathscr{H}_F/\mathscr{H}_L$.

Démonstration. — Tous ces points sont des conséquences immédiates du (ii) du lemme précédent.

On note d_{K_∞} le degré de l'extension K_∞/F_∞. On note e_{K_∞} (resp. f_{K_∞}) la limite de la suite de terme général $e(K_n/F_n)$ (resp. $f(K_n/F_n)$).

Remarque 4.4. — (i) d_{K_∞} est aussi le degré de l'extension K_n/F_n si $n \geqslant n_0(K)$.

(ii) Comme l'extension F_∞/F est totalement ramifiée, f_{K_∞} est aussi le degré de l'extension F'/F, où F' est l'extension non ramifiée maximale de F contenue dans K_∞.

(iii) On a $F' \subset K_n$ si $n \geqslant n_0(K)$.

(iv) $e_{K_\infty} f_{K_\infty} = d_{K_\infty}$.

Proposition 4.5. — *La suite de terme général $p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ est stationnaire pour $n \geqslant n_0(K)$ et on a $p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) \leqslant \frac{1}{p-1} p^{n_0(K)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — On part des formules

$$v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F}) - v_p(\mathfrak{d}_{F_n/F}) = \int_{-1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{[F_n : F_n^{(s)}]} - \frac{1}{[K_n : K_n^{(s)}]}\Big)\, ds$$

et $p^n = \frac{p}{p-1}[F_n : F]$. Par ailleurs, on a $F_n^{(s)} = K_n^{(s)} \cap F_n$ et donc $[F_n : F_n^{(s)}] = [F_n K_n^{(s)} : K_n^{(s)}]$, ce qui nous donne

$$p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = \frac{p}{p-1} \int_{-1}^{+\infty} [F_n^{(s)} : F]\Big(1 - \frac{1}{[K_n : F_n K_n^{(s)}]}\Big)\, ds.$$

Maintenant, si $s \geqslant n_0(K) - 1$, on a $K^{(s)} = K$ et donc $[K_n : F_n K_n^{(s)}] = 1$, puisque $n_0(K) - 1 \geqslant c(K)$, ce qui nous fournit la formule

$$p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = \frac{p}{p-1} \int_{-1}^{n_0(K)-1} [F_n^{(s)} : F]\Big(1 - \frac{1}{[K_n : F_n K_n^{(s)}]}\Big)\, ds.$$

Pour obtenir la majoration de la proposition, il suffit alors de majorer $1 - \frac{1}{[K_n:F_nK_n^{(s)}]}$ par 1 et d'utiliser la formule

$$\int_{-1}^{n_0(K)-1} [F_n^{(s)} : F]\, ds = 1 + (p-1) + \cdots + (p-1)p^{n_0(K)-2} = p^{n_0(K)-1}.$$

Il reste à montrer que la suite $p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ est stationnaire pour $n \geqslant n_0(K)$. Soient donc $n \geqslant n_0(K)$ et $s < n_0(K) - 1$. On a $F_n^{(s)} = F_{n+1}^{(s)} = F_k$, où k est le plus grand entier $\leqslant s + 1 \leqslant n_0(K)$, et donc $[F_{n+1}^{(s)} : F] = [F_n^{(s)} : F]$ quel que soit $s \in [-1, n_0(K) - 1]$. Par ailleurs, l'extension K_{n+1}/K_n est de degré p et, comme $K_{n+1}^{(s)} = K_n^{(s)}$ est de conducteur $\leqslant s \leqslant n - 1$, l'extension $F_{n+1}K_{n+1}^{(s)}/F_nK_n^{(s)}$ est non triviale et donc de degré p, elle aussi. On a donc $[K_{n+1} : F_{n+1}K_{n+1}^{(s)}] = [K_n : F_nK_n^{(s)}]$, ce qui permet de conclure.

Lemme 4.6. — *Si $x \in \mathscr{O}_{F_{n+1}}$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_{n+1}/F_n)$, alors $v_p(\sigma(x) - x) \geqslant \frac{1}{p-1}$.*

Démonstration. — x peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i(\varepsilon^{(n+1)})^i$, avec $x_i \in \mathscr{O}_{F_n}$ si $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Par ailleurs, $\sigma(\varepsilon^{(n+1)}) = u_\sigma \varepsilon^{(n+1)}$, où u_σ est une racine p-ième de l'unité, et donc $\sigma(x) - x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i(\varepsilon^{(n+1)})^i(u_\sigma^i - 1)$. Le résultat suit de la minoration $v_p(u-1) \geqslant \frac{1}{p-1}$ si $u^p = 1$.

Remarque 4.7. — Une conséquence de la proposition 4.5 est que $v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: l'extension K_∞/F_∞ est presque étale.

Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal des éléments de valuation $\geqslant \frac{1}{p}$.

Lemme 4.8. — *Si $n \geqslant n_0(K) + 1$ et si $x \in \mathscr{O}_{K_{n+1}}$, alors $\mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}(x) - x^p \in \mathfrak{a}$.*

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathscr{O}_{K_n}$ sur $\mathscr{O}_{F_n}$; c'est aussi une base de K_{n+1} sur F_{n+1} car K_{n+1}/K_n et F_{n+1}/F_n sont de degré p. Soit $e_1^*, \dots, e_d^*$ la base de K_n sur F_n duale de $e_1, \dots, e_d$ pour la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{K_n/F_n}(xy)$ qui est aussi la restriction à K_n de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{K_{n+1}/F_{n+1}}(xy)$. Les e_i^* sont éléments de $\mathfrak{d}_{K_n/F_n}^{-1}$ et donc vérifient $v_p(e_i^*) \geqslant -\frac{1}{p-1}p^{n_0(K)-n} \geqslant -\frac{1}{p(p-1)}$. On peut alors écrire $x \in \mathscr{O}_{K_{n+1}}$ sous la forme $\sum_{i=1}^d x_i e_i^*$, avec

$x_i = \mathrm{Tr}_{K_{n+1}/F_{n+1}}(xe_i) \in \mathscr{O}_{F_{n+1}}$. On a $\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n) = \mathrm{Gal}(F_{n+1}/F_n)$ et, comme $v_p(\sigma(x_i) - x_i) \geqslant \frac{1}{p-1}$ d'après le lemme 4.6, on obtient finalement,

$$v_p(\sigma(x) - x) = v_p\Big(\sum_{i=1}^{d}(\sigma(x_i) - x_i)e_i^*\Big) \geqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p},$$

quel que soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$. Comme $\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$ est de cardinal p, cela permet de conclure.

Corollaire 4.9. — *Si $n \geqslant n_0(K) + 1$ et si $x \in \mathscr{O}_{K_{n+1}}/\mathfrak{a}$, alors $x^p \in \mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ et le morphisme d'anneaux $x \mapsto x^p$ de $\mathscr{O}_{K_{n+1}}/\mathfrak{a}$ dans $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ ainsi défini est surjectif.*

Démonstration. — Soient ω_{n+1} une uniformisante de K_{n+1} et $\omega_n = \mathrm{N}_{K_{n+1}/K_n}(\omega_{n+1})$; c'est une uniformisante de K_n. D'après le lemme précédent, on a $\omega_{n+1}^p = \omega_n$ dans $\mathscr{O}_{K_{n+1}}/\mathfrak{a}$. Tout élément de x de $\mathscr{O}_{K_{n+1}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{n+1}^k[a_k]$, où les a_k sont des éléments de $k_{F'}$ et $[a_k] \in \mathscr{O}_{F'}$ est le représentant de Teichmüller de a_k, et on a $x^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_n^k[a_k^p]$ modulo p et donc, *a fortiori*, modulo $\mathfrak{a}$. On en déduit l'appartenance de x^p à $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ et, utilisant le fait que $k_{F'}$ est parfait, la surjectivité de $x \mapsto x^p$.

4.3. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et certains de ses sous-anneaux. — Soit

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, x_n \in \mathscr{O}_C/\mathfrak{a} \text{ et } x_{n+1}^p = x_n \text{ si } n \in \mathbf{N}\}.$$

L'anneau $\mathscr{O}_C/\mathfrak{a}$ étant de caractéristique p, l'application $x \mapsto x^p$ en est un morphisme et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau de caractéristique p sur lequel $\mathscr{G}_F$ agit naturellement (composante par composante). D'autre part, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et si $\hat{x}_n$ est un relèvement quelconque de x_n dans $\mathscr{O}_C$, la suite de terme général $\hat{x}_{n+k}^{p^k}$ converge dans $\mathscr{O}_C$ vers une limite $x^{(n)}$ qui ne dépend pas du choix des $\hat{x}_n$. Ceci permet de décrire $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ comme l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. Soit $v_{\mathbf{E}} : \widetilde{\mathbf{E}}^+ \to \mathbf{R}$ l'application définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$.

On peut voir $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ comme un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et, si on pose $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$, on a $v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$.

Si K est une extension finie de F, soient

$$\widetilde{\mathbf{E}}_K^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+,\ x_n \in \mathscr{O}_{K_\infty}/\mathfrak{a} \text{ si } n \in \mathbf{N}\},$$
$$\mathbf{E}_K^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+,\ x_n \in \mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a} \text{ si } n \text{ est assez grand}\}.$$

$\mathbf{E}_K^+$ contient ε et $\overline{\pi}$, ce qui nous permet de poser $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^+[\overline{\pi}^{-1}]$, $\widetilde{\mathbf{E}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}_K^+[\overline{\pi}^{-1}]$ et $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}_K^+[\overline{\pi}^{-1}]$ si K est une extension finie de F.

Proposition 4.10 (**[21, 30]**). — (i) $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est un corps dont $v_{\mathbf{E}}$ est une valuation pour laquelle il est complet et dont le corps résiduel est $\overline{k}_F$. De plus l'action naturelle de $\mathscr{G}_F$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ est continue.*

(ii) $\mathbf{E}_F = k_F((\overline{\pi}))$ *et, plus généralement, si K est une extension finie de F, et si F' est l'extension maximale non ramifiée de F contenue dans K_∞, alors $\mathbf{E}_K$, muni de $v_{\mathbf{E}}$, est un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel $k_{F'}$.*

(iii) *Le sous-corps $\mathbf{E} = \cup_{K\subset\overline{F}}\mathbf{E}_K$ est une clôture séparable de $\mathbf{E}_F$ stable par $\mathscr{G}_F$ et, si K est une extension finie de F, alors $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K) = \mathscr{H}_K$; en particulier, $\mathscr{H}_K$ agit continûment sur $\mathbf{E}$ muni de la topologie discrète.*

(iv) $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est le complété de* $\mathbf{E}$ *pour la valuation* $v_{\mathbf{E}}$ *; en particulier,* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est algébriquement clos. De plus,* $\widetilde{\mathbf{E}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}_K}$ *est le complété de la clôture radicielle de* $\mathbf{E}_K$.

Démonstration. — Ce théorème constitue un cas particulier de la théorie du corps des normes ; le point (ii) et une partie du (iii) sont démontrés dans le n° suivant et nous renvoyons à **[30]** pour le reste.

4.4. L'anneau des normes

Proposition 4.11. — *L'anneau* $\mathbf{E}_K^+$ *est un anneau de valuation discrète, complet, de corps résiduel* $k_{F'}$. *De plus, si* $\overline{\pi}_K = (\overline{\pi}_{K,n})_{n\in\mathbf{N}}$ *est une uniformisante de* $\mathbf{E}_K^+$, *et si* $n \geqslant n_0(K)+1$, *alors* $\overline{\pi}_{K,n}$ *appartient à* $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ *et tout relèvement* $\hat{\pi}_{K,n}$ *de* $\overline{\pi}_{K,n}$ *dans* $\mathscr{O}_{K_n}$ *est une uniformisante de* K_n.

Démonstration. — Par surjectivité de $x\mapsto x^p$ (cor. 4.9), on peut trouver une suite $X=(\overline{\omega}_n)\in \mathbf{E}_K^+$, telle que, si $n\geqslant n_0(K)+1$, $\overline{\omega}_n$ soit l'image d'une uniformisante ω_n de K_n dans $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$. On a alors $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}\cong k_{F'}[X]/X^{e_{K_n}/p}$ et $\mathbf{E}_K^+=\varprojlim \mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ est donc isomorphe à $k_{F'}[[X]]$, l'application de $k_{F'}[[X]]$ dans $\mathscr{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ étant donnée par $\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k \mapsto \sum_{k=0}^{p^{-1}e_{K_n}-1} a_k^{p^{-n}}\overline{\omega}_n^k$. En particulier, si $K=F$, on peut prendre $\omega_n=\varepsilon^{(n)}-1$, ce qui montre que l'on a $\mathbf{E}_F=k_F((\overline{\pi}))$.

Maintenant, si $\overline{\pi}_K=(\overline{\pi}_{K,n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une uniformisante quelconque de $\mathbf{E}_K^+$, on peut écrire $\overline{\pi}_K$ sous la forme $\overline{\pi}_K=\sum_{k=1}^{+\infty}a_kX^k\in k_{F'}[[X]]$, avec $a_1\neq 0$. Si $n\geqslant n_0(K)+1$, on a alors $\overline{\pi}_{K,n}=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\overline{\omega}_n^k$, ce qui fait que tout relèvement $\hat{\pi}_{K,n}$ diffère de l'uniformisante $\sum_{k=1}^{+\infty}[a_k]\omega_n^k$ de K_n par un élément de $\mathfrak{a}$ et est une uniformisante de K_n. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Proposition 4.12. — *Si* K *est une extension finie de* F, *alors* $\mathbf{E}_K$ *est une extension séparable de degré* d_{K_∞} *de* $\mathbf{E}_F$, *d'indice d'inertie* f_{K_∞} *et d'indice de ramification* e_{K_∞}. *De plus, on a* $v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})=\lim_{n\to+\infty}p^nv_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})\leqslant \frac{1}{p-1}p^{n_0(K)}$.

Démonstration. — Si $e_{K_\infty}=1$, on a $\mathbf{E}_K=\mathbf{E}_{F'}=k_{F'}((\overline{\pi}))$, et le résultat est évident. Nous supposerons donc dans ce qui suit que $e_{K_\infty}\geqslant 2$. Soit $\overline{\pi}_K=(\overline{\pi}_{K,n})_{n\in\mathbf{N}}$ une uniformisante de $\mathbf{E}_K$ et, si $n\geqslant n_0(K)+1$, soit $\hat{\pi}_{K,n}$ un relèvement de $\overline{\pi}_{K,n}$ dans $\mathscr{O}_{K_n}$. Comme $n\geqslant n_0(K)+1\geqslant n_0(K)$, l'extension K_n/F'_n est totalement ramifiée de degré $e=e_{K_\infty}$; le polynôme minimal P_n de $\hat{\pi}_{K,n}$ sur F'_n est donc un polynôme d'Eisenstein de degré e que l'on peut mettre sous la forme $P_n(X)=X^e+a_{e-1,n}X^{e-1}+\cdots+a_{0,n}$. Soit S l'ensemble des plongements de K_∞ dans $\overline{F}$ au-dessus F'_∞ ; d'après le (iii) du cor. 4.3, c'est aussi l'ensemble des plongements de K_n dans $\overline{F}$ au-dessus F'_n si $n\geqslant n_0(K)$ et on a $P_n(X)=\prod_{\sigma\in S}(X-\sigma(\hat{\pi}_{K,n}))$.

Notons $\overline{a}_{i,n}$ l'image de $a_{i,n}$ dans $\mathscr{O}_{F'_n}/\mathfrak{a}$, et $\overline{P}_n$ le polynôme $X^e+\overline{a}_{e-1,n}X^{e-1}+\cdots+\overline{a}_{0,n}$. On a aussi $\overline{P}_n(X)=\prod_{\sigma\in S}(X-\sigma(\overline{\pi}_{K,n}))$; on en déduit le fait que $a_i=(\overline{a}_{i,n})_{n\geqslant n_0(K)}$ appartient à $\mathbf{E}_{F'}^+$ et $P(X)=X^e+a_{e-1}X^{e-1}+\cdots+a_0=\prod_{\sigma\in S}(X-\sigma(\overline{\pi}_K))\in\mathbf{E}_{F'}^+[X]$. Par ailleurs, comme P_n est un polynôme d'Eisenstein, on a $v_p(a_{0,n})=v_p(\varepsilon^{(n)}-1)$ et donc $v_{\mathbf{E}}(a_0)=v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$; le polynôme P est donc un polynôme d'Eisenstein, ce qui prouve que c'est le polynôme minimal de $\overline{\pi}_K$ et que $\mathbf{E}_K$ est une extension totalement ramifiée de degré e_{K_∞} de $\mathbf{E}_{F'}$; l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est donc une extension d'indice d'inertie $[F':F]=f_{K_\infty}$, d'indice de ramification e_{K_∞} et de degré $f_{K_\infty}e_{K_\infty}=d_{K_\infty}$.

Enfin, on a $v_{\mathbf{E}}(P'(\overline{\pi}_K)) = \lim_{n\to+\infty} p^n v_p(P'_n(\hat{\pi}_{K,n})) = \lim_{n\to+\infty} p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$. On déduit alors de la proposition 4.5 la non nullité de $P'(\overline{\pi}_K)$ qui montre que l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est séparable, et l'inégalité $v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}) = v_{\mathbf{E}}(P'(\overline{\pi}_K)) \leqslant \frac{1}{p-1}p^{n_0(K)}$ que l'on cherchait à établir.

5. Les anneaux parfaits

5.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ et certains de ses sous-anneaux. — Soient $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ et $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$. Par construction,

$$\widetilde{\mathbf{A}}/p\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{A}}^+/p\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \widetilde{\mathbf{E}}^+$$

et tout élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}$) s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}$), et $[x_k]$ désigne le représentant de Teichmüller de x_k.

Ces anneaux sont naturellement munis de deux topologies : la topologie forte et la topologie faible. La *topologie forte* consiste à munir $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+$) de la topologie d'anneau la moins fine rendant continue la projection $\widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}^+$), où l'on a muni $\widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$) de la topologie discrète. La topologie forte sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ ou $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ n'est donc rien d'autre que la topologie p-adique.

La *topologie faible* sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+$) est la topologie d'anneau la moins fine rendant continue la projection $\widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}^+$), où l'on a muni $\widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$) de la topologie induite par la valuation $v_{\mathbf{E}}$. De manière explicite, si $k \in \mathbf{N}$, soit $w_k : \widetilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par $w_k(x) = \inf_{i\leqslant k} v_{\mathbf{E}}(x_i)$ si $x = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{A}}$. Les propriétés suivantes de w_k sont immédiates :

(i) $w_k(x) = +\infty$ si et seulement si $x \in p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}$;
(ii) $w_k(x+y) \geqslant \inf(w_k(x), w_k(y))$ avec égalité si $w_k(x) \neq w_k(y)$;
(iii) $w_k(xy) \geqslant \inf_{i+j\leqslant k}(w_i(x) + w_j(y))$;
(iv) $w_k(\varphi(x)) = pw_k(x)$;
(v) $w_k(\sigma(x)) = w_k(x)$ si $\sigma \in \mathscr{G}_F$.

La topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ ou $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est la topologie définie par la famille de semi-valuations w_k, pour $k \in \mathbf{N}$ (i.e. une suite x_n a pour limite x si et seulement si, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $w_k(x_n - x)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$).

Proposition 5.1. — (i) *L'application $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est un homéomorphisme de $(\widetilde{\mathbf{E}})^{\mathbf{N}}$ (resp. $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{N}}$) sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^+$) pour les topologies faible et forte.*

(ii) *$\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont séparés et complets pour les topologies forte et faible.*

Par fonctorialité des vecteurs de Witt, on peut relever (de manière unique) les actions de $\mathscr{G}_F$ et φ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, ce qui permet de munir les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ d'une action de $\mathscr{G}_F$ et d'une action du Frobenius φ commutant entre elles. De manière explicite,

$$\varphi\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k^p] \quad \text{et} \quad \sigma\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[\sigma(x_k)] \text{ si } \sigma \in \mathscr{G}_F.$$

Proposition 5.2. — *φ agit continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ munis des topologies forte ou faible, et l'on a*

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p.$$

Démonstration. — La continuité de l'action de φ est immédiate et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est invariant par φ si et seulement si on a $x_k^p = x_k$, et donc $x_k \in \mathbf{F}_p$, pour tout k, c'est-à-dire si et seulement si $x \in W(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}_p$.

Remarque 5.3. — Ni $\mathscr{H}_F$ ni, a fortiori, $\mathscr{G}_F$ n'agissent discrètement sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ ou $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, ce qui implique que ni $\mathscr{H}_F$ ni $\mathscr{G}_F$ n'agissent continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}$, ou $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ si on les munit de la topologie forte. Par contre, comme $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont homéomorphes à $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{N}}$ et $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{N}}$ respectivement, $\mathscr{G}_F$ agit continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ munis de la topologie faible.

Si $[K:F] < +\infty$, soient $\widetilde{\mathbf{A}}_K = W(\widetilde{\mathbf{E}}_K)$, $\widetilde{\mathbf{A}}_K^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}_K^+)$, Par construction, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}_K/p\widetilde{\mathbf{A}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}_K \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{A}}_K^+/p\widetilde{\mathbf{A}}_K^+ = \widetilde{\mathbf{E}}_K^+.$$

Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_K^+$ sont des sous-anneaux fermés de $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ respectivement que ce soit pour la topologie forte ou ou la topologie faible. D'autre part, on déduit du (iv) de la proposition 4.10 les égalités

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{A}}_K \quad \text{et} \quad (\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{A}}_K^+.$$

Soit $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}_K = \widetilde{\mathbf{A}}_K[\frac{1}{p}]$) le corps des fractions de $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}_K$) et soient $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K^+ = \widetilde{\mathbf{A}}_K^+[\frac{1}{p}]$. Tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}^+$) s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[x_k]$, où $(x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^+$) nuls pour k assez petit. Les actions de φ et $\mathscr{G}_F$ s'étendent par $\mathbf{Q}_p$-linéarité à $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ et l'on a

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+)^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p, \quad \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{B}}_K \quad \text{et} \quad (\widetilde{\mathbf{B}}^+)^{\mathscr{H}_K} = \widetilde{\mathbf{B}}_K^+.$$

5.2. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et certains de ses sous-anneaux. — Si $r > 0$, soit

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} = \Big\{x \in \widetilde{\mathbf{A}},\ \lim_{k\to-\infty} rw_k(x) + k = +\infty\Big\} = \Big\{x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}},\ \lim_{k\to-\infty} rv_{\mathbf{E}}(x_k) + k = +\infty\Big\}.$$

Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, posons $v^{(0,r]}(x) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{k}{r} = \inf_{k\in\mathbf{N}} w_k(x) + \frac{k}{r}$.

Proposition 5.4. — *La fonction $v^{(0,r]} : \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *$v^{(0,r]}(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$;*
(ii) *$v^{(0,r]}(x+y) \geqslant \inf(v^{(0,r]}(x), v^{(0,r]}(y))$, si $x, y \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;*
(iii) *$v^{(0,r]}(xy) \geqslant v^{(0,r]}(x) + v^{(0,r]}(y)$, si $x, y \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;*
(iv) *$v^{(0,r]}(pr) = v^{(0,r]}(x) + \frac{1}{r}$ et $v^{(0,r]}([\alpha]x) = v_{\mathbf{E}}(\alpha) + v^{(0,r]}(x)$, si $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$ et si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;*
(v) *$v^{(0,r]}(\sigma(x)) = v^{(0,r]}(x)$ et $v^{(0,p^{-1}r]}(\varphi(x)) = pv^{(0,r]}(x)$ si $\sigma \in \mathscr{G}_F$ et $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.*

Démonstration. — Toutes ces propriétés sont des conséquences immédiates des propriétés de la fonction w_k.

Corollaire 5.5. — *Si $r > 0$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}$ stable sous l'action de $\mathscr{G}_F$ et φ induit un isomorphisme d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$.*

Proposition 5.6. — *$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est séparé et complet pour la topologie définie par $v^{(0,r]}$.*

Démonstration. — La séparation suit du (i) de la proposition 5.4. Maintenant, si $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ tendant vers 0, alors a_i tend vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ (muni de la topologie faible) et la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ vers une limite a vérifiant $w_k(a) \geqslant \inf_{i\in\mathbf{N}} w_k(a_i)$. Comme $\lim_{k\to+\infty} w_k(a_i) + \frac{k}{r} = +\infty$ et $\lim_{i\to+\infty}(\inf_{k\in\mathbf{N}} w_k(a_i) + \frac{k}{r}) = +\infty$, on en déduit le fait que $w_k(a) + \frac{k}{r}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, ce qui permet de conclure.

Remarque 5.7. — Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ converge et a pour somme x dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Proposition 5.8. — *Soient $r > 0$ et $C > -\infty$. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}$ tendant vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, et telle que l'on ait $v^{(0,r]}(x_n) \geqslant C$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$, quel que soit $s \in]0,r[$.*

Démonstration. — Si $x_n = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_{n,k}]$, les hypothèses se traduisent par
(i) $\lim_{n\to+\infty} v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) = +\infty$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$,
(ii) $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{r} \geqslant C$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.
On a donc, si $s \in]0,r[$,

$$\inf_{k\in\mathbf{N}} \Big(v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{s}\Big) \geqslant \inf \Big(C + k_0\frac{r-s}{rs}, \inf_{k\leqslant k_0} \big(v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{r}\big)\Big).$$

Choisissant k_0 pour rendre le second terme grand et utilisant le (i), on en tire le fait que $\inf_{k\in\mathbf{N}} \big(v_{\mathbf{E}}(x_{n,k}) + \frac{k}{s}\big)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui permet de conclure.

Lemme 5.9. — *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *x est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$;*
(ii) *$v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$ et $rv_{\mathbf{E}}(x_k) + k > 0$ si $k \geqslant 1$.*

Démonstration. — Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ et $y = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[y_k]$ sont deux éléments de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ vérifiant $xy = 1$, on a en particulier $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant -\frac{k}{r}$, $v_{\mathbf{E}}(y_k) \geqslant -\frac{k}{r}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et $x_0y_0 = 1$; on en déduit l'égalité $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$. Soit maintenant i_0 (resp. j_0) le plus grand entier i (resp. j) tel que $v_{\mathbf{E}}(x_i) = -\frac{i}{r}$ (resp. $v_{\mathbf{E}}(y_j) = -\frac{j}{r}$). On a donc $v_{\mathbf{E}}(x_iy_j) > -\frac{i_0+k_0}{r}$ si $i+j \leqslant i_0+j_0$ et $(i,j) \neq (i_0,j_0)$ et $v_{\mathbf{E}}(x_{i_0}y_{j_0}) = -\frac{i_0+k_0}{r}$, ce qui nous donne $w_{i_0+j_0}(xy) = -\frac{i_0+k_0}{r}$. Comme par ailleurs, $w_{i_0+j_0}(xy) = 0$, on obtient $i_0 = j_0 = 0$, ce qui termine la démonstration de l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Réciproquement, on peut écrire x sous la forme $[x_0](1-y)$, où $y = -\sum_{k=1}^{+\infty} p^k[x_0^{-1}x_k]$ vérifie $v^{(0,r]}(y) > 0$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n$ converge donc dans l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et x admet $[x_0^{-1}](\sum_{n=0}^{+\infty} y^n)$ comme inverse.

Proposition 5.10. — *Si $r > 0$, alors*
(i) *$\mathscr{G}_F$ agit continûment sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ muni de la topologie faible.*
(ii) *$\varphi : \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} \to \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$ est continu.*

Démonstration. — Le (ii) est une évidence et comme $v^{(0,r]}(\sigma(x)) = v^{(0,r]}(x)$, il suffit de vérifier que si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est fixé, alors $\sigma \mapsto \sigma(x)$ est continue, et on peut se contenter de vérifier la continuité en $\sigma = 1$.

Commençons par considérer le cas où $x = [\alpha]$, avec $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$. Comme $\sigma \to \sigma(\alpha)$ est continue, il en est de même de $\sigma \to [\sigma(\alpha)]$ vue comme fonction à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ muni de la topologie faible, ce qui signifie que, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $w_k([\sigma(\alpha)] - [\alpha])$ tend vers $+\infty$ quand σ tend vers 1. Comme par ailleurs, on a $w_k([\sigma(\alpha)] - [\alpha]) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\alpha)$, on en déduit le fait que $v^{(0,r]}([\sigma(\alpha)] - [\alpha])$ tend vers $+\infty$ quand σ tend vers 1.

La cas général s'en déduit en remarquant que, si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, la fonction $\sigma \to \sigma(x)$ est somme de la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty}(\sigma \to p^k[\sigma(x_k)])$ qui converge uniformément dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.

Lemme 5.11. — *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$, il existe $s \in]0, r[$ tel que x soit une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$.*

Démonstration. — Comme $v_E(x_k) + \frac{k}{r}$ tend vers $+\infty$, il existe $C \geqslant 0$ tel que l'on ait $v_E(x_k) + \frac{k}{r} \geqslant -C$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Il suffit alors de choisir s de telle sorte que l'on ait $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} > C$ pour que $v_E(x_k) + \frac{k}{s} > v_E(x_k) + \frac{k}{r} + kC > 0$ si $k \geqslant 1$, et donc que x soit une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$ d'après le lemme 5.9. Ceci permet de conclure.

Si $r > 0$, soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[\frac{1}{p}]$; c'est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}$. Finalement, soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ la limite inductive (ou réunion) des $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$. On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ de la topologie de la limite inductive, chaque $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \cup_{n \in \mathbf{N}} p^{-n} \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ étant lui-même muni de la topologie de la limite inductive.

Proposition 5.12. — *$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable sous les actions de $\mathscr{G}_F$ et φ ; de plus, ces actions sont continues.*

Démonstration. — La seule chose qui ne résulte pas immédiatement de la proposition 5.10 est le fait que tout élément non nul de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ est inversible. Soit donc $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ avec $x_{k_0} \neq 0$. On peut écrire x sous la forme $p^{k_0}[x_{k_0}]y$ avec $y = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[y_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $y_0 = 1$. D'après le lemme 5.11, il existe $s \in]0, r[$ tel que y soit inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,s]}$, ce qui permet de conclure.

Si K est une extension finie de F, on définit un sous-corps $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ et des sous-anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$, pour $r > 0$ de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger}$ par

$$\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_K \quad \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_K \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_K.$$

On a aussi $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^{\mathscr{H}_K}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]})^{\mathscr{H}_K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]})^{\mathscr{H}_K}$.

5.3. Les anneaux $\mathbf{B}_{\max}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$. — Soit $\alpha \mapsto p^{\alpha}$ un morphisme de groupes de $\mathbf{Q}$ (muni de l'addition) dans $\overline{F}^*$ (muni de la multiplication) tel que $p^1 = p$. Soit $\widetilde{p} = (p, p^{1/p}, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$.

On note $\mathbf{A}_{\max}$ le séparé complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{[\widetilde{p}]}{p}]$ pour la topologie p-adique et on pose $\mathbf{B}_{\max}^+ = \mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. Le Frobenius φ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$ et $\mathbf{B}_{\max}^+$; il est injectif mais pas bijectif.

On pose $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$. Par construction, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ est un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\max}^+$ sur lequel φ est bijectif. On peut aussi l'obtenir en complétant $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie de Fréchet définie par la famille de semi-valuations $v^{[r,+\infty]}$, pour $r \in]0,1]$, avec $v^{[r,+\infty]}(x) = \inf_{k \in \mathbf{Z}}(\frac{k}{r} + v_E(x_k))$ si $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$. (En effet, si $k \in \mathbf{Z}$, alors $v^{[1,+\infty]}(x) \geqslant k$ si et seulement si $x \in p^k \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{[\widetilde{p}]}{p}]$, et donc $\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la semi-valuation $v^{[p^{-n},+\infty]}$.)

5.4. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et ses sous-anneaux. — On étend $v^{(0,r]}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[\frac{1}{p}]$ en posant $v^{(0,r]}(x) = \inf_{k\geqslant k_0}(v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{k}{r})$ si $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k]$. On a alors $v^{(0,r]}(p^k x) = v^{(0,r]}(x) + \frac{k}{r}$ si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et $k \in \mathbf{Z}$. Si $0 < s \leqslant r$ et $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, soit $v^{[s,r]}(x) = \min(v^{(0,s]}(x), v^{(0,r]}(x))$. Remarquons que l'on a $v^{[s,r]}(x) = v^{(0,r]}(x)$, quel que soit $s \in]0, r[$, si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, mais il n'y a pas de formule simple reliant $v^{[s,r]}(p^k x)$ à $v^{[s,r]}(x)$.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ pour la topologie (de Fréchet) induite par la famille de semi-valuations $v^{[s,r]}$, pour $0 < s \leqslant r$. Comme on a $v^{[s_1,r]}(x) \geqslant v^{[s_2,r]}(x)$ si $r \geqslant s_1 \geqslant s_2 > 0$, il suffit de prendre une suite s_n tendant vers 0 au lieu de tout $s \in]0, r[$ pour définir la topologie de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$; en particulier, cette topologie est définie par une famille dénombrable de semi-valuations, ce qui implique que $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ est métrisable ; on peut donc définir sa topologie par les suites convergentes et une suite x_n converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ si et seulement, quel que soit $s \in]0, r[$, la suite $v^{[s,r]}(x_{n+1} - x_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ a été étudié en détail par Berger [**4**, §2] qui montre, en particulier les résultats suivants :

Proposition 5.13. — (i) *$\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ contient $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ peut s'écrire comme somme d'un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ et d'un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$; une telle écriture est unique à addition près d'un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{B}}^{+}$.*

(ii) *Si K est une extension finie de F, alors $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})^{\mathscr{H}_K}$.*

5.5. Le logarithme et l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$

Lemme 5.14. — (i) *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x_0 - 1) > 0$, alors la série $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$.*

(ii) *Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x_0 - 1) > 0$, alors la série $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.*

Démonstration. — Nous ne démontrerons que le (ii), le (i) se démontrant exactement de la même manière. Soit $\alpha = v^{(0,r]}(x-1)$. Les hypothèses mises sur x se traduisent par l'inégalité $\alpha > 0$. Par ailleurs, comme $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, on a $v^{[s,r]}(x-1) = \alpha$ quel que soit $s \in]0, r[$, et donc

$$v^{[s,r]}\Big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\Big) \geqslant v^{[s,r]}\Big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big) + n v^{[s,r]}(x-1) = n\alpha - \frac{v_p(n)}{s}$$

tend vers $+\infty$, quel que soit $s \in]0, r[$, quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de conclure.

Par exemple, $t = \log[\varepsilon]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ sur lequel $\mathscr{G}_F$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique. On aimerait bien étendre cette application à $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^*$, mais pour cela, on est forcé d'étendre un peu l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ en rajoutant un analogue p-adique u de $\log p$.

Si $\sigma \in \mathscr{G}_F$, il existe $c(\sigma) \in \mathbf{Z}_p$ tel que l'on ait $\sigma(\widetilde{p}) = \widetilde{p}\varepsilon^{c(\sigma)}$ ($\sigma \mapsto c(\sigma)$ est le cocycle à valeurs dans $\mathbf{Z}_p(1)$ associé à p par la théorie de Kummer). Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[u]$. On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ d'un opérateur « de monodromie » $N = -\frac{d}{du}$ et d'une action de φ (resp. $\mathscr{G}_F$), compatible avec celle existant sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$, en posant $\varphi(u) = pu$ (resp. $\sigma(u) = u + c(\sigma)t$). Les actions de φ et N commutent à celle de $\mathscr{G}_F$ et on a $N\varphi = p\varphi N$.

Proposition 5.15. — *Il existe une unique application* $\log : (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^{*} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\log xy = \log x + \log y$;

(ii) $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ *si la série converge* ;

(iii) $\log[a] = 0$ *si* $a \in k_{\overline{F}}$;

(iv) $\log p = 0$ *et* $\log[\widetilde{p}] = u$.

De plus, on a $\varphi(\log x) = \log \varphi(x)$ *et* $\sigma(\log x) = \log \sigma(x)$ *si* $\sigma \in \mathscr{G}_F$. *Finalement, si* $x = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k[x_k] \in (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^{*}$, *avec* $x_{k_0} \neq 0$, *alors* $N(\log x) = -v_{\mathbf{E}}(x_{k_0})$.

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}$, on note $\widetilde{p}^{\alpha}$ l'élément $(p^{\alpha}, p^{\alpha/p}, \dots)$ de $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$. Tout élément de $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^{*}$ peut alors s'écrire de manière unique sous la forme $x = p^k[\widetilde{p}^{\alpha}][a]y$, où $k \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, $a \in \overline{k}_F$, et $y = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[y_k]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(y_0 - 1) > 0$. D'après le lemme 5.11, il existe donc $r > 0$ tel que y soit une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, ce qui permet de définir $\log x$ par la formule $\log x = \alpha u + \log y$. Le reste de la proposition est plus ou moins immédiat.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}$ le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}[u]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$; il est stable par N, φ et $\mathscr{G}_F$, et on a $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log} = \cap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{st}})$, si $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{st}}$ désigne l'un des anneaux $\mathbf{B}^{+}_{\max}[u]$ ou $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}[u]$.

Proposition 5.16. — *Si* K *est une extension finie de* F, *alors* $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log})^{\mathscr{G}_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log})^{\mathscr{G}_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}})^{\mathscr{G}_K} = K \cap F^{\mathrm{nr}}$.

Démonstration. — L'égalité $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log})^{\mathscr{G}_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log})^{\mathscr{G}_K}$ correspond au cas particulier $V = \mathbf{Q}_p$ de la proposition 3.4 de [**4**], et l'égalité $(\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log})^{\mathscr{G}_K} = K \cap F^{\mathrm{nr}}$ se déduit du résultat correspondant pour $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{st}}$ (cf. [**17**] ou [**11**, rem. 5.14]).

5.6. L'anneau $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$

Proposition 5.17 ([**14**]). — *L'application* $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^{+} \to \mathscr{O}_C$, *donnée par* $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n] \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$, *est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau est un idéal principal engendré par* $\xi = [\tilde{p}] - p$ *ou encore par* $\omega = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}$.

On prolonge θ en un morphisme de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ sur C. Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{B}_m$ l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}/\xi^m\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ que l'on munit d'une structure d'anneau de Banach p-adique en prenant l'image de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ comme anneau d'entiers. On a en particulier $\mathbf{B}_1 = C$. On note $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ l'anneau $\varprojlim \mathbf{B}_m$ que l'on munit de la topologie (de Fréchet) de la limite projective. Par construction, θ s'étend en un morphisme continu de $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ sur $\mathbf{B}_1 = C$. L'action de $\mathscr{G}_F$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ s'etend par continuité en une action continue de $\mathscr{G}_F$ sur $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$. La série définissant $t = \log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi^n$ converge dans $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ et t est un générateur de $\ker\theta$

Lemme 5.18. — *Si* $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ *converge dans* $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$;

(ii) *la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}$ *converge dans* C ;

(iii) $k + v_{\mathbf{E}}(x_k)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* k *tend vers* $+\infty$;

(iv) $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$.

Démonstration. — Les propriétés (iii) et (iv) sont équivalentes par définition de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$ et les propriétés (ii) et (iii) sont équivalentes par définition de $v_{\mathbf{E}}$. L'implication (i)⇒(ii) suit de la continuité de $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to C$; il ne reste donc plus que (iii)⇒(i) à prouver. Si $\lim_{k\to+\infty} k+v_{\mathbf{E}}(x_k) = +\infty$, la partie entière a_k de $k+v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et on peut écrire x_k sous la forme $\tilde{p}^{-k+a_k}y_k$, avec $y_k \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. On a alors

$$p^k[x_k] = (\frac{p}{[\tilde{p}]})^k[\tilde{p}]^{a_k}[y_k] = (1+\frac{\xi}{p})^{-k}(p+\xi)^{a_k}[y_k].$$

Mais $(1+\frac{\xi}{p})^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-k}{n}p^{-n}\xi^n$ est dans l'image de $p^{-m}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo ξ^{m+1} et $(p+\xi)^{a_k} = \sum_{n=0}^{a_k}\binom{a_k}{n}p^{a_k-n}\xi^n$ est dans l'image de $p^{a_k-m}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo ξ^{m+1}. On en déduit le fait que $p^k[x_k]$ est dans l'image de $p^{a_k-2m}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo ξ^{m+1} et donc tend vers 0 dans $\mathbf{B}_m$. Comme ceci est vrai quel que soit $m \in \mathbf{N}$, cela implique la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui permet de conclure.

Remarque 5.19. — Le morphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ défini ci-dessus s'étend par continuité en un morphisme de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De plus, la série $\log\frac{[\tilde{p}]}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big(\frac{[\tilde{p}]}{p}-1\big)^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui nous fournit un morphisme naturel d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}[u]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_F$. Ce morphisme étant injectif (cf. [**4**, prop. 2.25]), nous considérerons $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}[u]$ comme un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sans plus de commentaires.

6. Les anneaux imparfaits

6.1. Les anneaux $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$. — Soit $\pi = [\varepsilon]-1$. Comme les actions de φ et $\mathscr{G}_F$ sur π sont données par les formules

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 \quad \text{et} \quad g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1,$$

l'anneau $\mathbf{A}_F^+ = \mathscr{O}_F[[\pi]]$ est stable par φ et $\mathscr{G}_F$.

Soit $\mathbf{A}_F = \mathscr{O}_F[[\pi]]\{\frac{1}{\pi}\}$ l'adhérence de $\mathscr{O}_F[[\pi]][\frac{1}{\pi}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ pour la topologie forte (ou faible, cela revient au même car $\mathscr{O}_F[[\pi]]$ est complet pour les deux). C'est l'anneau des séries de Laurent de la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\pi^k$, où $a_k \in \mathscr{O}_F$ et $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$ et on a $\mathbf{A}_F/p\mathbf{A}_F = \mathbf{E}_F$. Soit $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[\frac{1}{p}] \subset \widetilde{\mathbf{B}}$ le corps des fractions de $\mathbf{A}_F$; les formules ci-dessus montrent que $\mathbf{B}_F$ est stable par $\mathscr{G}_F$ et φ.

Si $[K:F] < +\infty$, l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est finie et séparable et, comme $\widetilde{\mathbf{B}}$ est absolument non ramifié et a comme corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$ qui contient $\mathbf{E}_K$, il existe une unique extension (automatiquement non ramifiée) $\mathbf{B}_K$ de $\mathbf{B}_F$ de corps résiduel $\mathbf{E}_K$ contenue dans $\widetilde{\mathbf{B}}$. On note $\mathbf{A}_K$ l'anneau de ses entiers.

Comme $\mathbf{E} = \cup_{[K:F]<+\infty}\mathbf{E}_K$ est la clôture séparable de $\mathbf{E}_F$, l'extension maximale non ramifiée $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ de $\mathbf{B}_F$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ est aussi la réunion des $\mathbf{B}_K$, où K parcourt les extensions finies de F. On note $\mathbf{B}$ l'adhérence de $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ pour la topologie forte ; son anneau des entiers $\mathbf{A}$ est donc le complété de l'anneau des entiers de $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ pour la topologie p-adique.

Proposition 6.1. — (i) *Si K est une extension finie de F, alors $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ sont stables par φ.*

(ii) *Les sous-anneaux $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}$ sont stables sous l'action de $\mathscr{G}_F$ et φ.*

(iii) *$\mathscr{H}_F$ agit continuement sur $\mathbf{B}$ muni de la topologie forte.*

(iv) *Si K est une extension finie de F, on a $\mathbf{B}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_K$ et $\mathbf{A}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{A}_K$.*

Démonstration. — (i) Si $\overline{x} \in \mathbf{E}_K^+$ est un élément primitif de l'extension séparable $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$, il en est de même de $\overline{x}^p$. Maintenant, si $x \in \mathbf{A}_K$ a pour réduction $\overline{x}$ modulo p et si $P \in \mathbf{A}_F[X]$ est le polynôme minimal de x sur $\mathbf{B}_F$, le polynôme minimal de $\varphi(x)$ sur $\mathbf{B}_F$ est le polynôme $\varphi(P) \in \mathbf{A}_F[X]$ dont la réduction modulo p est le polynôme minimal de $\overline{x}^p$. Il résulte alors du lemme de Hensel que l'on a $\varphi(x) \in \mathbf{B}_K$, ce qui montre que $\mathbf{B}_K$ (et donc aussi $\mathbf{A}_K$) est stable par φ.

(ii) La stabilité de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ par φ suit, par complétion, de celle de $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ pour toute extension finie K de F. D'autre part, comme $g \in \mathscr{G}_F$ est un isomorphisme de $\mathbf{B}_F$, l'unicité de $\mathbf{B}_K$ montre que g induit un isomorphisme de $\mathbf{B}_K$ sur $\mathbf{B}_{g(K)}$, ce qui montre que $\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}$ est stable par $\mathscr{G}_F$; il en est donc de même de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ par complétion.

(iii) On a $\mathrm{Gal}(\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}}/\mathbf{B}_F) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_F) = \mathscr{H}_F$, ce qui montre que $\mathscr{H}_F$ agit continûment sur $\mathbf{E} = \mathbf{A}/p\mathbf{A}$ muni de la topologie discrète et donc continûment sur $\mathbf{A}$ (et sur $\mathbf{B}$) muni de la topologie forte (p-adique).

(iv) Si K est une extension finie de F, on a $\mathbf{E}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{E}_K$ et donc $(\mathbf{B}_F^{\mathrm{nr}})^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_K$, ce qui permet de déduire l'identité $\mathbf{B}^{\mathscr{H}_K} = \mathbf{B}_K$ du théorème d'Ax-Sen-Tate.

6.2. Les éléments π, π_K, π_n et $\pi_{K,n}$

Si K est une extension non ramifiée de F, on a $\mathbf{A}_K = \mathscr{O}_K \otimes_{\mathscr{O}_F} \mathbf{A}_F$. Dans le cas général, soit F' l'extension non ramifiée maximale de F contenue dans K_∞. Soit $\overline{\pi}_K$ une uniformisante de $\mathbf{E}_K$, soit $\overline{P}_K$ le polynôme minimal de $\overline{\pi}_K$ sur $\mathbf{E}_{F'}$ et soit $P_K \in \mathbf{A}_{F'}^+[X]$ dont la réduction modulo p est $\overline{P}_K$. D'après le lemme de Hensel, P_K a une unique racine π_K dans $\mathbf{A}_K$ dont la réduction modulo p est $\overline{\pi}_K$ et $\mathbf{A}_K$ est un $\mathbf{A}_{F'}$-module libre dont $(1, \pi_K, \dots, \pi_K^{e_K-1})$ est une base.

Dans toute la suite de ce texte, on se fixe pour chaque extension finie K de F un élément π_K construit comme ci-dessus (en posant $\pi_K = \pi$ si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée).

Lemme 6.2. — *$w_0\big(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\big) = 0$ et $w_k\big(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\big) \geqslant -k$, si $k \geqslant 1$.*

Démonstration. — On a $\pi = [\varepsilon] - 1 = [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots$, où α_i est un polynôme en $\varepsilon^{p^{-i}} - 1$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et sans terme constant, ce qui implique $v_{\mathbf{E}}(\alpha_i) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\varepsilon^{p^{-i}} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{i-1}}$. Écrivant alors π sous la forme $\pi = [\overline{\pi}](1 + p[a_1] + p^2[a_2] + \cdots)$, on a $v_{\mathbf{E}}(a_1) = v_{\mathbf{E}}(\alpha_1) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geqslant -1$ et $v_{\mathbf{E}}(a_i) \geqslant -v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geqslant -i$ si $i \geqslant 2$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 6.3. — *Si $r < 1$, alors $\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\log \pi \in \frac{p}{p-1} u + \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.*

Lemme 6.4. — *$w_k(\pi_K) \geqslant -(2k-1) v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$ quel que soit $k \geqslant 1$.*

Démonstration. — Si $\pi_K = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$, montrons, par récurrence sur k, que l'on a $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant -(2k-1) v_{\mathbf{E}}(P_K'(\overline{\pi}_K))$. Soit $z_k = \sum_{n=0}^{k} p^n [x_n]$. Par construction, $P_K(z_k) \in p^{k+1} \mathbf{A}_K$; d'autre part, comme P_K est à coefficients dans $\mathbf{A}_F^+$, l'hypothèse de récurrence implique que, si $n \geqslant k+1$, alors

$$\begin{aligned} w_n(P_K(z_k)) &\geqslant \inf_{1\leqslant i_j\leqslant k, i_1+\cdots+i_r=n} \sum_{j=1}^{r} -(2i_j-1)v_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K)) \\ &= -\sup_{1\leqslant i_j\leqslant k, i_1+\cdots+i_r=n} (2n-r)v_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K)) \geqslant -(2n-2)v_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K)), \end{aligned}$$

car $r \geqslant 2$ puisque $n \geqslant k+1$ et les $i_j \leqslant k$. En particulier, $w_{k+1}(P_K(z_k)) \geqslant -2kv_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K))$ et, si on note y_{k+1} l'image de $p^{-k-1}P_K(z_k)$ modulo p, on a $v_{\mathbf{E}}(y_{k+1}) \geqslant -2kv_{\mathbf{E}}(P'_K(\overline{\pi}_K))$. La congruence $P_K(z_{k+1}) \in p^{k+2}\mathbf{A}_K$ nous fournit alors la formule $y_{k+1} + P'_K(\overline{\pi}_K)x_{k+1} = 0$, qui permet de montrer l'inégalité voulue pour $k+1$, et permet de conclure.

Posons $r_K = \begin{cases} (2v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}))^{-1} & \text{si } \mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F \text{ est ramifiée,} \\ 1 & \text{si } \mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F \text{ est non ramifiée,} \end{cases}$

Lemme 6.5. — *Si $r < r_K$, alors $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et*

(i) $\frac{\pi_K}{[\overline{\pi}_K]}$ *est une unité de l'anneau des entiers de* $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ *;*

(ii) $\frac{P'_K(\pi_K)}{[P'_K(\overline{\pi}_K)]}$ *est une unité de l'anneau des entiers de* $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$.

Démonstration. — Le (i) a déjà été démontré au corollaire 6.3 dans le cas non ramifié et le cas ramifié suit du lemme 6.4.

On déduit du lemme 6.4 l'inégalité $w_k(P'_K(\pi_K)) \geqslant -(2k-1)v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$ si $k \geqslant 1$. On a donc

$$w_0\Big(\frac{P'_K(\pi_K)}{[P'_K(\overline{\pi}_K)]}\Big) = 0 \quad \text{et} \quad w_k\Big(\frac{P'_K(\pi_K)}{[P'_K(\overline{\pi}_K)]}\Big) \geqslant -\frac{k}{r_K} \text{ si } k \geqslant 1,$$

ce qui permet de démontrer le (ii) et termine la démonstration.

Si $n \in \mathbf{N}$, on pose $\pi_n = \varphi^{-n}(\pi)$ et $\pi_{K,n} = \varphi^{-n}(\pi_K)$.

Proposition 6.6. — *Si $n \geqslant n_0(K)+1$, alors $\theta(\pi_{K,n})$ est une uniformisante de K_n.*

Démonstration. — Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée, on a $K_n = F'_n$ si $n \geqslant n_0(K)$, et $\theta(\pi_{K,n}) = \theta(\pi_n) = \varepsilon^{(n)} - 1$ est une uniformisante de K_n.

Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est ramifiée, notons δ_K la quantité $v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$. On a $\pi_{K,n} = [\pi_K^{p^{-n}}] + \sum_{k=1}^{+\infty} p^k[\alpha_k]$, avec $v_{\mathbf{E}}(\alpha_k) \geqslant -p^{-n}(2k-1)\delta_K$. Comme $p^{-n}\delta_K < \frac{1}{p(p-1)}$ d'après la proposition 4.12, la suite de terme général $k - p^{-n}(2k-1)\delta_K$ est croissante pour $k \geqslant 1$, de minimum $1 - p^{-n}\delta_K > 1 - \frac{1}{p(p-1)} \geqslant \frac{1}{p}$, et tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Ceci implique que la série définissant $\theta(\pi_{K,n})$ converge dans $\mathscr{O}_C$ vers un élément ayant même image $\overline{\pi}_{K,n}$ que $\pi_K^{p^{-n}}$ dans $\mathscr{O}_C/\mathfrak{a}$. D'après la proposition 4.12, il existe une uniformisante $\hat{\pi}_{K,n}$ de $\mathscr{O}_{K,n}$ ayant aussi $\overline{\pi}_{K,n}$ comme image modulo $\mathfrak{a}$.

Soit $P_{K,n} \in F_n[X]$ l'image de $\varphi^{-n}(P_K)$ par θ. Alors $P_{K,n}$ admet $\theta(\pi_{K,n})$ pour racine, et, comme $v_p(\theta(\pi_{K,n}) - \hat{\pi}_{K,n}) \geqslant \frac{1}{p}$, un développement de Taylor en $\theta(\pi_{K,n})$ nous fournit l'inégalité $v_p(P_{K,n}(\hat{\pi}_{K,n})) \geqslant \inf(\frac{1}{p} + v_p(P'_{K,n}(\theta(\pi_{K,n}))), \frac{2}{p})$. Par ailleurs, on a $p^{-n}v_{\mathbf{E}}(P'_K(\pi_K)) = p^{-n}\delta_K < \frac{1}{p(p-1)} \leqslant \frac{1}{p}$, et donc $v_p(P'_{K,n}(\hat{\pi}_{K,n})) = p^{-n}\delta_K < \frac{1}{p}$. On déduit alors du lemme de Hensel l'existence d'une unique solution x dans K_n de l'équation $P_{K,n}(x) = 0$ vérifiant $v_p(x - \hat{\pi}_{K,n}) > v_p(P'_{K,n}(\hat{\pi}_{K,n}))$, et cette solution est donc $\theta(\pi_{K,n})$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 6.7. — *Si $n \geqslant n_0(K)+1$, alors $\pi_{K,n} \in K_n[[t]]$.*

Démonstration. — Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée, on a $\pi_K = \pi$ et
$$\pi_{K,n} = \pi_n = \varepsilon^{(n)} \exp(p^{-n}t) - 1 \in F_n[[t]] \subset K_n[[t]].$$
Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est ramifiée, alors $\pi_{K,n}$ est une racine du polynôme $\varphi^{-n}(P_K)$ qui est à coefficients dans $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_{F'}^+) \subset F_n'[[t]]$ d'après ce qui précède, et comme $\theta(\pi_{K,n})$ est une racine simple de $\theta(\varphi^{-n}(P_K))$ appartenant à K_n, le lemme de Hensel (dans $K_n((t))$) montre que $\varphi^{-n}(P_K)$ a une unique solution dans $K_n[[t]]$ dont l'image par θ est $\theta(\pi_{K,n})$; ceci permet de conclure.

6.3. Le corps $\mathbf{B}^\dagger$ et ses sous-anneaux

On définit des sous-anneaux $\mathbf{A}^{(0,r]}$, $\mathbf{B}^{(0,r]}$, si $r>0$ et $\mathbf{B}^\dagger$ de $\mathbf{B}$ en posant
$$\mathbf{A}^{(0,r]} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}, \quad \mathbf{B}^{(0,r]} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger,$$
anneaux que l'on munit des topologies induites par les topologies respectives de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$. Si on utilise le fait que $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) est un sous-anneau (resp. un sous-corps) de $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}$), stable par $\mathscr{G}_F$ et φ, on obtient la proposition suivante.

Proposition 6.8. — (i) *$\mathbf{B}^\dagger$ est un corps stable par $\mathscr{G}_F$ et φ.*

(ii) *Si $r>0$, les anneaux $\mathbf{A}^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}^{(0,r]}$ sont stables par $\mathscr{G}_F$ et $x \in \mathbf{A}^{(0,r]}$ (resp. $x \in \mathbf{B}^{(0,r]}$) si et seulement si $\varphi(x) \in \mathbf{A}^{(0,p^{-1}r]}$ (resp. $\varphi(x) \in \mathbf{B}^{(0,p^{-1}r]}$),*

Si K est une extension finie de F, on définit des anneaux $\mathbf{A}_K^{(0,r]} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} = (\mathbf{A}^{(0,r]})^{\mathscr{H}_K}$, si $r>0$ et $\mathbf{B}_K^\dagger = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^{\mathscr{H}_K}$.

Soit $f_i = \pi_K^{i-1}$ si $1 \leqslant i \leqslant e_{K_\infty}$. Les f_i forment une base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_{F'}$ et on note $(f_i^*)_{1\leqslant i\leqslant e_{K_\infty}}$ la base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_{F'}$ duale de $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant e_{K_\infty}}$ pour la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto T_{K/F'}(xy) = \sum_{\sigma\in\mathscr{H}_{F'}/\mathscr{H}_K} \sigma(xy)$.

Lemme 6.9. — *Si $1 \leqslant i \leqslant e_{K_\infty}$, alors $f_i^* \in P_K'(\pi_K)^{-1}\mathbf{A}_{F'}^+[\pi_K]$.*

Démonstration. — On a $T_{K/F'}(P_K'(\pi_K)^{-1}\pi_K^j) = 0$ (resp. $T_{K/F'}(P_K'(\pi_K)^{-1}\pi_K^j) = 1$) si $j \leqslant e_{K_\infty}-2$ (resp. si $j = e_{K_\infty}-1$). Comme par ailleurs π_K^j est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{A}_{F'}^+$ en les π_K^j, pour $0 \leqslant j \leqslant e_{K_\infty}-1$, ceci permet de montrer que f_i^* est de la forme $P_K'(\pi_K)^{-1}Q_i(\pi_K)$, où $Q_i \in \mathbf{A}_{F'}^+[X]$ est unitaire de degré $e_{K_\infty}-1-i$.

Corollaire 6.10. — *Si $r < r_K$, alors $f_i^* \in \mathbf{A}^{(0,r]}$ et $v^{(0,r]}(f_i^*) \geqslant -v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent et du lemme 6.5.

Corollaire 6.11. — (i) *$\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ est un $\mathbf{A}_F^{(0,r]}$-module libre de rang $[\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_F]$, si $r < r_K$.*

(ii) *$\mathbf{B}_K^\dagger$ est une extension de degré $[\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_F]$ de $\mathbf{B}_F^\dagger$.*

Démonstration. — Si les e_i, pour $1 \leqslant i \leqslant f_{K_\infty}$, forment une base de $\mathscr{O}_{F'}$ sur $\mathscr{O}_F$, alors les $e_i f_j'$, pour $1 \leqslant i \leqslant f_{K_\infty}$ et $1 \leqslant j \leqslant e_{K_\infty}$, forment une base de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ sur $\mathbf{A}_F^{(0,r]}$ et de $\mathbf{B}_K^\dagger$ sur $\mathbf{B}_F^\dagger$ puisque l'on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{j=1}^{e_{K_\infty}} T_{K/F'}(\pi_K^{j-1}x) f_j^*$, et décomposer $T_{K/F'}(\pi_K^{j-1}x)$ dans la base des e_i, $1 \leqslant i \leqslant f_{K_\infty}$.

7. Anneaux imparfaits et séries de Laurent

7.1. L'anneau $\mathbf{A}_K$. — Il résulte de la proposition 4.10 que tout élément de $\mathbf{E}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \overline{\pi}_K^k$, où les a_k sont des éléments de $k_{F'}$. En relevant en caractéristique 0, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 7.1. — *Tout élément de $\mathbf{A}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_{F'}$ tendant vers 0 quand k tend vers $-\infty$;*

Démonstration. — Soit $s : \mathbf{E}_K \to \mathbf{A}_K$ la section de la réduction $x \mapsto \overline{x}$ modulo p, donnée par la formule

$$s\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \overline{\pi}_K^k\Big) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} [a_k]\pi_K^k.$$

Si $x \in \mathbf{A}_K$, on définit par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{A}_K$ en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = p^{-1}(x_n - s(\overline{x}_n))$. On a alors $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n s(\overline{x}_n)$.

7.2. L'anneau $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$

Lemme 7.2. — *Si $x \in \mathbf{E}_K$ et $0 < r < r_K$, alors $s(x) \in \mathbf{A}^{(0,r]}$ et $v^{(0,r]}(s(x)) = v_{\mathbf{E}}(x)$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du (i) du lemme 6.5.

Lemme 7.3. — *Si $x \in \mathbf{A}_K$ et $k \in \mathbf{N}$, alors $w_k(\frac{x-s(\overline{x})}{p}) \geqslant \inf(w_{k+1}(x), w_0(x) - \frac{k+1}{r_K})$.*

Démonstration. — On a $w_{k+1}(x - s(\overline{x})) \geqslant \inf(w_{k+1}(x), v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) - \frac{k+1}{r_K})$, d'après le lemme précédent, et le lemme suit de ce que $w_0(x) = v_{\mathbf{E}}(\overline{x})$ et $w_k(x) = w_{k+1}(px)$.

Si $x \in \mathbf{A}_K$, définissons par récurrence, une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{A}_K$ en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \frac{x_n - s(\overline{x}_n)}{p}$.

Lemme 7.4. — *Si $n \in \mathbf{N}$, alors $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}_n) \geqslant \inf_{0\leqslant i\leqslant n}(w_i(x) - \frac{n-i}{r_K})$.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, on a $w_k(x_{n+1}) \geqslant \inf(w_{k+1}(x_n), w_0(x_n) - \frac{k+1}{r_K})$. Une récurrence immédiate (sur n) permet alors de montrer que l'on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$w_k(x_n) \geqslant \inf\Big(w_{k+n}(x), \inf_{0\leqslant i\leqslant n-1} w_i(x) - \frac{k+n-i}{r_K}\Big).$$

Le lemme correspond à $k = 0$.

Si $r > 0$ et si L est une extension finie de F, notons $\mathscr{A}_L^{(0,r]}$ l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ telles que $v_p(a_k) + kr$ tende vers $+\infty$ quand k tend vers $-\infty$. (on peut aussi voir $\mathscr{A}_L^{(0,r]}$ comme un réseau de l'anneau des fonctions analytiques bornées sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant r$). Si $f \in \mathscr{A}_L^{(0,r]}$, soit $v^{(r)}(f) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k) + kr$; l'application $v^{(r)}$ est une valuation sur $\mathscr{A}_L^{(0,r]}$ pour laquelle cet anneau est complet (exercice facile).

Proposition 7.5. — (i) *Si $r < r_K$, l'application $f \mapsto f(\pi_K)$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques de $\mathscr{A}_{F'}^{(0,rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)]}$ sur $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$, et on a $v^{(0,r]}(f(\pi_K)) = \frac{1}{r}v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(f)$.*

(ii) *L'application $f \mapsto f(\pi_K)$ est un isomorphisme sur $\mathbf{B}_K^{(0,r]}$, de l'anneau des fonctions analytiques bornées sur la couronne $0 < v_p(T) \leqslant r$, à coefficients dans F'.*

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence directe du (i). Soit $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k\in\mathscr{A}_{F'}^{(0,rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)]}$. On peut, d'après le lemme 6.5, écrire $a_k\pi_K^k$ sous la forme $p^{v_p(a_k)}[\overline{\pi}_K^k]u$, où u est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$. Donc $v^{(0,r]}(a_k\pi_K^k)=kv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)+\frac{v_p(a_k)}{r}$, ce qui permet de montrer que la série définissant $f(\pi_K)$ converge dans $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et que $v^{(0,r]}(f(\pi_K))\geqslant\frac{1}{r}v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(f)$.

Réciproquement, soit $x\in\mathbf{A}_K^{(0,r]}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite construite à partir de x comme au lemme 7.4, et soit f_n définie par $f_n(\pi_K)=s(\overline{x}_n)$, de telle sorte que $x=\sum_{n\in\mathbf{N}}p^nf_n(\pi_K)$. Alors $f_n\in T^{a_n}\mathscr{O}_{F'}[[T]]$, où $a_n=\frac{v_{\mathbf{E}}(\overline{x}_n)}{v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)}$ est, d'après le lemme 7.4, supérieur ou égal à $\frac{1}{v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)}\inf_{i\leqslant n}(w_i(x)+\frac{i-n}{r_K})$. On en déduit la minoration

$$v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(p^nf_n)\geqslant n+a_nrv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)\geqslant r\inf_{i\leqslant n}\Big(\big(w_i(x)+\frac{i}{r}\big)+(n-i)\big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_K}\big)\Big).$$

Comme $w_i(x)+\frac{i}{r}\to+\infty$, et $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_K}>0$, cela implique que $v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(p^nf_n)\to+\infty$, et comme $w_i(x)+\frac{i}{r}\geqslant v^{(0,r]}(x)$, pour tout i, on a $v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(p^nf_n)\geqslant rv^{(0,r]}(x)$, pour tout n. On en déduit la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}}p^nf_n$ dans $\mathscr{A}_{F'}^{(0,rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)]}$ et, si f désigne la somme de cette série, la minoration $v^{(rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K))}(f)\geqslant rv^{(0,r]}(x)$. Ceci permet de conclure.

7.3. L'anneau $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$. — Ce n$^{\mathrm{o}}$ est adapté de [**4**, n$^{\mathrm{o}}$ 4.1 et n$^{\mathrm{o}}$ 4.5]. On définit l'anneau $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ comme l'adhérence de $\mathbf{B}_K^{(0,r]}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$; c'est aussi le complété de $\mathbf{B}_K^{(0,r]}$ pour la famille de semi-valuations $v^{[s,r]}$, $s\in]0,r[$ et la proposition 7.5 se traduit de la manière suivante.

Proposition 7.6. — *Si $r<r_K$, l'application $f\mapsto f(\pi_K)$ induit un isomorphisme d'anneaux de Fréchet de l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $0<v_p(T)\leqslant rv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)$ « à coefficients dans F' » sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$.*

Lemme 7.7. — *Soit $q=\pi^{-1}\varphi(\pi)$. Si $r<1$, alors $v^{(0,r]}(\frac{q}{p}-1)=\inf(\frac{p}{p-1},p-\frac{1}{r})$.*

Démonstration. — $\frac{q}{p}-1=\sum_{k=2}^{p}p^{-1}\binom{p}{k}\pi^{k-1}$, ce qui permet d'utiliser la proposition 7.5 pour obtenir

$$v^{(0,r]}\Big(\frac{q}{p}-1\Big)=\frac{1}{r}\Big(\inf_{2\leqslant k\leqslant p}v_p\Big(p^{-1}\binom{p}{k}\Big)\Big)+(k-1)\frac{rp}{p-1}\Big),$$

et le résultat (en regardant en $k=2$ et $k=p$).

Corollaire 7.8. — (i) *Si $i\in\mathbf{N}$ et $r>0$, alors $v^{(0,r]}(\frac{\varphi^i(q)}{p}-1)=\inf(\frac{p^{i+1}}{p-1},p^i-\frac{1}{r})$.*

(ii) *Si $i\in\mathbf{N}$ et $r>s>0$, alors $v^{[s,r]}(\frac{\varphi^i(q)}{p}-1)=\inf(\frac{p^{i+1}}{p-1},p^i-\frac{1}{s})$.*

(iii) *Quand i tend vers $+\infty$, $\frac{\varphi^i(q)}{p}$ tend vers 1 dans $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$, quel que soit $r>0$.*

(iv) *Quand i tend vers $+\infty$, $\frac{p^it}{\varphi^i(\pi)}$ tend vers 1 dans $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$, quel que soit $r>0$.*

Démonstration. — Le (i) suit du lemme précédent et de la formule $v^{(0,r]}(\varphi^i(x))=p^iv^{(0,p^ir]}(x)$. Le (ii) est une conséquence du (i) et de la définition de $v^{[s,r]}$. Le (iii) suit du (ii) et de la définition de la topologie de $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$, et le (iv) suit du (iii) et de la formule $\frac{p^it}{\varphi^i(\pi)}=\prod_{n=i+1}^{+\infty}\frac{\varphi^n(q)}{p}$.

Lemme 7.9. — *Si $i\in\mathbf{N}$, alors*

$$\theta\Big(\varphi^{-n}\Big(\varphi^{i-1}(\pi)\cdot\frac{p^it}{\varphi^i(\pi)}\Big)\Big)=\begin{cases}\varepsilon^{(1)}-1 & \textit{si } n=i,\\ 0 & \textit{si } n\neq i.\end{cases}$$

Démonstration. — Évident.

Proposition 7.10. — *Soient $r>0$ et $n\geqslant n_0(K)+1$ vérifiant $p^nr\geqslant 1$. Si $(x_i)_{i\geqslant n}$ est une suite d'éléments de K_∞, avec $x_i\in K_i$ pour tout $i\geqslant n$, alors il existe $x\in \mathbf{B}_K^{]0,r]}$ tel que $\theta(\varphi^{-i}(x))=x_i$ pour tout $i\geqslant n$.*

Démonstration. — Soit $(a_i)_{i\geqslant n}$ une suite d'éléments de $\mathbf{N}$ tendant vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$ et telle que $p^{a_i}x_i\in \mathscr{O}_{K_i}$, pour tout $i\geqslant n$. Soit

$$z_i=(\varepsilon^{(1)}-1)\cdot p^{a_i}x_i\cdot\Big(\frac{p}{(\varepsilon^{(i)}-1)^{(p-1)p^{i-1}}}\Big)^{a_i}\in \mathscr{O}_{K_i},$$

et soit $\tilde z_i$ élément de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ tel que $\theta(\varphi^{-i}(\tilde z_i))=z_i$ (l'existence d'un tel $\tilde z_i$ est assurée par le lemme 6.6). Comme $v^{[s,r]}\big(\frac{\pi^{(p-1)p^{i-1}}}{p}\big)^{a_i}=(p^i-\frac{1}{s})a_i$ (d'après la prop. 7.5) tend, quel que soit $s\in]0,r[$, vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$, comme la suite de terme général $\frac{p^it}{\varphi^i(\pi)}$ tend vers 1 et donc est bornée, et comme la suite de terme général $\tilde z_i$ est bornée, la série

$$\sum_{i=n}^{+\infty}\varphi^{i-1}(\pi)\cdot\frac{p^it}{\varphi^i(\pi)}\cdot\big(\frac{\pi^{(p-1)p^{i-1}}}{p}\big)^{a_i}\cdot\tilde z_i$$

converge dans $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ vers un élément x qui répond à la question comme on le voit en utilisant le lemme 7.9.

Proposition 7.11. — *Soient $r>0$ et $n\geqslant n_0(K)+1$ vérifiant $p^nr\geqslant 1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un élément de $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$:*

(i) $\theta(\varphi^{-i}(x))=0$ *quel que soit* $i\geqslant n$ *;*

(ii) $x\in\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est évidente. Pour démontrer l'autre implication commençons par remarquer que la condition $n\geqslant n_0(K)+1$ implique que les $\pi_{K,i}^j$ (resp. les $\theta(\pi_{K,i})^j$), pour $0\leqslant j\leqslant e_{K_\infty}-1$, forment une base de $\varphi^{-i}(\mathbf{B}_K^{]0,r]})$ (resp. K_i) sur $\varphi^{-i}(\mathbf{B}_{F'}^{]0,r]})$ (resp. F'_n), ce qui permet de se ramener au cas $K=F'$. Dans ce cas, on peut (prop. 7.6) écrire x sous la forme $f(\pi)$, où f est une fonction analytique sur la couronne $0<v_p(T)\leqslant\frac{pr}{(p-1)}$. La condition $\theta(\varphi^{-i}(x))=0$ se traduit par l'annulation de $f^{\varphi^{-i}}$ (et donc aussi de f) en $\varepsilon^{(i)}-1$ (et donc aussi en ses conjugués) ; autrement dit, f est divisible par $\frac{(T+1)^{p^i}-1}{(T+1)^{p^{i-1}}-1}$, quel que soit $i\geqslant n$. La fonction $g=\frac{((T+1)^{p^{n-1}}-1)f}{\log(1+T)}$ est donc holomorphe sur la couronne $0<v_p(T)\leqslant\frac{pr}{(p-1)}$, et on a $x=\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}g(\pi)$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 7.12. — *Soient $r>0$ et $n\geqslant n_0(K)+1$ vérifiant $p^nr\geqslant 1$. Alors l'application $x\mapsto(\theta(\varphi^{-i}(x)))_{i\geqslant n}$ induit la suite exacte*

$$0\longrightarrow\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]}\longrightarrow\mathbf{B}_K^{]0,r]}\longrightarrow\textstyle\prod_{i\geqslant n}K_i\longrightarrow 0.$$

8. Traces de Tate normalisées

8.1. Sur $\widehat{K}_\infty$. — C'est le cas considéré par Tate [**28**]; la proposition 8.1 ci-dessous qui sert de modèle à tous les résultats de ce § est, avec la remarque 4.7, l'ingrédient permettant de calculer la cohomologie galoisienne de C. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $x \in K_\infty$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $x \in K_{n+k}$ et $\frac{1}{[K_{n+k}:K_n]}\mathrm{Tr}_{K_{n+k}/K_n}(x)$ ne dépend pas du choix de k; on a donc construit de la sorte une application K_n-linéaire $\mathrm{R}_{K,n} : K_\infty \to K_n$.

Proposition 8.1. — (i) *$\mathrm{R}_{K,n}$ s'étend en une application K_n-linéaire continue de $\widehat{K}_\infty$ sur K_n et on a $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ si $x \in K_n$.*

(ii) *$\sigma \circ \mathrm{R}_{K,n} = \mathrm{R}_{K^\sigma,n}$ si $\sigma \in \mathscr{G}_F$.*

(iii) *$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_{K,n}(x) = x$.*

8.2. Sur $\widetilde{\mathbf{E}}_K$. — Soit $I = p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0,1[$; c'est un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Si $m \in \mathbf{N}$, soit $I_m = \{i \in I \mid v_p(i) \geqslant -m\}$, ce qui fait que I est la réunion croissante pour $m \in \mathbf{N}$ des I_m. Soit aussi $\mathbf{E}_{K,m} = \varphi^{-m}(\mathbf{E}_K)$; c'est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{E}_{K,\infty} = \cup_{m\in\mathbf{N}}\mathbf{E}_{K,m}$ est la clôture radicielle de $\mathbf{E}_K$.

Lemme 8.2. — *Si $m \in \mathbf{N}$, les ε^i, pour $i \in I_m$, forment une base de $\mathbf{E}_{F,m}^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$.*

Démonstration. — $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$ étant une uniformisante de $\mathbf{E}_F$, tout élément de $\mathbf{E}_F^+$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\overline{\pi}^n = \sum_{r=0}^{p^m-1} (\varepsilon-1)^r\varphi^m(b_r),$$

où les a_n sont des éléments de k_F et $b_r = \sum_{k=0}^{+\infty}\varphi^{-m}(a_{r+kp^m})\overline{\pi}^k$. On en déduit le fait que les $(\varepsilon-1)^r$ pour $0 \leqslant r \leqslant p^m - 1$ forment une base de $\mathbf{E}_F^+$ sur $\varphi^m(\mathbf{E}_F^+)$ et la matrice faisant passer de $(\varepsilon-1)^r$ aux ε^r étant triangulaire avec des 1 sur la diagonale, il en est de même des ε^r pour $0 \leqslant r \leqslant p^m - 1$. Il n'y a plus qu'à appliquer φ^{-m} pour en déduire le lemme.

Proposition 8.3. — *Soient K une extension finie de F et $c_K = v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}) + v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Alors,*

(i) *tout élément x de $\mathbf{E}_{K,m}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i\in I_m}\varepsilon^i a_i(x)$, où $a_i(x) \in \mathbf{E}_K$ si $i \in I$, et on a l'encadrement*

$$v_{\mathbf{E}}(x) - c_K < \inf_{i\in I_m} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \leqslant v_{\mathbf{E}}(x);$$

(ii) *tout élément x de $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i\in I}\varepsilon^i a_i(x)$, où $(a_i(x))_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{E}_K$ tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies, et on a l'encadrement*

$$v_{\mathbf{E}}(x) - c_K < \inf_{i\in I} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \leqslant v_{\mathbf{E}}(x).$$

Démonstration. — Une base de $\mathbf{E}_{F,m}^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$ est aussi une base de $\mathbf{E}_{F,m}$ sur $\mathbf{E}_F$; de plus, l'extension $\mathbf{E}_{F,m}/\mathbf{E}_F$ est radicielle alors que l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est séparable; une base de $\mathbf{E}_{F,m}$ sur $\mathbf{E}_F$ est donc aussi une base de $\mathbf{E}_{K,m}$ sur $\mathbf{E}_K$; on en déduit l'existence et l'unicité de l'écriture.

D'autre part, l'inégalité $\inf_{i\in I_m} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \leqslant v_{\mathbf{E}}(x)$ est une évidence. Dans le cas $K = F$, l'autre inégalité est une conséquence des deux remarques suivantes :

(a) $\inf_{i\in I_m} v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) \geqslant 0$ si $v_{\mathbf{E}}(x) \geqslant 0$ (les ε^i forment une base de $\mathbf{E}_{F,m}^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$).

(b) $a_i(\overline{\pi}^k x) = \overline{\pi}^k a_i(x)$ si $k \in \mathbf{Z}$ (par unicité de l'écriture).

Dans le cas général, soient $d = d_{K_\infty}$ et $\delta_K = v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$, et soient $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $\mathbf{E}_K^+$ sur $\mathbf{E}_F^+$ et $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ la base de $\mathbf{E}_K$ sur $\mathbf{E}_F$ duale de $(e_1, \dots, e_d)$ pour la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}(xy)$; les e_i^* forment donc une base de $\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F}^{-1}$ sur $\mathbf{E}_F^+$ et, en particulier, on a $v_{\mathbf{E}}(e_i^*) \geqslant -\delta_K$. Si $m \in \mathbf{N}$, alors $(e_1, \dots, e_d)$ et $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ sont aussi des bases de $\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}$ duale l'une de l'autre pour la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xy)$; on a donc, si $x \in \mathbf{E}_{K,m}$,

$$x = \sum_{k=1}^{d} \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xe_k) \cdot e_k^* \quad \text{et} \quad a_i(x) = \sum_{k=1}^{d} a_i(\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xe_k)) \cdot e_k^*, \ \text{si } i \in I_m,$$

et comme $v_{\mathbf{E}}(\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}_{K,m}/\mathbf{E}_{F,m}}(xe_k)) \geqslant v_{\mathbf{E}}(x)$, on déduit le (i) du cas $K = F$.

Maintenant, $\cup_{m \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_{K,m}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ d'après le (iv) de la proposition 4.10 et l'inégalité $v_{\mathbf{E}}(a_i(x)) > v_{\mathbf{E}}(x) - c_K$ montre que a_i s'étend par continuité en une application $\mathbf{F}_p$-linéaire continue de $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ dans $\mathbf{E}_K$, ce qui permet de déduire le (ii) du (i) par passage à la limite.

Remarque 8.4. — Si K est une extension non ramifiée de F, le lemme 8.2 montre que l'on $a_i(x) \in \mathbf{E}_K^+$ si $x \in \mathbf{E}_{K,m}^+$; un passage à la limite montre que ceci reste vrai si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}_K^+$.

8.3. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K$. — Si $m \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{A}_{K,m}$ le sous-anneau $\varphi^{-m}(\mathbf{A}_K)$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$. On a donc $\mathbf{A}_{K,m}/p\mathbf{A}_{K,m} = \mathbf{E}_{K,m}$.

Proposition 8.5. — (i) *Si K est une extension finie de F, alors*

(a) *tout élément x de $\mathbf{A}_{K,m}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i \in I_m} [\varepsilon^i] a_i(x)$, où $a_i(x) \in \mathbf{A}_K$, si $i \in I_m$;*

(b) *tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i \in I} [\varepsilon^i] a_i(x)$, où $(a_i(x))_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{A}_K$ tendant vers* 0 (pour la topologie faible) *quand i tend vers l'infini.*

(ii) *Si K est une extension non ramifiée de F et si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^+$, alors $a_i(x) \in \mathbf{A}_K^+$ quel que soit $i \in I$.*

Démonstration. — Les trois énoncés se démontrent de la même manière ; commençons par le (i) (b). Soit M le $\mathbf{A}_K$-module des familles $(a_i(x))_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{A}_K$ tendant vers 0 quand i tend vers l'infini. Pour démontrer le (i), il s'agit de prouver que l'application $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} [\varepsilon^i] a_i$ est un isomorphisme de M sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K$, ce qu'il suffit de vérifier modulo p puisque les modules considérés sont sans p-torsion et complets pour la topologie p-adique. Le (i) de la proposition 8.3 permet donc de conclure.

Le (i) (a) se démontre en remplaçant I par I_m dans la démonstration ci-dessus et en utilisant le (i) de la proposition 8.3. Le (ii) se démontre en remplaçant $\mathbf{A}_K$ par $\mathbf{A}_K^+$ et en utilisant la remarque 8.4.

Remarque 8.6. — L'unicité de la décomposition entraine que les $a_i : \widetilde{\mathbf{A}}_K \to \mathbf{A}_K$ sont $\mathbf{A}_K$-linéaires.

Soit $\psi = p^{-1} \varphi^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}$; c'est un inverse à gauche de φ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_F$ (car φ le fait) et, d'autre part, dans la base $1, [\varepsilon], \dots, [\varepsilon^{p-1}]$ de $\mathbf{A}$ sur $\varphi(\mathbf{A})$, cet opérateur est donné par la formule

$$\psi\big(\varphi(x_0) + \varphi(x_1)[\varepsilon] + \cdots + \varphi(x_{p-1})[\varepsilon^{p-1}]\big) = x_0.$$

Si $m \in \mathbf{N}$, soit $\mathrm{R}_{K,m} : \widetilde{\mathbf{A}}_K \to \widetilde{\mathbf{A}}_K$ l'application définie par

$$\mathrm{R}_{K,m}(x) = \sum_{i \in I_m} [\varepsilon^i] a_i(x).$$

Lemme 8.7. — *Si $n \geqslant m$ et $x \in \mathbf{A}_{K,n}$, alors $\mathrm{R}_{K,m}(x) = \varphi^{-m}\psi^{n-m}\varphi^n(x)$.*

Démonstration. — Si $j \in \mathbf{Z}$ et $z \in \mathbf{A}_K$, alors $\psi^{n-m}([\varepsilon^j]\varphi^n(z))$ vaut $[\varepsilon^{p^{m-n}j}]\varphi^m(z)$ (resp. 0) si p^{n-m} divise (resp. ne divise pas) j. On en déduit le résultat en utilisant le (i) (a) de la proposition 8.5.

Proposition 8.8. — (i) $\lim_{m\to+\infty} \mathrm{R}_{K,m}(x) = x$.
(ii) *Si $m \in \mathbf{N}$, alors $\mathrm{R}_{K,m} = \varphi^{-m} \circ \mathrm{R}_{K,0} \circ \varphi^m$.*
(iii) *$\mathrm{R}_{K,m}$ est une section $\mathbf{A}_{K,m}$-linéaire continue de l'inclusion de $\mathbf{A}_{K,m}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K$.*
(iv) *Si $\sigma \in \mathscr{G}_F$, alors $\sigma \circ \mathrm{R}_{K,m} = \mathrm{R}_{K^\sigma,m} \circ \sigma$. En particulier, $\mathrm{R}_{K,m}$ commute à l'action de Γ_K.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du (i) (b) de la proposition 8.5. Le (ii) et le (iv) découlent, par continuité, du lemme 8.7 et du fait que φ et ψ commutent à $\mathscr{G}_F$. Finalement, $\mathrm{R}_{K,0} = a_0$ est $\mathbf{A}_K$-linéaire d'après la remarque 8.6 et la $\mathbf{A}_{K,m}$-linéarité de $\mathrm{R}_{K,m}$ découle de la $\mathbf{A}_K$-linéarité de $\mathrm{R}_{K,0}$ et du (ii).

8.4. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$. — Si K est une extension finie de F, si $r > 0$ et si $m \in \mathbf{N}$, soit $\mathbf{A}_{K,m}^{(0,r]} = \mathbf{A}_{K,m} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$; on a aussi $\mathbf{A}_{K,m}^{(0,r]} = \varphi^{-m}(\mathbf{A}_K^{(0,p^{-m}r]})$.

Lemme 8.9. — *Si $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\alpha) \geqslant -\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$, alors on peut écrire $[\alpha]$ de manière unique sous la forme $[\alpha] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}}[\beta_n]$, où $a(n)$ est le plus petit entier $\geqslant \frac{p-1}{p}n$ et $\beta_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[\alpha_k] \in \widetilde{\mathbf{A}}$ et si $b \in \mathbf{N}$, alors

$$v^{[0,1]}\Big(\frac{[\overline{\pi}]^b}{p}(x - [\alpha_0])\Big) = \inf_{k\geqslant 0}(bv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + v_{\mathbf{E}}(\alpha_{k+1}) + k) \geqslant bv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 1 + v^{[0,1]}(x).$$

Maintenant, on obtient les β_n du lemme par récurrence, en posant $x_0 = \pi^\ell[\alpha]$, $\beta_n = \overline{x}_n$ et

$$x_{n+1} = \frac{\pi^{a(n+1)-a(n)}}{p}(x_n - [\beta_n]) = \Big(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\Big)^{a(n+1)-a(n)} \frac{[\overline{\pi}]^{a(n+1)-a(n)}}{p}(x_n - [\overline{x}_n]).$$

On déduit de la remarque préliminaire l'inégalité

$$v^{[0,1]}(x_{n+1}) \geqslant (a(n+1) - a(n))v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 1 + v^{[0,1]}(x_n)$$

Par ailleurs, l'hypothèse $v_{\mathbf{E}}(\alpha) \geqslant -\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$ se traduit par $v^{[0,1]}(x_0) \geqslant 0$; on en déduit, par une récurrence immédiate, que $v^{[0,1]}(x_n) \geqslant a(n)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - n$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que $a(n)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - n = a(n)\frac{p}{p-1} - n \geqslant 0$ et donc que $v_{\mathbf{E}}(\beta_n) \geqslant 0$.

Si $r < r_K$, soit $c_K(r) = c_K + \inf(0, \frac{p-1}{r} - p)$. Remarquons que, si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est ramifiée, on a $r_K < \frac{1}{v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})} = \frac{p-1}{p}$ et $c_K(r) = c_K$.

Proposition 8.10. — *Si $r < r_K$ et si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, alors $a_i(x) \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$ quel que soit $i \in I$ et on a*

$$v^{(0,r]}(a_i(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - c_K(r) \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} v^{(0,r]}(a_i(x)) = +\infty.$$

Démonstration. — Si $x = 0$, il n'y a rien à démontrer ; nous supposerons donc $x \neq 0$.

• Commençons par traiter le cas où $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée et $x = [\alpha]$, $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}_K$ est un représentant de Teichmüller. Soit $\ell \in \mathbf{Z}$ le plus petit entier tel que $-\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \leqslant v_{\mathbf{E}}(\alpha)$. D'après le lemme 8.9, on peut écrire $[\alpha]$ sous la forme $[\alpha] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}}[\beta_n]$, où les β_n sont éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}_K^+$ (car fixes par $\mathscr{H}_K$ par unicité de l'écriture). On a donc $a_i([\alpha]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}} a_i([\beta_n])$, avec $a_i([\beta_n]) \in \mathbf{A}_K^+$ puisque $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée (cf. (ii) de la prop. 8.5). Maintenant, on a, en écrivant n sous la forme $n = pk + i$, avec $0 \leqslant i \leqslant p-1$ (et donc $a(n) = (p-1)k + i$),

$$v^{(0,r]}\big(\frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}}\big) = \frac{n}{r} - (\ell + a(n))\frac{p}{p-1} = pk\Big(\frac{1}{r} - 1\Big) + i\Big(\frac{1}{r} - \frac{p}{p-1}\Big).$$

Comme $r < 1$, la suite de terme général $pk\big(\frac{1}{r} - 1\big) + i\big(\frac{1}{r} - \frac{p}{p-1}\big)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et $0 \leqslant i \leqslant p-1$, et atteint son minimum $\inf(0, \frac{p-1}{r} - p)$ pour $k = 0$ et $i = p-1$ ou $k = i = 0$, ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^n}{\pi^{\ell+a(n)}} a_i([\beta_n])$ converge dans $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et que sa somme $a_i([\alpha])$ vérifie

$$v^{(0,r]}(a_i([\alpha])) \geqslant -\ell v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + \inf(0, \frac{p-1}{r} - p) \geqslant v^{(0,r]}([\alpha]) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) + \inf(0, \frac{p-1}{r} - p).$$

On en déduit le résultat dans le cas considéré.

• Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F$ est non ramifiée, et si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k [x_k]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K$, alors la série converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et on a $a_i(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k a_i([x_k])$, ce qui permet d'utiliser ce que l'on vient de démontrer et la convergence uniforme pour conclure.

• Dans le cas général, on a $a_i(x) = \sum_{j=1}^{e_K} a_i(T_{K/F'}(\pi_K^{j-1} x)) f_j^*$ et $v^{(0,r]}(T_{K/F'}(\pi_K^{j-1} x)) \geqslant v^{(0,r]}(x)$, ce qui permet d'utiliser le corollaire 6.10 pour conclure.

Corollaire 8.11. — *Si $r > 0$ et si $p^{-n} r < r_K$, alors $\mathrm{R}_{K,n}(x) \in \mathbf{A}_{K,n}^{(0,r]}$, la suite de terme général $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ tend vers x dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ et on a $v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n} c_K(r)$ si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$.*

Démonstration. — Si $n \geqslant 0$, on a $\mathrm{R}_{K,n}(x) = \varphi^{-n}(\mathrm{R}_{K,0}(\varphi^n(x)))$. Comme $\varphi^n(x) \in \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-n}r]}$, comme $\mathrm{R}_{K,0} = a_0$, et comme $p^{-n} r < r_K$, la proposition 8.10 montre que l'on a $\mathrm{R}_{K,n}(x) \in \mathbf{A}_{K,n}^{(0,r]}$, et

$$v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) = p^{-n} v^{(0,p^{-n}r]}\big(a_0(\varphi^n(x))\big) \geqslant p^{-n}\big(v^{(0,p^{-n}r]}(\varphi^n(x)) - c_K(r)\big) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n} c_K(r).$$

Finalement, si $p^{-n_0} r < r_K$ et $n \geqslant n_0$, on a

$$x - \mathrm{R}_{K,n}(x) = \varphi^{-n_0}(\varphi^{n_0}(x) - \mathrm{R}_{K,n-n_0}(\varphi^{n_0}(x))) = \varphi^{-n_0}\Big(\sum_{i \in I - I_{n-n_0}} [\varepsilon^i] a_i(\varphi^{n_0}(x))\Big).$$

La convergence de $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ vers x est donc une conséquence de ce que, d'après la proposition 8.10, $\lim_{i \to \infty} v^{(0,p^{-n_0}r]}(a_i(\varphi^{n_0}(x))) = +\infty$.

8.5. Sur $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$

Proposition 8.12. — *Si $r > 0$ et si $p^{-n} r < r_K$, alors $\mathrm{R}_{K,n} : \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]} \to \mathbf{A}_{K,n}^{(0,r]}$ s'étend par $\mathbf{Q}_p$-linéarité et continuité en une application $\mathrm{R}_{K,n} : \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} \to \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$, la suite de terme général $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ tend vers x dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, et on a $v^{[s,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{[s,r]}(x) - c_K(r)$ si $s \in]0, r[$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$.*

Démonstration. — Comme $v^{(0,r]}(p^k x) = v^{(0,r]}(x) + \frac{k}{r}$, on a $v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c_K(r)$ quels que soient r, n vérifiant $p^{-n}r < r_K$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$. En particulier, si $p^{-n}r < r_K$, alors quel que soit $s \in]0,r[$, on a $v^{(0,s]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{(0,s]} - p^{-n}c_K(r)$, et donc

$$\begin{aligned} v^{[s,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) &= \min(v^{(0,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)), v^{(0,s]}(\mathrm{R}_{K,n}(x))) \\ &\geqslant \min(v^{(0,r]}(x) - p^{-n}c_K(r), v^{(0,s]} - p^{-n}c_K(r)) = v^{[s,r]}(x) - p^{-n}c_K(r). \end{aligned}$$

Comme $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ pour la topologie définie par les $v^{[s,r]}$, $s \in]0,r[$, cela montre que $\mathrm{R}_{K,n}$ s'étend par continuité en une application $\mathrm{R}_{K,n} : \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} \to \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$ vérifiant l'inégalité $v^{[s,r]}(\mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant v^{[s,r]}(x) - c_K(r)$ si $s \in]0,r[$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$.

Il reste à montrer que $\mathrm{R}_{K,n}(x)$ tend vers x dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, et il s'agit de montrer que, quels que soient $s \in]0,r[$ et $M \geqslant 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $v^{[s,r]}(x - \mathrm{R}_{K,n}(x)) \geqslant M$ si $n \geqslant n_0$. Par densité, il existe $y \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{(0,r]}$ tel que l'on ait $v^{[s,r]}(x-y) \geqslant M + c_K(r)$. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $z = p^k y \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$. D'après le corollaire 8.11, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $v^{(0,r]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) \geqslant M + \frac{r}{s}$ si $n \geqslant n_0$, et on a alors

$$\begin{aligned} v^{(0,r]}(y - \mathrm{R}_{K,n}(y)) =& v^{(0,r]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) - \frac{k}{r} \geqslant M, \\ v^{(0,s]}(y - \mathrm{R}_{K,n}(y)) =& v^{(0,s]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) - \frac{k}{s} \geqslant v^{(0,r]}(z - \mathrm{R}_{K,n}(z)) - \frac{k}{s} \geqslant M, \end{aligned}$$

et donc $v^{[s,r]}(y - \mathrm{R}_{K,n}(y)) \geqslant M$ si $n \geqslant n_0$. Pour conclure, il suffit alors d'écrire $x - \mathrm{R}_{K,n}(x)$ sous la forme $(x-y) - \mathrm{R}_{K,n}(x-y) + (y - \mathrm{R}_{K,n}(y))$.

9. Action de Γ_K

9.1. Invariants

Proposition 9.1. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$ est d'ordre infini, alors $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{E}}_K^{\gamma=1} = k_{F'}^{\gamma=1}$ et $\mathbf{A}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\gamma=1} = \mathscr{O}_{F'}^{\gamma=1}$.*

Démonstration. — Soit $\kappa = k_{F'}^{\gamma=1}$. Si $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} \neq \kappa$, alors $\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ contient un élément x vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x) > 0$. Il contient donc aussi le sous-corps $\kappa((x))$ de $\mathbf{E}_K$, ce qui implique que $\mathbf{E}_K$ est une extension finie de $\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ et que, si $z \in \mathbf{E}_K$, l'ensemble des valeurs prises par $\gamma^k(z)$, $k \in \mathbf{Z}$, est fini (de cardinal $\leqslant [\mathbf{E}_K : \mathbf{E}_K^{\gamma=1}]$). Prendre $z = \varepsilon$ conduisant à une contradiction, c'est donc que $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} = \kappa$.

Maintenant, si $z \in \widetilde{\mathbf{E}}_K^{\gamma=1}$, alors $\varphi^n(\mathrm{R}_{K,n}(z)) \in \mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. D'après ce qui précède, ceci implique $\mathrm{R}_{K,n}(z) \in \kappa$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et $z = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_{K,n}(z) \in \kappa$, et donc $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{E}}_K^{\gamma=1} = \kappa$.

On en déduit les égalités $\mathbf{A}_K^{\gamma=1} = \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\gamma=1} = \mathscr{O}_{F'}^{\gamma=1}$ en réduisant modulo p, puis modulo p^2 etc., ce qui permet de conclure.

9.2. Le Γ_K-module $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$. — Soit $\delta_K = v_{\mathbf{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_F})$.

Lemme 9.2. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$ vérifie $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$, alors*

$$v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K) = p^{n(\gamma)} v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - \delta_K.$$

Démonstration. — Soit $n = n(\gamma)$. Comme $n \geqslant n_0(K)$, l'extension K_{n+1}/K_n est cyclique de degré p (lemme 4.2), et on a $v_p(\mathfrak{d}_{K_{n+1}/K_n}) = (p-1)v_p(\gamma(\omega_{n+1}) - \omega_{n+1})$ quelle que soit l'uniformisante ω_{n+1} de K_{n+1}. On peut en particulier prendre un relèvement $\hat{\pi}_{K,n+1}$ de $\overline{\pi}_{K,n+1}$ pour ω_{n+1}, ce qui nous donne, utilisant la formule $v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n}) = p^{-n}\delta_K$ de la proposition 4.12,

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K) =& p^{n+1}v_p(\gamma(\hat{\pi}_{K,n+1}) - \hat{\pi}_{K,n+1}) \\ =& p^{n+1} \cdot \frac{1}{p-1} v_p(\mathfrak{d}_{K_{n+1}/K_n}) \\ =& p^{n+1} \cdot \frac{1}{p-1}\big(v_p(\mathfrak{d}_{K_{n+1}/F_{n+1}}) + v_p(\mathfrak{d}_{F_{n+1}/F_n}) - v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})\big) \\ =& p^{n+1} \cdot \frac{1}{p-1}\big(1 + (p^{-(n+1)} - p^{-n})\delta_K\big) = p^n \frac{p}{p-1} - \delta_K, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Lemme 9.3. — *Si $m \geqslant 1$, si $u \in \mathbf{Z}_p^*$ et si $r < p^{-m}$, alors $\frac{[\varepsilon]^{p^m u} - 1}{[\overline{\pi}]^{p^m}}$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$.*

Démonstration. — On a
$$\frac{[\varepsilon]^{p^m u} - 1}{[\overline{\pi}]^{p^m}} = \varphi^m\Big(\frac{(1+\pi)^u - 1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\Big),$$
et comme $\frac{(1+\pi)^u - 1}{\pi}$ est une unité de $\mathbf{Z}_p[[\pi]]$ puisque $u \in \mathbf{Z}_p^*$, le lemme 6.2 permet de conclure.

Lemme 9.4. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$ vérifie $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$, et si $r < \inf(r_K, p^{-n(\gamma)})$, alors*
$$v^{(0,r]}(\gamma(\pi_K) - \pi_K) = p^{n(\gamma)}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - \delta_K.$$

Démonstration. — Soit Q le polynôme obtenu en appliquant γ aux coefficients de P_K. On peut alors écrire $Q - P_K$ sous la forme $(\gamma(\pi) - \pi)R$, où $R \in \mathbf{A}_F^+[X]$. Comme $\overline{P}_K$ est un polynôme d'Eisenstein, le coefficient constant de R est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_F^+$ (sa réduction modulo p est de valuation 0) et $R(\gamma(\pi_K))$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ si $r < r_K$.

D'autre part, on a $Q(\gamma(\pi_K)) = 0$, ce que l'on peut traduire sous la forme

$$(\gamma(\pi) - \pi)R(\gamma(\pi_K)) = -(\gamma(\pi_K) - \pi_K)\frac{P_K(\gamma(\pi_K)) - P_K(\pi_K)}{\gamma(\pi_K) - \pi_K}.$$

Soit $\beta = \frac{P_K(\gamma(\pi_K)) - P_K(\pi_K)}{\gamma(\pi_K) - \pi_K}$; c'est un polynôme en π_K et $\gamma(\pi_K)$, à coefficients dans $\mathbf{A}_F^+$; on a donc $w_k(\beta) \geqslant -(2k-1)\delta_K$ d'après le lemme 6.4. Comme $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$ et $\delta_K < \frac{1}{p-1}p^{n_0(K)}$, le lemme 9.2 montre que $v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K) - \overline{\pi}_K)) > \delta_K$; on en déduit l'égalité $w_0(\beta) = v_{\mathbf{E}}(\overline{\beta}) = v_{\mathbf{E}}(P_K'(\overline{\pi}_K)) = \delta_K$. Ceci implique (lemme 6.5) que $[P_K'(\overline{\pi}_K)]^{-1}\beta$ est, pour tout $r < r_K$, une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, et donc que $\gamma(\pi_K) - \pi_K$ est, à multiplication près par une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, égal à $[P_K'(\overline{\pi}_K)]^{-1}(\gamma(\pi) - \pi)$. Comme $\gamma(\pi) - \pi = [\varepsilon]([\varepsilon]^{p^{n(\gamma)}u} - 1)$, où $u = p^{-n(\gamma)}(\chi(\gamma) - 1) \in \mathbf{Z}_p^*$, le lemme 9.3 permet de conclure.

Corollaire 9.5. — *Si K est une extension finie de F, si $n(\gamma) \geqslant n_0(K)$, si $r < \inf(r_K, p^{-n(\gamma)})$ et si $x \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$, alors*
$$v^{(0,r]}((1-\gamma)(x)) \geqslant v^{(0,r]}(x) + p^{n(\gamma)}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - c_K.$$

Démonstration. — D'après la proposition 7.5, on peut écrire x sous la forme $f(\pi_K)$, avec $f(T) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_nT^n$ et $v^{(0,r]}(x) = \inf_{n\in\mathbf{Z}}\big(nv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) - \frac{v_p(a_n)}{r}\big)$. On a donc

$$\gamma(x) - x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(\pi_K)}{k!}(\gamma(\pi_K) - \pi_k)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(\pi_K)\cdot\pi_K^k}{k!}\Big(\frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1\Big)^k.$$

Par ailleurs, $\frac{f^{(k)}(\pi_K)\,\pi_K^k}{k!} = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\binom{n}{k}a_n\pi_K^n$ vérifie $v^{(0,r]}(\frac{f^{(k)}(\pi_K)\cdot\pi_K^k}{k!}) \geqslant v^{(0,r]}(f(\pi_K))$. On en déduit la minoration $v^{(0,r]}(\gamma(x) - x) \geqslant v^{(0,r]}(x) + v^{(0,r]}(\frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1)$ et le lemme 9.4 permet de conclure (en utilisant la majoration $\delta_K + v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K) \leqslant c_K = \delta + v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$).

9.3. Le Γ_K-module $\big(\mathbf{A}_K^{(0,r]}\big)^{\psi=0}$. — Les résultats qui suivent sont des raffinements de résultats de [**22, 7**].

Proposition 9.6. — *Si $\gamma \in \Gamma_K - \{1\}$ vérifie $\chi(\gamma) \in 1 + 2p\mathbf{Z}_p$ et si $r < \inf(p^{-1}r_K, p^{-n(\gamma)})$, alors $1-\gamma$ admet un inverse sur $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$ et il existe $c(r, K, n(\gamma))$ tel que l'on ait*

$$v^{(0,r]}((1-\gamma)^{-1}\cdot x) \geqslant v^{(0,r]}(x) - c(r, K, n(\gamma)),$$

si $x \in (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $\gamma \in \Gamma_K$, si $k \in \mathbf{N}$ et si $(1 - \gamma^k)$ est inversible, alors $(1 - \gamma)$ est inversible d'inverse $(1 + \gamma + \cdots + \gamma^{k-1})(1 - \gamma^k)^{-1}$. D'autre part, $n(\gamma^{(p-1)p^n}) \geqslant n(\gamma) + n$. Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer l'inversibilité de $(1 - \gamma)$ et l'existence de $c(r, K, n(\gamma))$ pour $n(\gamma)$ assez grand.

Écrivons $\chi(\gamma)$ sous la forme $1+p^mu$, avec $m = n(\gamma)$. Tout élément z de $\mathbf{A}_K^{\psi=0}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\varphi(z_i)$, où $z_i = a_{i/p}(\varphi^{-1}(z)) \in \mathbf{A}_K$. La proposition 8.10 montre que, si $z \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$, alors $\varphi(z_i) \in \mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et $v^{(0,r]}(\varphi(z_i)) \geqslant v^{(0,r]}(z) - pc_K(r)$. Comme $\pi^{-p^m}(1 - [\varepsilon]^{p^mu})$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ d'après le lemme 9.3, ceci nous permet de définir une bijection $f_\gamma : (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0} \to (\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$ par la formule

$$f_\gamma\Big(\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\varphi(z_i)\Big) = -\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\frac{\varphi(z_i)}{1 - [\varepsilon]^{p^miu}},$$

et on a $v^{(0,r]}(f_\gamma(z)) \geqslant v^{(0,r]}(z) - pc_K(r) - p^mv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Un petit calcul utilisant l'identité $\gamma([\varepsilon]^i) = [\varepsilon]^i[\varepsilon]^{p^miu}$ montre que l'on a

$$z - f_\gamma((1-\gamma)\cdot z) = \sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\frac{\varphi((1-\gamma)\cdot z_i)}{[\varepsilon]^{-p^miu} - 1}.$$

Par ailleurs, comme $z_i \in \mathbf{A}^{(0,pr]}$ et $pr < r_K$, on a $v^{(0,pr]}((1-\gamma)(z_i)) \geqslant v^{(0,pr]}(z_i) + p^mv_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - c_K$ d'après le corollaire 9.5, et donc

$$\begin{aligned} v^{(0,r]}(\varphi((1-\gamma)\cdot z_i)) = pv^{(0,pr]}((1-\gamma)\cdot z_i) &\geqslant v^{(0,r]}(\varphi(z_i)) + p^{m+1}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - pc_K \\ &\geqslant v^{(0,r]}(z) + p^{m+1}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 2pc_K(r). \end{aligned}$$

On en tire l'inégalité

$$v^{(0,r]}(z - f_\gamma((1-\gamma)\cdot z)) \geqslant v^{(0,r]}(z) + (p^{m+1} - p^m)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) - 2pc_K(r).$$

Tout ceci permet de montrer que si $(p^{m+1}-p^m)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})-2pc_K(r)>0$ et si $y\in(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$, l'application $x\mapsto g_y(x)=x-f_\gamma((1-\gamma)\cdot x-y)$ est contractante sur $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$; elle y possède donc un unique point fixe z qui vérifie de plus, $v^{(0,r]}(z)\geqslant v^{(0,r]}(f_\gamma(y))\geqslant v^{(0,r]}(y)-pc_K-p^m v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})$. Ce point fixe est l'unique (car f_γ est bijective) solution de l'équation $(1-\gamma)\cdot z=y$ appartenant à $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$.

Remarque 9.7. — L'inégalité $(p^{m+1}-p^m)v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})-2pc_K(r)>0$ est équivalente à $p^m>2c_K(r)$; on a donc démontré en passant que, si $n(\gamma)\geqslant n_0(K)$ et si $p^{n(\gamma)}>2c_K(r)$, on peut prendre $c(r,K,n(\gamma))=p^{n(\gamma)}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})+pc_K(r)$.

9.4. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$. — Si $m\geqslant 1$, soit $\mathrm{R}^*_{K,m}=\mathrm{R}_{K,m}-\mathrm{R}_{K,m-1}$.

Lemme 9.8. — *$\mathrm{R}^*_{K,m}(x)\in\varphi^{-m}(\mathbf{A}_K^{\psi=0})$ si $m\geqslant 1$ et $x\in\widetilde{\mathbf{A}}_K$.*

Démonstration. — On a $\mathrm{R}^*_{K,m}(x)=\sum_{i\in I^*_m}a_i(x)[\varepsilon^i]$, où $I^*_m=\{i\in I,\ v_p(i)=-m\}$. On conclut en remarquant que, si $i\in I^*_m$ et j est le reste de la division de $p^m i$ par p, on a $j\in\{1,\dots,p-1\}$ et $\varphi^m(a_i(x)[\varepsilon^i])\in[\varepsilon]^j\varphi(\mathbf{A}_K)\subset\mathbf{A}_K^{\psi=0}$.

Soit $X_{K,n}^{(0,r]}$ l'image de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ par $1-\mathrm{R}_{K,n}$.

Proposition 9.9. — *Si $r>0$, si $p^{-n}r<\inf(r_K,p^{1-n(\gamma)})$, et si $\gamma\in\Gamma_K$ vérifie $n(\gamma)\leqslant n$, alors $\gamma-1$ est inversible sur $X_{K,n}^{(0,r]}$, et il existe $c'(r,K,n(\gamma))$ tel que*

$$v^{(0,r]}((\gamma-1)^{-1}(x))\geqslant v^{(0,r]}(x)-p^{-n}c'(r,K,n(\gamma)),$$

si $x\in X_{K,n}^{(0,r]}$. De plus, si $n(\gamma)\geqslant n_0(K)$ et $p^{n(\gamma)}>2c_K(r)$, on peut prendre $c'(r,K,n(\gamma))=p^{n(\gamma)-1}v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi})+2c_K(r)$.

Démonstration. — Commençons par constater que $\gamma-1$ est injectif sur $X_{K,n}^{(0,r]}$ d'après la proposition 9.1. Si $x\in X_{K,n}^{(0,r]}$, on a $\mathrm{R}_{K,n}(x)=0$; on peut écrire x sous la forme $x=\sum_{i=n+1}^{+\infty}\mathrm{R}^*_{K,i}(x)$, et on a $v^{(0,r]}(\mathrm{R}^*_{K,i}(x))\geqslant v^{(0,r]}(x)-p^{1-i}c_K(r)$ d'après le corollaire 8.11.

D'autre part, $\varphi^i(\mathrm{R}^*_{K,i}(x))\in(\mathbf{A}^{(0,p^{-i}r]})^{\psi=0}$ d'après le lemme 9.8, et la proposition 9.6 montre qu'il existe $z_i\in(\mathbf{A}^{(0,p^{-i}r]})^{\psi=0}$ tel que l'on ait

$$\varphi^i(\mathrm{R}^*_{K,i}(x))=(\gamma-1)z_i\quad\text{et}\quad v^{(0,p^{-i}r]}(z_i)\geqslant p^i v^{(0,r]}(\mathrm{R}^*_{K,i}(x))-c(p^{-i}r,K,n(\gamma)).$$

On a alors $v^{(0,r]}(\varphi^{-i}(z_i))\geqslant v^{(0,r]}(\mathrm{R}^*_{K,i}(x))-p^{-i}c(p^{-i}r,K,n(\gamma))$. Comme, d'après la rem. 9.7, $p^{-i}c(p^{-i}r,K,n(\gamma))$ est majoré indépendamment de i, et comme la suite de terme général $\mathrm{R}^*_{K,i}(x)$ tend vers 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$, il en est de même de la suite de terme général $\varphi^{-i}(z_i)$. L'élément $z=\sum_{i=n+1}^{+\infty}\varphi^{-i}(z_i)$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$ vérifie $(\gamma-1)z=x$ par construction et on a

$$v^{(0,r]}(z)\geqslant\inf_{i\geqslant n+1}v^{(0,r]}(\varphi^{-i}(z_i))\geqslant v^{(0,r]}(x)-\sup_{i\geqslant n+1}\big(p^{1-i}c_K(r)+p^{-i}c(p^{-i}r,K,n(\gamma))\big).$$

Ceci permet de conclure avec

$$c'(r,K,n(\gamma))=\sup_{n\geqslant n(\gamma)}\sup_{i\geqslant n+1}p^{n-i}\big(pc_K(p^{-i}r)+c(p^{-i}r,K,n(\gamma))\big).$$

Le maximum est atteint pour $n=n(\gamma)$ et $i=n+1$ (du moins si $n(\gamma)\geqslant n_0(K)$ et $p^{n(\gamma)}>2c_K(r)$; d'où la formule pour $c'(r,K,n(\gamma))$ dans ce cas particulier).

9.5. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$. — Soit $X_{K,n}^{]0,r]}$ l'image de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ par $1-\mathrm{R}_{K,n}$. On déduit de la proposition 9.9, par les mêmes arguments permettant de déduire la proposition 8.11 de la proposition 8.12, le résultat suivant :

Proposition 9.10. — *Si $r>0$, si $p^{-n}r<r_K$, et si $\gamma\in\Gamma_K$ vérifie $n(\gamma)\leqslant n$, alors $\gamma-1$ est inversible sur $X_{K,n}^{]0,r]}$, et on a $v^{[s,r]}((\gamma-1)^{-1}\cdot x)\geqslant v^{[s,r]}(x)-p^{-n}c'(r,K,n(\gamma))$ si $x\in X_{K,n}^{]0,r]}$ et $s\in]0,r[$.*

10. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

10.1. Descente presque étale

Lemme 10.1. — *Soit $r>0$ et soient $L\subset M$ deux extensions finies de F. Alors, quel que soit $\delta>0$, il existe $\alpha\in\widetilde{\mathbf{A}}_M^{(0,r]}$ vérifiant $v^{(0,r]}(\alpha)\geqslant-\delta$ et $\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_L/\mathscr{H}_M}\sigma(\alpha)=1$.*

Démonstration. — Notons $\mathrm{T}_{M/L}$ l'opérateur $\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_L/\mathscr{H}_M}\sigma$; cet opérateur coïncide avec $\mathrm{Tr}_{\widetilde{\mathbf{E}}_M/\widetilde{\mathbf{E}}_L}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}_M$. L'extension $\widetilde{\mathbf{E}}_M/\widetilde{\mathbf{E}}_L$ étant séparable, il existe $\beta\in\widetilde{\mathbf{E}}_M$ vérifiant $\mathrm{T}_{M/L}(\beta)=1$. On a aussi $\mathrm{T}_{M/L}(\varphi^{-n}(\beta))=1$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$ et, comme $v_{\mathbf{E}}(\varphi^{-n}(\beta))=p^{-n}v_{\mathbf{E}}(\beta)$, on peut supposer $v_{\mathbf{E}}(\beta)>\sup(-\frac{1}{r},-\delta)$.

On a alors $\mathrm{T}_{M/L}([\beta])=1+\sum_{k=1}^{+\infty}p^k[x_k]$, avec $v_{\mathbf{E}}(x_k)\geqslant v_{\mathbf{E}}(\beta)>-\frac{k}{r}$, et donc $\mathrm{T}_{M/L}([\beta])$ est une unité de l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,r]}$. L'élément $\alpha=(\mathrm{T}_{M/L}([\beta]))^{-1}[\beta]$ vérifie, par construction, $\mathrm{T}_{M/L}(\alpha)=1$, et on a $v^{(0,r]}(\alpha)=v^{(0,r]}([\beta])=v_{\mathbf{E}}(\beta)\geqslant-\delta$, ce qui permet de conclure.

Proposition 10.2. — *Si K est une extension finie de F, alors $H^1(\mathscr{H}_K,\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})=0$.*

Démonstration. — Soit $\sigma\mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu sur $\mathscr{H}_K$, à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]0,r]$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Nous allons construire par récurrence sur $n\geqslant-1$ une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $v^{[s_j,r]}(c_\sigma-(1-\sigma)\cdot c_n)\geqslant n$ quels que soient $\sigma\in\mathscr{H}_K$ et $j\leqslant n$;

(ii) $v^{[s_j,r]}(c_n-c_{n-1})\geqslant n-2$ si $j\leqslant n-1$;

ceci permettra de conclure car, la condition (ii) ci-dessus assure que la suite de terme général c_n converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ vers une limite $c\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, et la condition (i) nous donne $v^{[s_j,r]}(c_\sigma-(1-\sigma)\cdot c)=+\infty$ quels que soient $\sigma\in\mathscr{H}_K$ et $j\in\mathbf{N}$. On a donc $c_\sigma=(1-\sigma)\cdot c$, ce qui montre que le cocycle $\sigma\mapsto c_\sigma$ est un cobord, ce que l'on cherchait à obtenir.

Revenons à la construction des c_n ; il n'y a rien à faire si $n=-1$. Supposons donc c_n construit ; le cocycle $\sigma\mapsto c_{n,\sigma}=c_\sigma-(1-\sigma)\cdot c_n$ vérifie donc la condition $v^{[s_j,r]}(c_{n,\sigma})\geqslant n$ quels que soient $\sigma\in\mathscr{H}_K$ et $j\leqslant n$. Soit L une extension finie de K telle que $v^{[s_j,r]}(c_{n,\sigma})\geqslant n+2$ si $j\leqslant n+1$ et $\sigma\in\mathscr{H}_L$ (l'existence d'une telle extension est assurée par la continuité du cocycle $\sigma\mapsto c_{n,\sigma}$). Soit $\alpha\in\widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,r]}$ vérifiant $v^{(0,r]}(\alpha)\geqslant-1$ et $\mathrm{T}_{L/K}(\alpha)=1$ (l'existence d'un tel α est assurée par le lemme 10.1). Si $S\subset\mathscr{H}_K$ est un système de représentants de $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$, soit $c_S=\sum_{\tau\in S}\tau(\alpha)c_{n,\tau}$. Soit S' un autre système de représentants de $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$. Si $\sigma_1,\dots,\sigma_d$ sont les éléments de S, on peut, quitte à renuméroter les éléments $\sigma'_1,\dots,\sigma'_d$ de S', trouver $\tau_1,\dots,\tau_d\in\mathscr{H}_L$ tels que l'on ait $\sigma'_i=\sigma_i\tau_i$ si $1\leqslant i\leqslant d$; on a alors

$$c_{S'}=\sum_{i=1}^d\sigma_i\tau_i(\alpha)c_{n,\sigma_i\tau_i}=\sum_{i=1}^d\sigma_i(\alpha)c_{n,\sigma_i\tau_i}=\sum_{i=1}^d\sigma_i(\alpha)(\sigma_i(c_{n,\tau_i})+c_{\sigma_i})=c_S+\sum_{i=1}^d\sigma_i(\alpha c_{n,\tau_i}).$$

On en déduit, en utilisant le fait que $\tau_i \in \mathscr{H}_L$ et la définition de L, l'inégalité $v^{[s_j,r]}(c_S - c_{S'}) \geqslant n+1$ si $j \leqslant n+1$.

Maintenant, un petit calcul montre que $c_{n,\sigma} - (1-\sigma)c_S = c_{\sigma S} - c_S$, et comme σS est un système de représentants de $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$, on voit que $c_{n+1} = c_n + c_S$ répond à la question, quel que soit le choix de S.

Corollaire 10.3. — *Si $r > 0$, l'application d'inflation induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]})$ sur $H^1(\mathscr{G}_K, \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]})$.*

Démonstration. — Le terme suivant dans la suite exacte d'inflation-restriction est nul d'après la proposition 10.2.

10.2. Décomplétion

Proposition 10.4. — *Si $n \geqslant n_0(K)$ et $p^{-n}r < r_K$, alors l'inclusion de $\mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]})$ sur $H^1(\Gamma_K, \widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]})$.*

Démonstration. — On a $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]} = \mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]} \oplus X_{K,n}^{]0,r]}$, et il s'agit de prouver que $H^1(\Gamma_K, X_{K,n}^{]0,r]}) = 0$. Soit donc $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu sur Γ_K à valeurs dans $X_{K,n}^{]0,r]}$, et soit $\gamma \in \Gamma_K$ vérifiant $n(\gamma) \leqslant n$ (l'existence d'un tel γ est assuré par l'hypothèse $n \geqslant n_0(K)$ car Γ_K contient $1 + p^n\mathbf{Z}_p$ d'après le lemme 4.2). Alors, d'après la proposition 9.9, il existe $c \in X_{K,n}^{]0,r]}$ tel que l'on ait $c_\gamma = (\gamma - 1)\cdot c$. Le cocycle $\sigma \mapsto c'_\sigma = c_\sigma - (\sigma - 1)\cdot c$ est alors trivial sur le sous-groupe Γ de Γ_K engendré topologiquement par Γ ; il provient donc par inflation d'un cocycle sur Γ_K/Γ à valeurs dans $(X_{K,n}^{]0,r]})^\Gamma$, et ce dernier module est nul puisque $\gamma - 1$ est inversible sur $X_{K,n}^{]0,r]}$. Ceci permet de conclure.

10.3. Cocycles se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Les techniques de descente presque étale et de décomplétion ont été introduites par Tate **[28]** pour calculer la cohomologie galoisienne de C ; elles lui ont permis de démontrer :

(i) $H^1(\mathscr{H}_K, C) = 0$ (et donc $H^1(\mathscr{H}_K, C(k)) = 0$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$) ;

(ii) l'application $\mathrm{R}_{K,n} : \widehat{K}_\infty \to K_n$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \widehat{K}_\infty(k))$ sur $H^1(\Gamma_K, K_n(k))$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$;

(iii) $H^1(\Gamma_K, K_n(k)) = 0$ si $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$ et l'application qui, à $c \in K$, associe le cocycle $\sigma \mapsto c\log\chi(\sigma)$, induit un isomorphisme de K sur $H^1(\Gamma_K, K_n)$.

Par dévissage, on en déduit :

(iv) $H^1(\mathscr{H}_K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) = 0$;

(v) $\theta : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K} \to \widehat{K}_\infty$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K})$ sur $H^1(\Gamma_K, \widehat{K}_\infty)$;

(vi) $\mathrm{R}_{K,n}\circ\theta : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K} \to K_n$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K})$ sur $H^1(\Gamma_K, K_n)$.

Proposition 10.5. — *Si $r > 0$ et si $n \geqslant n_0(K) + 1$ vérifie $p^n r > 1$, l'application $x \mapsto (\varphi^{-i}(x))_{i\geqslant n}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ dans $\prod_{i\geqslant n}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit la suite exacte*

$$H^1(\Gamma_K, \tfrac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]}) \longrightarrow H^1(\Gamma_K, \mathbf{B}_K^{]0,r]}) \longrightarrow \textstyle\prod_{i\geqslant n} H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Si on utilise ce qui précède pour réécrire $\prod_{i\geqslant n} H^1(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}_K})$ sous la forme $\prod_{i\geqslant n} H^1(\Gamma_K, K_i)$, l'exactitude de la suite de la proposition s'obtient à partir de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tfrac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)}\mathbf{B}_K^{]0,r]} \longrightarrow \mathbf{B}_K^{]0,r]} \longrightarrow \textstyle\prod_{i\geqslant n} K_i \longrightarrow 0$$

du corollaire 7.12.

10.4. Cohomologie de $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$. — Le calcul de la cohomologie de $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ (ou plutôt de son image dans $H^1(\Gamma_K, \mathbf{B}_K^{]0,r]})$) est essentiellement dû à Berger [**3**, n° IV.2]. Nous le reproduisons ci-dessous pour la commodité du lecteur.

Soit $\Omega_K^{]0,r]}$ le module des différentielles continues de $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ sur F' ; c'est un $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de rang 1 engendré par $d\pi_K$, muni naturellement d'une action semi-linéaire de Γ_K, $\gamma\in\Gamma_K$ agissant sur $a\cdot db$ par $\gamma(a\cdot db)=\gamma(a)\cdot d(\gamma(b))$. On dispose d'une application résidu $\mathrm{Res} : \Omega_K^{]0,r]} \to F'$ envoyant $(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\pi_K^k)d\pi_K$ sur $\frac{a_{-1}}{e_{K_\infty}}$; cette application ne dépend pas du choix de π_K, ce qui permet de montrer qu'elle commute à l'action de Γ_K ; elle ne dépend pas non plus du choix de K grâce au facteur de normalisation $\frac{1}{e_{K_\infty}}$.

Notons ∂ la dérivation $(1+\pi)\frac{d}{d\pi}$ de $\mathbf{A}_F^+ = \mathscr{O}_F[[\pi]]$. Cette dérivation s'étend (de manière unique) en une dérivation continue de $\mathbf{A}_F^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}_F^{]0,r]}$ quels que soit $r>0$. Par ailleurs, si K est une extension finie de F et $r<r_K$, on a $\mathbf{A}_K^{(0,r]} = \mathbf{A}_F^{(0,r]}[\pi_K]$ et $\mathbf{B}_K^{]0,r]} = \mathbf{B}_F^{]0,r]}[\pi_K]$ si $r<r_K$, et comme $P'_K(\pi_K)$ est inversible dans $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ si $r<r_K$ (cf. lemme 6.5), la dérivation ∂ s'étend de manière unique en une dérivation de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$.

Comme Γ_K agit continûment sur $\overline{\pi}_K$, il existe un sous-groupe ouvert Γ'_K de Γ_K tel que l'on ait $v_{\mathbf{E}}(\gamma(\overline{\pi}_K)-\overline{\pi}_K) > v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}_K)$ si $\gamma\in\Gamma'_K$. On a alors $v^{(0,r]}(\gamma(\pi_K)-\pi_K) > v^{(0,r]}(\pi_K)$ quel que soit $r\in {]0,r_K[}$, ce qui permet de montrer que, si $\gamma\in\Gamma'_K$, si $x\in\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ et si $r\in{]0,r_K[}$, alors $\frac{(\gamma-1)^n\cdot x}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de définir l'opérateur $\log\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\gamma-1)^n$ sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$; la formule $\log\gamma\cdot x = \lim_{n\to+\infty} p^{-n}(\gamma^{p^n}-1)\cdot x$ montre que cet opérateur est une dérivation et un petit calcul montre que l'on a $\log\gamma = \log\chi(\gamma)\,t\partial$.

Si $\gamma\in\Gamma'_K$ vérifie $n(\gamma)\neq+\infty$, on définit l'opérateur $\square_\gamma$ par la formule

$$\square_\gamma = \frac{1}{\log\chi(\gamma)}\cdot\frac{\log\gamma}{\gamma-1} = \frac{1}{\log\chi(\gamma)} + \frac{1}{\log\chi(\gamma)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(\gamma-1)^n.$$

On a $(\gamma-1)\cdot\square_\gamma = t\partial$, ce qui va nous permettre d'inverser $\gamma-1$ sur les éléments divisibles par t.

Proposition 10.6. — *Si $r_K>r>s>0$, et si $\sigma\mapsto c_\sigma$ est un 1-cocycle continu sur Γ_K à valeurs dans $t\mathbf{B}_K^{]0,r]}$, alors il existe $a\in F$ unique et ne dépendant pas de s, tel que $\sigma\mapsto c_\sigma$ soit cohomologue dans $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ au cocycle $\sigma\mapsto(\sigma-1)\cdot(a\log\pi)$.*

Démonstration. — Si les cocycles $\sigma\mapsto(\sigma-1)\cdot(a\log\pi)$ et $\sigma\mapsto(\sigma-1)\cdot(b\log\pi)$ sont cohomologues dans $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$, c'est que $(a-b)\log\pi\in\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ et donc que $N((a-b)\log\pi) = -\frac{p(a-b)}{p-1} = 0$. On en déduit l'unicité d'un a vérifiant les conclusions de la proposition. De plus, comme $N(c_\sigma)=0$, on a $0 = N((\sigma-1)\cdot(a\log\pi)) = -\frac{p}{p-1}(\sigma(a)-a)$; on en déduit l'appartenance de a à F (sous réserve de son existence).

Il reste à prouver l'existence d'un a. En fait, nous allons prouver que, si $\gamma \in \Gamma_K - \{1\}$ est suffisamment proche de 1, alors $a = \frac{1}{\log \chi(\gamma)} \mathrm{Res}(\omega_\gamma)$ convient, où $\omega_\gamma = t^{-1} c_\gamma \frac{d\pi}{1+\pi} \in \Omega_K^{]0,r]}$. Si $\omega_\gamma = (\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi_K^k) d\pi_K$, on a $\mathrm{Res}(\omega_\gamma) = \frac{a_{-1}}{e_{K_\infty}}$ et on peut aussi écrire ω_γ sous la forme

$$\omega_\gamma = dz + a \log \chi(\gamma) \frac{d\pi}{\pi}, \quad \text{avec } z = a_{-1} \log \frac{\pi_K^{e_{K_\infty}}}{\pi} + \sum_{k\in\mathbf{Z}-\{-1\}} \frac{a_k}{k+1} \pi_K^{k+1}.$$

Comme $\pi^{-1}\pi_K^{e_{K_\infty}}$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$ (cela découle du lemme 6.5), on a $\log \frac{\pi_K^{e_{K_\infty}}}{\pi} \in \mathbf{B}_K^{]0,r]}$ d'après le lemme 5.14 ; par contre, $\sum_{k\in\mathbf{Z}-\{-1\}} \frac{a_k}{k+1}\pi_K^{k+1}$ n'appartient pas forcément à $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ à cause des $k+1$ en dénominateur, mais il appartient à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ quel que soit $s \in]0, r[$; on en déduit l'appartenance de z à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$.

Par ailleurs, $(\gamma - 1) \cdot \log \pi$ appartient à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ quel que soit $s \in]0, r[$ (et même quel que soit $s > 0$ car $\frac{\sigma(\pi)}{\pi}$ est une unité de $\mathbf{Z}_p[[\pi]]$) ; on en déduit, en revenant à la formule définissant $\square_\gamma$, l'appartenance de $(\square_\gamma - \frac{1}{\log \chi(\gamma)}) \cdot \log \pi$ à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$ et donc aussi celle de $y = \square_\gamma(z + \log \chi(\gamma) a \log \pi) - a \log \pi$ à $\mathbf{B}_K^{]0,s]}$. Maintenant, la formule $(\gamma - 1) \cdot \square_\gamma = t\partial$ nous donne $(\gamma - 1) \cdot (y + a \log \pi) = c_\gamma$; on en déduit le fait que le cocycle $\sigma \mapsto c'_\sigma = c_\sigma - (\sigma - 1) \cdot (y + a \log \pi)$ est trivial sur le sous-groupe Γ de Γ_K engendré topologiquement par γ ; il provient donc par inflation d'un cocycle sur Γ_K/Γ à valeurs dans $(\mathbf{B}_K^{]0,s]} \oplus F' \log \pi)^\Gamma = (F')^\Gamma$ (cf. prop. 5.16). Comme $H^1(\Gamma_K/\Gamma, (F')^\Gamma) = 0$ (conséquence facile du théorème de Hilbert 90), on peut, quitte à modifier c'_σ par un cobord à valeurs dans $(F')^\Gamma \subset \mathbf{B}_K^{]0,s]}$, se débrouiller pour que $c'_\sigma = 0$ quel que soit $\sigma \in \Gamma_K$. Ceci permet de conclure.

10.5. Un résultat du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$

Proposition 10.7. — *Soient $r \in]1, p[$ et $s \in]1, r[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un cocycle continu $\sigma \mapsto c_\sigma$ sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$:*

(i) *il existe $a \in F$ et $b \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}$ tels que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot (au + b)$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$;*

(ii) *quel que soit $i \in \mathbf{N}$, il existe $c_i \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tel que l'on ait $\varphi^{-i}(c_\sigma) = (\sigma - 1) \cdot c_i$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est évidente (on prend $c_i = \varphi^{-i}(au + b)$). La démonstration de la réciproque va utiliser la plupart des résultats qui précèdent. Soit $n \geqslant 1$ tel que $p^{-n} r < r_K$. Quitte à remplacer le cocycle $\sigma \mapsto c_\sigma$ par un cocycle cohomologue, on peut supposer que notre cocycle provient par inflation d'un cocycle sur Γ_K à valeurs dans $\mathbf{B}_{K,n}^{]0,r]}$, d'après le corollaire 10.3 et la proposition 10.4. Le cocycle $\sigma \mapsto c'_\sigma = \varphi^n(c_\sigma)$ est alors à valeurs dans $\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]}$ et, par hypothèse, le cocycle $\sigma \mapsto \varphi^{-i}(c'_\sigma)$ se trivialise dans $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{H}_K}$ quel que soit $i \geqslant n$. On peut donc, quitte à remplacer $\sigma \mapsto c'_\sigma$ par un cocycle cohomologue, supposer qu'il est à valeurs dans $\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)} \mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]}$, d'après la proposition 10.5.

Maintenant, comme $r < p$, on a $p^{-n} r < p^{1-n}$ et $\varphi^{n-1}(\pi)$ est une unité de $\mathbf{A}_K^{(0,p^{-n}r]}$ (cela suit du corollaire 6.3). On a donc $\frac{t}{\varphi^{n-1}(\pi)} \mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]} = t\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}r]}$ et, quitte à remplacer $\sigma \mapsto c'_\sigma$ par un cocycle cohomologue dans $\mathbf{B}_K^{]0,p^{-n}s]}$, on peut supposer que notre cocycle est de la forme $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (a \log \pi)$, avec $a \in F$, d'après la proposition 10.6. Appliquant φ^{-n} au cocycle

$\sigma \mapsto c'_\sigma$, on voit que, quitte à remplacer notre cocycle initial par un cocycle cohomologue dans $\varphi^{-n}(\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}s]}) = \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}$, on peut supposer que l'on a $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot (a \log \pi_n)$, ce qui permet de conclure puisque

$$\log \pi_n = \varphi^{-n}(\log \pi) \in \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} u + \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}$$

d'après le corollaire 6.3 (on a $p^n > s$ par hypothèse).

Proposition 10.8. — *Soient $r \in]1,p[$ et $s \in]1,r[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un cocycle continu $\sigma \mapsto c_\sigma$ sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[u]$:*

(i) *il existe $b \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,s]}[u]$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot b$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$;*

(ii) *quel que soient $k \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$, il existe $c_{k,i} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$, l'on ait $N^k(\varphi^{-i}(c_\sigma)) = (\sigma - 1) \cdot (c_{k,i})$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur le plus petit entier k tel que $N^{k+1} c_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$ (l'existence d'un tel k résultant de la compacité de $\mathscr{G}_K$). Le cas $k = 0$ a été traité dans la proposition 10.7. Dans le cas général, si $c_\sigma = c_{k,\sigma} u^k + \cdots + c_{0,\sigma}$, on peut appliquer la proposition 10.7 au cocycle $\sigma \mapsto N^k(c_\sigma) = (-1)^k k! c_{k,\sigma}$. Il existe donc, si $r' \in]s,r[$, des éléments $a_{k,0} \in F$ et $b_{k,0} \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r']}$ tels que l'on ait $(-1)^k k! c_{k,\sigma} = (\sigma - 1) \cdot (a_{k,0} u + b_{k_0})$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_K$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au cocycle $\sigma \mapsto c_\sigma - (\sigma - 1) \cdot (a_{k,0} \frac{u^{k+1}}{k+1} + b_{k_0} u^k)$; ceci permet de conclure.

10.6. Un résultat du type « $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ » pour $\mathbf{U}_{h,a}$ et $\mathbf{U}'_{h,a}$. — Ce n° termine la démonstration de la proposition 0.4.

Lemme 10.9. — *Si $h \geqslant 1$ et $a \geqslant 1$, alors $\varphi^h - p^a : F \to F$ est bijectif.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\varphi^h - p^a : \mathscr{O}_F \to \mathscr{O}_F$ est bijectif, et comme $\mathscr{O}_F$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, il suffit de prouver le résultat modulo p, ce qui est évident car $\varphi^h - p^a$ coïncide avec $x \mapsto x^{p^h}$ et k_F est parfait.

Lemme 10.10. — *Soit $r > 0$.*

(i) *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ vérifie $\varphi^h(x) = p^a x$, alors $x \in \mathbf{U}_{h,a}$.*

(ii) *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[u]$ vérifie $\varphi^h(x) = p^a x$, alors $x \in \mathbf{U}'_{h,a}$.*

Démonstration. — Écrivons x sous la forme $\alpha + \beta$, avec $\alpha \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\beta = \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^k [x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$. On a $\varphi^h(\beta) - p^a \beta = p^a \alpha - \varphi^h(\alpha) \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \widetilde{\mathbf{B}}^+$, et une récurrence immédiate montre que ceci implique $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant 0$ quel que soit $k \geqslant k_0$, et donc $\beta \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit de constater que, si $x = x_0 + x_1 u + \cdots + x_k u^k$ vérifie $\varphi^h(x) = p^a x$, avec $x_i \in \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ si $0 \leqslant i \leqslant k$, alors $\varphi^h(x_i) = p^{a-ih} x_i$, ce qui permet de se ramener au (i) pour conclure.

Proposition 10.11. — *Soient a et h des entiers $\geqslant 1$.*

(i) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathbf{U}_{h,a}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe $c_n \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ tel que $\varphi^{-n}(c_\sigma) = (\sigma - 1) \cdot c_n$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Alors, si $a \neq h$ (resp. si $a = h$) il existe $c \in \mathbf{U}_{h,a}$ (resp. $c \in E_h^{\mathscr{G}_K} u + \mathbf{U}_{h,a}$) tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$.*

(ii) *Soit* $\sigma \mapsto c_\sigma$ *un* 1*-cocycle continu à valeurs dans* $\mathbf{U}'_{h,a}$ *tel que, quel que soient* $k \in \mathbf{N}$ *et* $n \in \mathbf{N}$*, il existe* $c_{k,n} \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ *tel que* $N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma)) = (\sigma - 1) \cdot c_{k,n}$*, pour tout* $\sigma \in \mathscr{G}_K$*. Alors il existe* $c \in \mathbf{U}'_{h,a}$ *tel que l'on ait* $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$ *pour tout* $\sigma \in \mathscr{G}_K$*.*

Démonstration. — Pour démontrer le (i), choisissons $r \in]1, p[$ et considérons notre cocycle comme étant à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. La proposition 10.7 nous fournit alors $c_0 \in Fu + \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c_0$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K$. Par ailleurs, comme c_σ est tué par $\varphi^h - p^a$, on a $\varphi^h(c_0) - p^a c_0 \in K \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]} = F$. D'après le lemme 10.9, on peut trouver $c_1 \in F$ tel que $\varphi^h(c_1) - p^a c_1 = \varphi^h(c_0) - p^a c_0$ et $c = c_0 - c_1$ répond à la question comme le montre le (i) du lemme 10.10.

Le (ii) se démontre de la même manière en considérant le cocycle comme étant à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[u]$ et en utilisant la proposition 10.8 au lieu de la proposition 10.7 et le (ii) du lemme 10.10 au lieu du (i) dudit lemme.

Références

[1] F. Andreatta et O. Brinon, Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif, ce volume.

[2] Y. André, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Inv. Math. **148** (2002), 285–317.

[3] L. Berger, *Représentations p-adiques et équations différentielles*, thèse de l'université Paris 6 (2001).

[4] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Inv. Math. **148** (2002), 219–284.

[5] L. Berger et P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, ce volume.

[6] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Inv. Math. **133** (1998), 581–611.

[7] F. Cherbonnier et P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J.A.M.S. **12** (1999), 241–268.

[8] G. Christol, About a Tsuzuki theorem, *p-adic functional analysis (Ioannina, 2000)*, 63–74, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **222**, Dekker, 2001.

[9] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[10] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Sém. Bourbaki 2001/02*, exp. 897, Astérisque **290** (2003), 53-101.

[11] P. Colmez, Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham, preprint 2003.

[12] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Inv. Math. **140** (2000), 1–43.

[13] R. Crew, Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, Ann. scient. E.N.S. **31** (1998), 717–763.

[14] J-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Math. **115** (1982), 529–577.

[15] J-M. Fontaine, Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques, *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto,1982)*, SLN **1016** (1983), 86–108.

[16] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, *The Grothendieck Festschrift*, vol II, Birkhauser, Boston 249–309, 1991.

[17] J-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques* exp. II, Astérisque **223** (1994), 59–102.

[18] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables. *Périodes p-adiques*, exp. III, Astérisque **223** (1994) 113–184.

[19] J-M. Fontaine, exposé à Orsay, 1998.

[20] J-M. Fontaine, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay, 2004.

[21] J-M. Fontaine et J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. **288** (1979) 367–370.

[22] L. Herr, Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, Bull. S.M.F. **126** (1998), 563–600.

[23] O. Hyodo, $H^1_g(K,V) = H^1_{\mathrm{st}}(K,V)$, *proceedings of a symposium on arithmetic geometry*, ed. K. Kato, M. Kurihara, T. Saito, Univ. Tokyo (1991).

[24] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[25] Z. Mebkhout, Analogue p-adique du théorème de Turritin et le théorème de la monodromie p-adique, Inv. Math. **148** (2002), 319–351.

[26] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[27] J-P. Serre, *Corps locaux*, Deuxième édition. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. 245 pp.

[28] J. Tate, p-divisible groups, *Proc. Conf. Local Fields* (*Driebergen, 1966*) 158–183 Springer, Berlin.

[29] N. Tsuzuki, Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystal on a curve, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.

[30] J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci. E.N.S. **16** (1983), 59–89.

Pierre Colmez, École Polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France • Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.polytechnique.fr`