REPRÉSENTATIONS DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET (φ, Γ)-MODULES (VERSION PROVISOIRE ET PARTIELLE)

par

Pierre Colmez

Résumé. — Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$. Nous construisons un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, lisses et de longueur finie, dans celle des $\mathscr{O}_L$-représentations de longueur finie du groupe de Galois absolu $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$. Ce foncteur s'étend, en prenant des limites projectives et en inversant p, en un foncteur de la catégorie des L-représentations unitaires continues de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, de longueur finie, dans celle des L-représentations de dimension finie de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Nous démontrons les résultats nécessaires pour, suivant une stratégie de Kisin, établir que ce foncteur réalise une correspondance de Langlands locale p-adique (pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Table des matières

Introduction

0.1. Notations

Dans ce qui suit, L désigne une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et de corps résiduel k_L. Si Λ est un anneau topologique, soit $\widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \Lambda^*$. L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)),$$

où $\deg(g)$ est l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$, si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Si $n \to \delta(p^n)$ se prolonge par continuité à $\widehat{\mathbf{Z}}$, alors δ se prolonge par continuité à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. C'est en particulier le cas si $\Lambda = k_L$ ou si $\Lambda = L$ et si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$). En particulier, le caractère $x \mapsto x|x|$ correspond au caractère cyclotomique χ et sa réduction modulo p, notée ω correspond au caractère de Teichmüller.

0.2. La conférence de Montréal

La correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations triangulines [**10, 5, 11**], de dimension 2, de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, présente un aspect très encourageant quand on la compare à la correspondance de Langlands locale classique. En effet, si V est une représentation trianguline, irréductible, de dimension 2, de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, si $\Pi(V)$ est la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui correspond, et si $\mathbf{D}(V)$ est le (φ,Γ)-module qui lui est attaché par l'équivalence de catégories de Fontaine [**14**], alors on dispose d'une description directe du dual de $\Pi(V)$ en termes de $\mathbf{D}(V)$. De manière précise, on a un isomorphisme de B-modules, où B est le sous-groupe de Borel de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$,

$$\Pi(V)^* \cong \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(V^*(1))).$$

La démonstration consiste à expliciter les deux membres et n'est pas particulièrement éclairante...

Il est un peu difficile d'extraire le (φ,Γ)-module D du B-module $\psi^{-\infty}(D)$ (dont la définition est rappelée au n$^{\text{o}}$ 1.1.1), mais en cherchant à le faire, je me suis aperçu que l'on obtenait de la sorte un foncteur $\Pi\mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ de la catégorie des L-représentations unitaires (admettant un caractère central), admissibles, de longueur finie, de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans celle des L-représentations de dimension finie de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, avec $\Pi^*\cong\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\mathbf{V}(\Pi)^*(1)))$, en tant que représentation de B. La représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ n'a aucune raison d'être de dimension 2 (ce qui est un peu génant pour une correspondance de Langlands), mais si Π est *superadmissible*, c'est-à-dire si la réduction $\overline{\Pi}$ de Π modulo $\mathfrak{m}_L$ est un *atome automorphe* (i.e. est la réduction d'une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ attachée à une représentation trianguline irréductible de dimension 2), alors $\mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 2. J'ai annoncé ces résultats lors de la conférence de Montréal de septembre 2005, en terminant mon exposé par trois questions.

(Q1) Est-ce-que $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$ est injective, ou plutôt, est-ce-qu'une représentation superadmissible de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est déterminée par sa restriction au borel ?

(Q2) Quelle est l'image de $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$? Elle contient les triangulines, mais obtient-on tout ?

(Q3) Est-ce-que $\dim\mathbf{V}(\Pi)\leqslant 2$, si Π est irréductible et admissible ?

Si (Q3) a une réponse négative, cela suggère qu'il existe des extensions entre k_L-représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ autres que celles fournies par les atomes automorphes (dont les semi-simplifiés ont été déterminés par Berger [**4**], en utilisant des calculs de réductions modulo p de Breuil [**7**] et de Breuil-Mézard [**8**]). Emerton a alors vérifié, pendant la conférence, que les seules extensions entre séries principales modulo p sont celles sortant des calculs de Breuil et Mézard, et qu'il n'y a pas d'extension non triviale du type $0\to\Pi_1\to E\to\Pi_2\to 0$, où Π_1 est supersingulière et Π_2 est de la série principale.

Peu de temps après la conférence, Kisin m'a envoyé un courriel m'expliquant comment une réponse positive (et même quelque chose de beaucoup plus faible) à (Q1) impliquerait une réponse positive à (Q1) et (Q2) en utilisant la Zariski densité des triangulines dans l'espace de toutes les représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (1). L'argument de Kisin est le suivant. Si $\overline{\Pi}$ est un atome automorphe, alors le foncteur $\mathbf{V}$ induit un morphisme $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ de l'espace des déformations de $\overline{\Pi}$ dans celui des

(1) Cette densité peut se vérifier [**12**] par un argument adapté de la « fougère infinie » de Gouvêa et Mazur [**16**], qui ont utilisé cet argument pour démontrer un résultat du même type, mais global (i.e. pour démontrer la Zariski densité des représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ attachées aux formes modulaires surconvergentes ; ces représentations sont précisément celles dont la restriction à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline [**19**])

déformations de $\mathbf{V}(\overline{\Pi})$. Si $\mathbf{V}$ induit une injection de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\overline{\Pi},\overline{\Pi})$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\overline{\Pi}),\mathbf{V}(\overline{\Pi}))$, alors $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ est une immersion fermée, et comme son image contient les triangulines qui sont Zariski denses, cela implique que $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ est un isomorphisme.

0.3. Contenu de l'article

Cet article contient ce qu'il faut pour faire marcher la stratégie de Kisin (à quelques cas près en caractéristiques résiduelles 2 et 3). Le lecteur y trouvera les ingrédients suivants.

• Une construction du foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$ (bien simplifiée depuis la conférence de Montréal).

• Une classification des atomes automorphes (à quelques exceptions près si $p=2$ ou $p=3$). Il y a en général une seule possibilité une fois que l'on connait la semi-simplifiée, mais dans le cas où $\mathbf{V}(\overline{\Pi})$ est une extension de 1 par ω, la semi-simplifiée de $\overline{\Pi}$ a 3 composantes dont une est de dimension 1. Le rôle que devait jouer ce petit morceau de dimension 1 en relation avec la classe de l'extension de 1 par ω du côté galoisien, m'a été expliqué par Emerton et Kisin dans une série de courriels en janvier 2006.

• Une preuve de l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\overline{\Pi},\overline{\Pi})\to\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\overline{\Pi}),\mathbf{V}(\overline{\Pi}))$ pour les atomes automorphes dans la liste obtenue ci-dessus.

Il y trouvera aussi quelques résultats qui ne sont pas directement reliés à la stratégie de Kisin.

• Une preuve de l'existence de présentations pour les représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ analogue à celle existant en caractéristiques 0 et $\ell\neq p$ (cas particulier de résultats de Schneider-Stuhler [**21**] et Vigneras [**22**]). Les résultats de Breuil et Paskunas [**9**] sur les représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_{p^2})$ laissent entendre que ceci est très particulier à $\mathbf{Q}_p$.

• Quelques calculs, utilisant le foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$ de $\mathrm{Ext}^1(\Pi_1,\Pi_2)$, pour des k_L-représentations irréductibles Π_1,Π_2 de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il manque malheureusement le cas où Π_1 et Π_2 sont supersingulières et distinctes. Emerton [**13**] a obtenu des résultats similaires par une autre méthode.

0.4. Remerciements

Comme l'introduction le montre amplement, le rôle joué par Emerton et Kisin dans la genèse de cet article a été très important. Les travaux de Berger, Breuil et Mézard ont servi de fil conducteur pour beaucoup de résultats de cet article. Finalement, je voudrais remercier A. Iovita et H. Darmon et le CRM de Montréal, ainsi que J.Schwermer et l'Institut Erwin Shrödinger de Vienne, pour leur hospitalité ; les exposés que j'ai donnés lors des conférences à ces deux endroits m'ont grandement aidé à mettre mes idées au clair.

1. (φ,Γ)-modules et représentations galoisiennes

Ce § vise, d'une part à rappeler un certain nombre de résultats de base de la théorie des (φ,Γ)-modules, et, d'autre part, à calculer explicitement les (φ,Γ)-modules attachés aux k_L-représentations de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Ceci nous permettra de comparer (cf. § 6) les résultats avec ceux provenant des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

1.1. Rappels

1. L'équivalence de catégories de Fontaine

On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des séries de Laurent

$$\mathscr{O}_{\mathscr{E}} = \{\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n,\ a_n \in \mathscr{O}_L,\ \lim_{n\to-\infty} v_p(a_n) = +\infty\}.$$

C'est un anneau commplet pour la valuation discrète v_p, de corps résiduel $k_L((T))$. On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de φ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$, respectant la structure d'anneau, par

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \quad \text{et} \quad \gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1.$$

Ces actions commutent entre elles.

Un (φ,Γ)*-module de longueur finie sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de longueur finie muni d'actions semi-linéaires de φ et Γ qui commutent entre elles. Un tel module D est *étale* si $\varphi(D)$ engendre D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Proposition 1.1. — (Fontaine) *La catégorie des (φ,Γ)-module étale, de longueur finie sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est équivalente à celle des $\mathscr{O}_L$-représentations de longueur finie de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Remarque 1.2. — L'équivalence de catégories de Fontaine [**14**] peut se décrire explicitement, en introduisant l'anneau $\mathbf{A}$, complété de l'anneau des entiers de l'extension maximale non ramifiée de $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ (pour $L = \mathbf{Q}_p$), que l'on munit d'une action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ grâce à la théorie du corps des normes [**15, 25**]. Les deux foncteurs

$$V \mapsto \mathbf{D}(V) = (\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\varphi=1} \quad \text{et} \quad D \mapsto \mathbf{V}(D) = \big((\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathscr{O}_L)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D\big)^{\ker\chi}$$

sont inverses l'un de l'autre et réalisent l'équivalence de catégories de la proposition.

Si D est un (φ,Γ)-module étale, de longueur finie sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, il existe sur D un unique $\psi : D \to D$ vérifiant $\psi((1+T)^i\varphi(x)) = x$, si $i = 0$, et $\psi((1+T)^i\varphi(x)) = 0$, si $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Cet opérateur commute à l'action de Γ et est un inverse à gauche de φ. On définit alors le module $\psi^{-\infty}(D)$ comme l'ensemble des suites bornées $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de D vérifiant $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$.

2. (φ,Γ)-modules et cohomologie galoisienne

Rappelons que l'on a défini une application résidu $\mathrm{Res} : \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to \mathscr{O}_L$, par $\mathrm{Res}(x) = \mathrm{res}(x\frac{dT}{1+T})$, et que cette application résidu donne naissance à des applications $\mathrm{Res} : \mathscr{E} \to L$ et $\mathrm{Res} : \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to L/\mathscr{O}_L$. On en déduit un accouplement $[\ ,\ ]$ parfait entre $D(V^\vee(1))$ et $D(V)$ à valeurs dans $L/\mathscr{O}_L$, si V est une $\mathscr{O}_L$-représentation de longueur finie de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Dans cet accouplement, l'application transposée de φ est ψ et celle de γ est γ^{-1}.

Soit γ un générateur topologique de Γ, et si $f \in \{\varphi,\psi\}$, soit et $C_{f,\gamma}(V)$ le complexe (c'est un complexe car f et γ commutent)

$$0 \to D(V) \xrightarrow{x\mapsto((f-1)\cdot x,\,\frac{\gamma-1}{p^{-1}\log\chi(\gamma)}\cdot x)} D(V)\oplus D(V) \xrightarrow{(a,b)\mapsto\frac{\gamma-1}{p^{-1}\log\chi(\gamma)}\cdot a-(f-1)\cdot b} D(V) \to 0.$$

Rappelons que l'accouplement $[\ ,\ ]$ induit une dualité parfaite entre $D(V^\vee(1))$ et $D(V)$. Un petit calcul montre que, si on munit $(D(V^\vee(1))\oplus D(V^\vee(1)))\times(D(V)\oplus D(V))$ de l'accouplement

$[(a,b),(a',b')] = -[a,b'] - [a',b]$, alors les complexes $C_{\psi,\gamma^{-1}}(V^\vee(1))$ et $C_{\varphi,\gamma}(V)$ sont en dualité. On a alors le résultat suivanti [**17, 18**].

Proposition 1.3. — *(i) Quelque soit $i \in \mathbf{N}$, on a des isomorphismes $H^i(C_{\varphi,\gamma}(V)) \cong H^i(C_{\psi,\gamma}(V)) \cong H^i(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, V)$, l'isomorphisme $H^i(C_{\varphi\gamma}(V)) \cong H^i(C_{\psi,\gamma}(V))$ étant induit par le morphisme de complexes de $C_{\varphi,\gamma}(V)$ dans $C_{\psi,\gamma}(V)$ dont la flèche du milieu est $(a,b) \mapsto (-\psi(a), b)$.*

(ii) La dualité induite entre les groupes $H^i(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, V^\vee(1))$ et $H^{2-i}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, V)$ par la dualité entre les complexes $C_{\psi,\gamma^{-1}}(V^\vee(1))$ et $C_{\varphi,\gamma}(V)$ est la dualité locale de Poitou-Tate.

Un des ingrédients principaux pour démontrer ce résultat est le fait que $\gamma - 1$ a un inverse continu sur $D^{\psi=0}$, si D est un (φ,Γ)-module étale de longueur finie sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Plus généralement, on montre [**10**], que si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ est unitaire, alors $P(\gamma)$ est inversible sur $D(V)^{\psi=0}$.

Proposition 1.4. — *Si V est une $\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de $D(V)$ stable par Γ, alors $M \subset W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, V)$.*

Démonstration. — Soit γ un élément d'ordre infini de Γ. Comme M est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $P \in \mathscr{O}_L[X]$ tel que $P(\gamma)\cdot M = 0$. Or $P(\gamma)$ est inversible sur $D(V)^{\psi=0}$, et comme on peut écrire tout élément de $D(V)$, de manière unique, sous la forme $x = \varphi^n(y_n) + \varphi^{n-1}(x_{n-1}) + \cdots + x_0$, avec $y_n \in D(V)$ et $x_0, \cdots, x_{n-1} \in D(V)^{\psi=0}$, l'injectivité de $P(\gamma)$ sur $D(V)^{\psi=0}$ implique $x_0, \cdots, x_{n-1} = 0$ si $P(\gamma)\cdot x = 0$. Autrement dit, $P(\gamma)\cdot x = 0$ implique $x \in \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(D(V)) \subset \big(\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{A})\big) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$. Le résultat suit de ce que $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}$ agit trivialement sur $W(\overline{\mathbf{F}}_p)$.

3. Les modules D^+, $D^\natural$ et $D^\sharp$

Si D est un (φ,Γ)-module étale de longueur finie sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on définit [**17, 10**] des sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-modules de type fini $D^+ \subset D^\natural \subset D^\sharp$, par :

- D^+ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-modules de type fini de D stable par φ ;
- $D^\sharp$ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-modules de type fini de D sur lequel ψ est surjectif ;
- $D^\natural = \psi(TD^\sharp)$ est le plus petit sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-modules de type fini de D engendrant D, et sur lequel ψ est surjectif.

Alors $\psi^{-\infty}(D) = \psi^{-\infty}(D^\sharp)$, et $\psi^{-\infty}(D^\natural)$ est d'indice fini dans $\psi^{-\infty}(D)$.

Soit V une $\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Le module $D^\sharp(V)/D^\natural(V)$ étant de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, et ψ étant surjectif, l'application $(x^{(n)}_{n\in\mathbf{N}} \mapsto x^{(0)}$ induit un isomorphisme de $\psi^{-\infty}(D^\sharp(V)/D^\natural(V))$ sur $D^\sharp(V)/D^\natural(V)$, ce qui permet de munir $D^\sharp(V)/D^\natural(V)$ d'une action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Par ailleurs, un $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module sur lequel $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}$ agit trivialement est aussi muni d'une action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, en faisant agir trivialement $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et en utilisant l'isomorphisme $\mathbf{Q}_p^* \cong W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \subset \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}$ de la théorie locale du corps de classes.

Proposition 1.5. — *Si V est une $\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on a isomorphisme naturel de $\mathscr{O}_L[\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-modules*

$$D^\sharp(V)/D^\natural(V) \cong H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, V^\vee(1))^\vee.$$

Démonstration. — $D^\sharp(V)/D^\natural(V)$ est le dual du plus grand sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de $D(V^\vee(1))$ stable par φ, et comme un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de $D(V^\vee(1))$ stable par φ est inclus dans $W(\overline{\mathbf{F}}_p)\otimes H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, V^\vee(1))$, le résultat s'en déduit.

1.2. Atomes galoisiens

Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $k_L(\delta)$ la k_L-représentation de dimension 1 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, sur laquelle $g\in\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par $\delta(g)$.

Un *atome galoisien* (sous-entendu : de dimension 2 pour $\mathbf{Q}_p$) est une k_L-représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 qui n'est pas somme directe de deux caractères ou la tordue par un caractère d'une extension de $k_L(\omega)$ par k_L.

Toute L-représentation irréductible V de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, admet un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 tel que $k_L\otimes V^0$ ne soit pas somme de deux caractères. Si $p\geqslant 5$, toute L-représentation irréductible V de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, admet un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 tel que $k_L\otimes V^0$ soit un atome galoisien.

La raison pour éliminer les extensions de $k_L(\omega)$ par k_L (et leurs tordues) est la suivante : si V est une L-représentation irréductible de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, admettant un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 tel que $k_L\otimes V^0$ soit une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L, alors V admet aussi un réseau V^1 tel que $k_L\otimes V^0$ soit une extension non triviale de k_L par $k_L(\omega)$, et une extension non triviale de k_L par $k_L(\omega)$ contient plus d'information qu'une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L. Malheureusement, $p=2$ et $p=3$ posent quelques problèmes car on a $\omega^{-1}=\omega$, et une extension non triviale de k_L par $k_L(\omega)$ est aussi, à torsion près, une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L. Nous serons donc obligé de laisser quelques cas de côté, si $p=2$ ou $p=3$.

Il est très facile de faire la liste des atomes galoisiens (cf. prop. 1.6).

Soit $\mathbf{Q}_{p^2}$ l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et soit $\mathbf{Z}_{p^2}$ l'anneau de ses entiers. Soit $\mathscr{F}$ le groupe de Lubin-Tate sur K associé à $pX+X^{p^2}$, et soit $T_p(\mathscr{F})$ son module de Tate. Le $\mathbf{Z}_p$-module $T_p(\mathscr{F})$ est libre de rang 2 et est muni d'une action continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La restriction de cette action à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}$ est donnée par un caractère $\chi_{\mathscr{F}}:\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}\to\mathbf{Z}_{p^2}^*$ qui correspond, via la théorie locale du corps de classes, au caractère $x\mapsto x|x|$ de $\mathbf{Q}_{p^2}^*$. En notant ind l'induction de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}$ à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on déduit de ce qui précède un isomorphisme $T_p(\mathscr{F})\cong\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}})$ de représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La réduction modulo p de $\chi_{\mathscr{F}}$ est ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2.

Si $r\in\mathbf{Z}$ et $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $V(r,\delta)$ la représentation $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})\otimes\delta$ de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $0\leqslant r\leqslant p-1$, la représentation $V(r,\delta)$ est irréductible, et toute k_L-représentation irréductible de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $V(r,\delta)$ pour un couple convenable (r,δ), avec $0\leqslant r\leqslant p-1$ et $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$.

Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ sont tels que $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega\}$, alors $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p},k_L(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est un k_L-espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc, à isomorphisme près, une unique extension non triviale $V(\delta_1,\delta_2)$ de $k_L(\delta_2)$ par $k_L(\delta_2)$.

Comme ci-dessus, on peut aussi voir un élément de τ de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,A)$, groupe des morphismes continus de $\mathbf{Q}_p^*$ dans A, comme un élément de $\mathrm{Hom}(W_{\mathbf{Q}_p},A)$, et comme un élément de $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p},A)$. De manière explicite, si $g\in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,A)$, alors $\tau(g)=\tau(\chi(g))-\deg(g)\tau(p)$.

Si $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est non nul, et si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $V(\delta,\delta,\tau)$ le k_L-espace vectoriel $k_Le_1\oplus k_Le_2$ de dimension 2 muni de l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ donnée par $g(e_1)=\delta(g)e_1$ et $g(e_2)=$

$\delta(g)(e_2 + \tau(g)e_1)$. Alors $V(\delta,\delta,\tau)$ est une extension non triviale de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ qui est, à isomorphisme près, déterminé par la droite de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) \cong H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L)$ engendrée par τ. De plus, toute extension non triviale de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ est isomorphe à $V(\delta,\delta,\tau)$ pour un certain $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$.

Si $p \neq 2$, alors $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ et $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ sont des k_L-espaces vectoriels de dimension 2, et le cup-produit $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L) \times H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega)) \to H^2(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega)) \cong k_L$ met ces deux espaces en dualité parfaite. Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, on note $V(\omega, 1, \tau^\perp)$ l'extension de k_L par $k_L(\omega)$ dont la classe dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ engendre l'orthogonal de ω. Plus généralement, si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, et si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$ la représentation $V(\omega, 1, \tau^\perp) \otimes \delta$. Ceci fait de $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$ une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta\omega)$, et toute extension non triviale de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta\omega)$ est isomorphe à $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$ pour un certain $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$.

Proposition 1.6. — *Un atome galoisien est isomorphe à une des représentations suivantes :*
- $V(r,\delta)$, *avec* $0 \leqslant r \leqslant p-1$ *et* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$,
- $V(\delta_1, \delta_2)$, *avec* $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\delta_1\delta_2^{-1} \notin \{1, \omega, \omega^{-1}\}$,
- $V(\delta,\delta,\tau)$, *avec* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$,
- $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$, *avec* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$ (si $p \neq 2$).

Remarque 1.7. — On a $V(r,1) = V(p-1-r, \omega^r)$ et, à torsion près par un caractère, c'est le seul isomorphisme entre atomes galoisiens.

1.3. Les (φ,Γ)-modules attachés aux atomes galoisiens

1. Atomes irréductibles. — Si $r \in \mathbf{Z}$, le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r}))$ peut se décrire explicitement de la manière suivante. Soit $q = \frac{\varphi(T)}{T} = T^{p-1} + pT^{p-2} + \cdots + \binom{p}{2}T + p \in \mathbf{Z}_p[T]$. Si $\gamma \in \Gamma$, on a $\frac{\gamma(q)}{q} \in 1 + T\mathbf{Z}_p[[T]]$, ce qui fait que les produits infinis

$$a_+(\gamma) = \prod_{n=0}^{+\infty} \varphi^{2n+1}\big(\frac{\gamma(q)}{q}\big) \quad \text{et} \quad a_-(\gamma) = \prod_{n=0}^{+\infty} \varphi^{2n}\big(\frac{\gamma(q)}{q}\big)$$

convergent dans $1 + T\mathbf{Z}_p[[T]]$.

Proposition 1.8. — *Si* $r \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r})) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} e_{r,1} \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{E}} e_{r,2}$, *les actions de* φ *et* Γ *étant données par*

$$\varphi(e_{r,1}) = q^r e_{r,2}, \quad \varphi(e_{r,2}) = e_{r,1}$$
$$\gamma(e_{r,1}) = a_+(\gamma)^{-r} e_{r,1}, \quad \gamma(e_{r,2}) = a_-(\gamma)^{-r} e_{r,2}.$$

Démonstration. — cf. [**3**].

La réduction modulo p de $\chi_{\mathscr{F}}$ est ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2, et la réduction modulo p de $\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r})$ est la représentation $\mathrm{ind}(\omega_2^{-r})$, dont le (φ,Γ)-module est la réduction modulo p de celui de $\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r})$.

Proposition 1.9. — *(i) Si $r\in\mathbf{Z}$, alors $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))=k_L((T))e_{r,1}\oplus k_L((T))e_{r,2}$, les actions de φ et Γ étant données par*

$$\varphi(e_{r,1})=T^{(p-1)r}e_{r,2},\quad \varphi(e_{r,2})=e_{r,1}$$
$$\gamma(e_{r,1})=a_+(\gamma)^{-r}e_{r,1},\quad \gamma(e_{r,2})=a_-(\gamma)^{-r}e_{r,2}.$$

(ii) Si $1\leqslant r\leqslant p$, alors $D^\sharp(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))=D^\natural(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))=k_L[[T]]\frac{e_{r,1}}{T^r}\oplus k_L[[T]]\frac{e_{r,2}}{T}$.

Démonstration. — Le (i) est juste la réduction modulo p de la prop. 1.8. Maintenant, si $x\in k_L((T))$, on a $\psi(x\frac{e_{r,1}}{T^r})=\psi(T^{-r}x\varphi(e_{r,2}))=T^{-1}\psi(T^{p-r}x)e_{r,2}$ et $\psi(x\frac{e_{r,2}}{T})=\psi(T^{r-1}xT^{-rp}\varphi(e_{r,1}))=T^{-r}\psi(T^{r-1}x)e_{r,1}$. On en déduit le fait que ψ induit une surjection de $M=k_L[[T]]\frac{e_{r,1}}{T^r}\oplus k_L[[T]]\frac{e_{r,2}}{T}$ sur lui-même. De plus, comme $1\leqslant r\leqslant p$, on a $p-r\geqslant 1$ ou $r-1\geqslant 1$, ce qui montre que $\psi^{n+1}(T^{-p^n}M)\subset M$, et donc que $M=D^\sharp(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))$. De même, on a $p-r\leqslant p-2$ ou $r-1\leqslant p-2$, ce qui permet de montrer que $\psi(TM)=M$, et donc que $M=D^\natural(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire 1.10. — *En tant que représentation de Γ, on a $D^\natural(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))/T\cong\omega^{-1}\oplus\omega^{-r}$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de ce que $a_+(\gamma)\equiv a_-(\gamma)\equiv 1$ modulo T et de ce que $\frac{\gamma(T)}{T}\equiv\omega(\gamma)$ modulo T.

2. Extension de deux caractères génériques

Proposition 1.11. — *Si $\delta_1\neq\delta_2$ sont deux éléments de $\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, et si V est une extension non triviale de $k_L(\delta_2)$ par $k_L(\delta_1)$, alors $D^\natural(V)$ contient $0\to\frac{1}{T}k_L[[T]](\delta_1)$*

Démonstration. — Comme $D^\sharp(k_L(\delta))=\frac{1}{T}k_L[[T]](\delta)$, si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on a des suites exactes

$$0\to M\to D^\sharp(V)\to\frac{1}{T}k_L[[T]](\delta_2)\to 0,$$
$$0\to M'\to D^\natural(V)\to\frac{1}{T}k_L[[T]](\delta_2)\to 0,$$

où M contient $\frac{1}{T}k_L[[T]](\delta_1)$ et M' contient $k_L[[T]](\delta_1)$. Par ailleurs, $D^\sharp(V)/D^\natural(V)\cong H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}},V^\vee(1))^\vee$ est de dimension 1 sur k_L (s'il était de dimension 2, cela impliquerait que $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ sur V, et comme $\delta_1\neq\delta_2$, on en déduirait que V est scindée). On en déduit que $M=M'$, ce qui permet de conclure.

3. Extensions de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$

Comme on l'a vu plus haut, une extension non triviale V de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ est isomorphe à $V(\delta,\delta,\tau)$ pour un certain $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ (unique à multiplication près par un élément de k_L^*). Il existe donc une base e_1,e_2 de V sur k_L dans laquelle l'action de $g\in\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donnée par $g\cdot e_1=\delta(g)e_1$ et $g\cdot e_2=\delta(g)(e_2+\tau(g)e_1)$. Comme δ et τ se factorise à travers $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$, le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ est très facile à calculer : il existe une base f_1,f_2 de $\mathbf{D}(V)$ sur $k_L((T))$ telle que l'on ait

$$\gamma\cdot f_1=\delta(\gamma)f_1,\quad \gamma\cdot f_2=\delta(\gamma)(f_2+\tau(\gamma)f_1),\quad \varphi(f_1)=\delta(p)f_1,\quad \varphi(f_2)=\delta(p)(f_2+\tau(p)f_1).$$

Il est alors immédiat que

$$\mathbf{D}^\natural(V)=k_L[[T]]\cdot f_1\oplus k_L[[T]]\cdot f_2.$$

4. Extensions de k_L par $k_L(\omega)$. — Dans ce n°, on suppose $p \neq 2$ (si $p = 2$, on a $\omega = 1$, et ce cas est traité au n° précédent). Le groupe $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p^*$ est alors procyclique ce qui permet d'en choisir un générateur topologique γ. Le k_L-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, k_L)$ est de dimension 2 car $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, k_L)$ est uniquement déterminé par ses valeurs en p et $\chi(\gamma)$. Si $u, v \in k_L$, on note $\tau_{u,v}$ l'élément de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, k_L)$ vérifiant $\tau_{u,v}(p) = u$ et $\tau_{u,v}(\chi(\gamma)) = v$.

Proposition 1.12. — (i) *Il existe $c \in \mathbf{F}_p$ unique, tel que $(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot \big(\frac{1}{T} + c\big) \in k_L[[T]]$. De plus, la série $F = \sum_{n=1} \varphi^n\big((\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot \big(\frac{1}{T} + c\big)\big)$ converge dans $k_L[[T]]$ vers une solution de l'équation $(\psi - 1) \cdot F = \frac{1}{T} + c$.*

(ii) *Si $\alpha, \beta \in k_L$, l'équation $(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot x = (\varphi - 1) \cdot y_{\alpha,\beta}$, avec $y_{\alpha,\beta} = \big(\alpha\frac{1}{T} + \beta F\big)$ a une solution unique $x_{\alpha,\beta}$ dans $k_L((T))$.*

(iii) *Le $k_L((T))$-module $D_{\alpha,\beta} = k_L((T))e_1 \oplus k_L((T))e_2$, muni des actions de φ et Γ définies par*

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_2) = e_2 + x_{\alpha,\beta}e_1,$$
$$\gamma(e_1) = \omega(\gamma)e_1, \quad \gamma(e_2) = e_2 + y_{\alpha,\beta}e_1,$$

est un (φ, Γ)-module étale sur $k_L((T))$, extension de $k_L((T))$ par $k_L((T))(\omega)$, et l'application $D_{\alpha,\beta} \to (\alpha, \beta)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1(k_L((T)), k_L((T))(\omega))$ sur k_L^2.

(iv) *On a $\psi(e_2) = e_2 + \beta\big(\frac{1}{T} + c\big)e_1$, et $\hat{e} = \big(e_2 - n\beta\big(\frac{1}{T} + c\big)e_1\big) \in \psi^{-\infty}(D_{\alpha,\beta})$. De plus, si $a \in \mathbf{Q}_p^*$, alors $\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \in \psi^{-\infty}\big(\frac{1}{T}k_L[[T]](\omega)\big)$, et $\mathrm{Res}\big(\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2\big) = \tau_{-\beta,\alpha}(a)$.*

Démonstration. — On a $(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot \frac{1}{T} = a_0 + a_1 T + \cdots \in k_L[[T]]$, ce qui fait que si on veut que $(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot \big(\frac{1}{T} + c\big) \in Tk_L[[T]]$, on peut (et doit) poser $c = -\frac{a_0}{\omega(\gamma)-1}$. Le reste du (i) est alors immédiat.

Maintenant, on a $(\varphi - 1) \cdot F = -(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot \varphi\big(\frac{1}{T} + c\big)$, et $(\varphi - 1) \cdot \frac{1}{T} \in k_L((T))^{\psi=0}$ puisque $\psi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}$. L'existence de $x_{\alpha,\beta}$ est donc une conséquence du fait que $\gamma - 1$ est inversible sur $D^{\psi=0}$ pour tout (φ, Γ)-module étale D ; son unicité suit de l'injectivité de $\omega(\gamma)\gamma - 1$ sur $k_L((T))$. De plus, on a par construction $(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot x_{\alpha,\beta} = (\varphi - 1) \cdot y_{\alpha,\beta}$, ce qui permet de vérifier la relation de commutativité nécessaire pour faire de $D_{\alpha,\beta}$ un (φ, Γ)-module sur $k_L((T))$ qui est étale de manière évidente.

On a $\psi(e_2) = \psi(\varphi(e_2) - x_{\alpha,\beta}\varphi(e_1)) = e_2 - \psi(x_{\alpha,\beta})e_1$. Or la démonstration de l'existence de $x_{\alpha,\beta}$ montre que $x_{\alpha,\beta} = -\beta\varphi\big(\frac{1}{T} + c\big)$ à un élément de $k_L((T))^{\psi=0}$ près. On en déduit les formules $\psi(x_{\alpha,\beta}) = -\beta\big(\frac{1}{T} + c\big)$, et $\psi(e_2) = e_2 + \beta\big(\frac{1}{T} + c\big)e_1$. L'appartenance de $\hat{e}_2 = \big(e_2 - n\beta\big(\frac{1}{T} + c\big)e_1\big)$ à $\psi^{-\infty}(D_{\alpha,\beta})$ est alors immédiate. Comme $\mathrm{Res} : k_L((T))(\omega) \to k_L$ est équivariante pour les actions de Γ et φ, l'application $a \mapsto \mathrm{Res}\big(\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2\big)$ est un 1-cocycle sur $\mathbf{Q}_p^*$ à valeurs dans k_L, et donc de la forme $a \mapsto \tau(a)$, avec $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$. Maintenant, si $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(D_{\alpha,\beta})$, on a $\big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot x = (x^{(n+1)})_{n \in \mathbf{N}}$, ce qui nous donne

$$\mathrm{Res}(\big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2) = -\mathrm{Res}(\beta(\frac{1}{T} + c)) = -\beta.$$

De même, $\big(\begin{smallmatrix} \chi(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot x = (\gamma \cdot x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, et donc

$$\mathrm{Res}(\big(\begin{smallmatrix} \chi(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \hat{e}_2 - \hat{e}_2) = \mathrm{Res}(\alpha\frac{1}{T} + \beta F - n\beta(\omega(\gamma)\gamma - 1) \cdot (\frac{1}{T} + c)) = \alpha.$$

Ceci permet de conclure.

Si D est un (φ,Γ)-module quelconque, il résulte de la prop. 1.3 que les groupes $H^1_{\varphi,\gamma}(D)$ et $H^1_{\psi,\gamma^{-1}}(D^\vee(1))$ sont en dualité naturelle, cette dualité étant donnée par

$$[(x,y),(x',y')]=[x,x']-[y,y'].$$

On peut spécialiser cet énoncé au cas de $D=k_L((T))(\omega)$ et $D^\vee(1)=k_L((T))$. Comme on l'a vu plus haut, le groupe $H^1_{\varphi,\gamma}(D)$ est alors le k_L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(\frac{1}{T},0)$ et $(F,\frac{1}{T}+c)$, alors que le groupe $H^1_{\psi,\gamma^{-1}}(D)$ est le k_L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(1,0)$ et $(0,1)$. Ce groupe est aussi isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, l'isomorphisme envoyant $\tau_{u,v}$ sur $(u,-v)$ (le signe correspondant au fait que l'on considère $H^1_{\psi,\gamma^{-1}}$ et pas $H^1_{\psi,\gamma}$).

Proposition 1.13. — *Si $\alpha,\beta\in k_L$ ne sont pas tous les deux nuls, alors $\mathbf{V}(D_{\alpha,\beta})=V(\omega,1,(\tau_{-\beta,\alpha})^\perp)$.*

Démonstration. — La classe de $D_{\alpha,\beta}$ dans $H^1_{\varphi,\gamma}(\mathbf{D}(\omega))$ est $\big(\alpha\frac{1}{T}+\beta F,\beta(\frac{1}{T}+c)\big)$; son cup-produit avec $\tau_{u,v}$ est donc

$$[\big(\alpha\frac{1}{T}+\beta F,\beta(\frac{1}{T}+c)\big),(u,-v)]=\mathrm{Res}(u(\alpha\frac{1}{T}+\beta F)+v\beta(\frac{1}{T}+c))=u\alpha+v\beta,$$

et son orthogonale dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est la droite engendrée par $\tau_{-\beta,\alpha}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Représentations de $\mathbf{GL}_2(F)$

Ce § contient des résultats assez standard concernant les représentations localement constantes (i.e. lisses) de $\mathbf{GL}_2(F)$, où F est un corps local non archimédien.

2.1. $\mathbf{GL}_2(F)$ et ses sous-groupes

Soit F un corps complet pour une valuation discrète v_F, soient $\mathscr{O}_F$ l'anneau des entiers de F, π une uniformisante de F et $k_F=\mathscr{O}_F/\pi\mathscr{O}_F$ le corps résiduel de F.

Soit $G=\mathbf{GL}_2(F)$. On note

- Z le centre de G ; c'est l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)$, avec $a\in F^*$;
- B le sous-groupe de Borel de G ; c'est l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$, avec $a,d\in F^*$, $b\in F$;
- $P=\left(\begin{smallmatrix}F^*&F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe mirabolique, et P^+ le monoïde $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\}&\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.
- $U^+=\left(\begin{smallmatrix}1&F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures, $U^-=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\F&1\end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe des matrices unipotentes inférieures ; si $n\in\mathbf{Z}$, on note $U^+(\pi^n\mathscr{O}_F)$ et $U^-(\pi^n\mathscr{O}_F)$ les sous-groupes $\left(\begin{smallmatrix}1&\pi^n\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\pi^n\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\right)$;
- A le sous-groupe des matrices diagonales, et $A^+=\left(\begin{smallmatrix}F^*&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $A^-=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&F^*\end{smallmatrix}\right)$;
- w la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$;
- Δ le groupe diédral engendré par A et w ;
- $K=\mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_F)$ « le » sous-groupe compact maximal de G. Plus généralement, si $n\in\mathbf{Z}$, on note K_n le sous-groupe de K des matrices congrues à 1 mod p^n (on a donc $K_0=K$).
- Si $n\geqslant 1$, on note I_n le sous-groupe de K des matrices triangulaires inférieures modulo π^n.

Proposition 2.1. — (i) *Le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1&\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\right)$ est $\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$.*

(ii) *Le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1&\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\pi^{-1}\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\right)$ est $\mathbf{SL}_2(F)$.*

Démonstration. — Soit H le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \mathscr{O}_F & 1\end{smallmatrix}\right)$. C'est un sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$. Par ailleurs, si $b\in\mathscr{O}_F^*$, si $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$, si $y=b$, si $x=b^{-1}(d-1)$ et si $z=b^{-1}(a-1)$, on a $x,y,z\in\mathscr{O}_F$ et

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1+yz & y\\ x+z+xyz & xy+1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right).$$

On en déduit le fait que H contient l'ensemble X des $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$ vérifiant $b\in\mathscr{O}_F^*$. En particulier, $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)\in H$, et comme $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$ implique $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in X$ ou $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in X$, cela démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), on peut utiliser le (i) et l'identité

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & -\pi\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & \pi^{-1}\end{smallmatrix}\right),$$

pour en déduire le fait que le sous-groupe H' de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^{-1}\mathscr{O}_F & 1\end{smallmatrix}\right)$ contient $\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$ et $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & \pi^{-n}\end{smallmatrix}\right),\ n\in\mathbf{Z}\right\}$. La théorie des diviseurs élémentaires permet alors de prouver que H' contient $\mathbf{SL}_2(F)$, ce qui permet de conclure.

2.2. L'arbre de $\mathbf{PGL}_2(F)$

On fait agir G sur $Fe_1\oplus Fe_2$ par $g\cdot e_1=ae_1+ce_2$, $g\cdot e_2=be_1+de_2$, si $g=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G$. L'action induite sur $\mathbf{P}^1(F)$ envoie la droite ze_1+e_2 sur $\frac{az+b}{cz+d}e_1+e_2$.

Un *ouvert élémentaire* de $\mathbf{P}^1(F)$ est un ouvert de la forme $D(a,n)=a+\pi^n\mathscr{O}_F$, avec $a\in F$, $n\in\mathbf{Z}$, ou son complémentaire. Si $n\in\mathbf{Z}$, on note $D(\infty,n)$ l'ouvert complémentaire de $D(0,1-n)$; c'est l'image de $D(0,n)$ par $w=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Si f_1,f_2 forment une base de $Fe_1\oplus Fe_2$, on note (f_1,f_2) le $\mathscr{O}_F$-réseau $\mathscr{O}_Ff_1\oplus\mathscr{O}_Ff_2$ de $Fe_1\oplus Fe_2$. Le groupe G agit sur l'ensemble des réseaux de $Fe_1\oplus Fe_2$: si $\Lambda=(f_1,f_2)$ est un tel réseau et $g\in G$, alors $g\cdot\Lambda=(g\cdot f_1,g\cdot f_2)$. Il agit aussi sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des classes d'homothéties de réseaux de $Fe_1\oplus Fe_2$. Comme le stabilisateur de (e_1,e_2) est K, et comme G agit transitivement sur l'ensemble des bases de $Fe_1\oplus Fe_2$, l'ensemble des réseaux de $Fe_1\oplus Fe_2$ est isomorphe, en tant que G-ensemble, à G/K, et l'ensemble des classes d'homothéties est isomorphe à G/KZ.

Soient $s,s'\in\mathscr{S}$. Si on choisit un réseau Λ dans la classe d'homothétie s, il existe Λ' unique dans la classe d'homothétie s' tel que $\Lambda'\subset\Lambda$, et Λ/Λ' soit un $\mathscr{O}_F$-module cyclique. Il existe alors $n=d(s,s')\in\mathbf{N}$ unique tel que $\Lambda/\Lambda'\cong\mathscr{O}_F/\pi^n\mathscr{O}_F$, et $d(s,s')$ est *la distance de s à s'*.

On note σ_0 la classe du réseau (e_1,e_2), et, si $n\in\mathbf{Z}$, on note σ_n celle du réseau $\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\sigma_0=(\pi^ne_1,e_2)$. On a $d(\sigma_n,\sigma_{n+1})=1$ quel que soit $n\in\mathbf{Z}$.

Soit $\mathscr{T}$ l'arbre de $\mathbf{PGL}_2(F)$. Les sommets de $\mathscr{T}$ sont les classes d'homothétie de réseaux de $Fe_1\oplus Fe_2$, et les arêtes orientées sont les paires $[s,s']$, avec $d(s,s')=1$.

Si $s,s'\in\mathscr{S}$, il existe un unique *segment orienté* $[s,s']$ d'extrémités s et s'. Si Λ et Λ' sont des représentants de s et s' tels que $\Lambda'\subset\Lambda$ et $\Lambda/\Lambda'\cong\mathscr{O}_F/\pi^n\mathscr{O}_F$, alors les sommets de $\mathscr{T}$ contenus dans $[s,s']$ sont $s_0=s,s_1,\ldots,s_n=s'$, où s_i est la classe du réseau $\Lambda'+\pi^i\Lambda$. Si $I=[s,s']$ est un segment orienté de $\mathscr{T}$, on définit sa *longueur* $\ell(I)$ par $\ell(I)=d(s,s')$.

Le groupe G agit sur les segments orientés de $\mathscr{T}$, et préserve la longueur. Par ailleurs, d'après la théorie des diviseurs élémentaires, si Λ et Λ' sont des réseaux de $Fe_1\oplus Fe_2$ vérifiant $\Lambda'\subset\Lambda$ et $\Lambda/\Lambda'\cong\mathscr{O}_F/\pi^n\mathscr{O}_F$, alors il existe une base f_1,f_2 de $Fe_1\oplus Fe_2$ telle que $\Lambda=(f_1,f_2)$ et

$\Lambda' = (\pi^n f_1, f_2)$. L'action de G sur les segments orientés de $\mathscr{T}$ de longueur n est donc transitive, et comme le stabilisateur de la paire de réseaux $((e_1,e_2),(\pi^n e_1,e_2))$ est I_n, l'ensemble des segments de longueur n est isomorphe, en tant que G-ensemble, à G/I_nZ.

Soit $s \in \mathscr{S}$. Il existe un unique réseau Λ_s dans la classe de s tel que la projection de Λ_s sur Fe_2 parallèlement à Fe_1 soit $\mathscr{O}_F e_2$. Si $\Lambda_s \cap Fe_1 = \pi^n \mathscr{O}_F e_1$, une base de Λ_s sur $\mathscr{O}_F$ est alors $\pi^n e_1, e_2 + be_1$, et b est uniquement déterminé modulo $\pi^n\mathscr{O}_F$. Un choix de b étant fait, les arêtes $[s,s_x]$ partant de s sont paramétrées par $x \in \mathbf{P}^1(k_F)$. Si $x=\infty$, alors s_x est la classe du réseau $(\pi^{n-1}e_1, e_2+be_1)$; si $x \in k_F$, et si $\hat{x} \in \mathscr{O}_F$ relève x, alors s_x est la classe du réseau $(\pi^{n+1}e_1, e_2 + (b+\pi^n\hat{x})e_1)$. À une arête $[s,s']$, on associe un ouvert élémentaire $D_{[s,s']}$ de $\mathbf{P}^1(F)$, de la manière suivante : si $s' = s_\infty$, alors $D_{[s,s']}$ est le complémentaire de $b+\pi^n\mathscr{O}_F$; si $s = s_x$, avec $x \in k_F$, alors $D_{[s,s']} = p + \pi^n\hat{x} + \pi^{n+1}\mathscr{O}_F$, et $D_{[s,s']}$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a fait. On obtient de la sorte une bijection entre l'ensemble des arêtes orientées de $\mathscr{T}$ et l'ensemble des ouverts élémentaires de $\mathbf{P}^1(F)$. De plus, si on fixe s, alors $\mathbf{P}^1(F)$ est la réunion disjointe des $D_{[s,s']}$, où $[s,s']$ décrit les arêtes orientées d'origine s.

Si $[s_0,s_1]$ est une arête de $\mathscr{T}$, on note $\mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$ le sous-arbre de $\mathscr{T}$ issu de $[s_0,s_1]$. Ses sommets sont les sommets s de $\mathscr{T}$ tels que $s_1 \in [s_0,s]$. Si U est un ouvert élémentaire de $\mathbf{P}^1(F)$, et si $[s_0,s_1]$ est l'arête de $\mathscr{T}$ qui lui correspond, on note aussi $\mathscr{T}_U$ le sous-arbre $\mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$ de $\mathscr{T}$. On a donc $\mathscr{T}_{D_{[s_0,s_1]}} = \mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$, si $[s_0,s_1]$ est une arête de $\mathscr{T}$.

Si $\mathscr{T}'$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, une arête $[s_0,s_1]$ de $\mathscr{T}'$ est *une extrémité* de $\mathscr{T}'$ si $\mathscr{T}' - \{s_0\} \subset \mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$

Si $s \in \mathscr{T}$, une *demi-droite d'origine* s est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, réunion croissante de segments J_n d'origine s, avec $\ell(J_n) \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Si Δ est une demi-droite d'origine s, ses sommets sont de la forme s_n, $n \in \mathbf{N}$, avec $s_0 = s$ et $d(s_n,s_m) = |n-m|$, si $n,m \in \mathbf{N}$. La suite d'ouverts $D_{[s_n,s_{n+1}]}$ est alors une suite d'ouverts emboités dont l'intersection est un point de l'ouvert $D_{[s_0,s_1]}$. On obtient de la sorte une bijection entre l'ensemble des demi-droites d'extrémité $[s_0,s_1]$ et l'ouvert $D_{[s_0,s_1]}$ de $\mathbf{P}^1(F)$, et donc aussi entre l'ensemble des demi-droites d'origine s_0 et $\mathbf{P}^1(F)$.

2.3. Représentations de G

Soit Λ un anneau. Une Λ-représentation Π de G est un Λ-module muni d'une action Λ-linéaire à gauche de G. On dit que

• Π admet un *caractère central*, s'il existe un caractère $\omega : Z \to \Lambda^*$, tel que $g \in Z$ agit par multiplication par $\omega(g)$; le caractère ω est alors le caractère central de Π ;

• Π est *localement constante* (ou lisse), si le stabilisateur de tout élément v de Π est ouvert dans G ;

• Π est *admissible* si Π^{K_n} est de type fini sur Λ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;

On note $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de G admettant un caractère central, localement constantes, admissibles, de longueur finie.

Lemme 2.2. — *Si M est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie muni d'une action continue de U^+, alors U^+ agit trivialement sur M.*

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{Z}$, comme $U^+(\pi^n\mathscr{O}_F)$ est un pro-p-groupe, l'action de $U^+(\pi^n\mathscr{O}_F)$ sur M est unipotente. Ceci implique que, si ℓ est la longueur de M sur $\mathscr{O}_L$, alors $(u-1)^\ell = 0$ sur M

quel que soit $u \in U^+(\pi^n \mathscr{O}_F)$. Soit k le plus petit entier vérifiant $p^k \geqslant \ell$. On a alors $p^k M = 0$, et

$$u^{p^{2k}} - 1 = \sum_{i=1}^{p^{2k}} \binom{p^{2k}}{i} (u-1)^i = 0,$$

car $v_p\big(\binom{p^{2k}}{i}\big) \geqslant k$ si $i \leqslant p^k$, et $(u-1)^i = 0$ si $i \geqslant p^k$. On en déduit que $U^+(\pi^{n+2k}\mathscr{O}_F)$ agit trivialement sur M quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, ce qui permet de conclure.

Lemme 2.3. — *Soit* $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$. *Si* $M \subset \Pi$ *est un sous-*$\mathscr{O}_L$*-module de longueur finie stable par le sous-groupe diédral* Δ*, alors alors* M *est stable par* G *et fixe par* $\mathbf{SL}_2(F)$*.*

Démonstration. — Comme M est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que M soit fixe par $U^+(\pi^k \mathscr{O}_F)$ Maintenant, comme M est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ et stable par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, on a $M = \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot M$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, et M est fixe par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) U^+(\pi^k \mathscr{O}_F) \left(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = U^+(\pi^{k-n}\mathscr{O}_F)$, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$. On en déduit que M est fixe par U^+. Comme G est engendré par U^+ et Δ, cela montre que M est stable par G et fixe par le sous-groupe distingué de G engendré par U^+, c'est-à-dire par $\mathbf{SL}_2(F)$. Ceci permet de conclure.

2.4. Présentation d'une représentation de G

Lemme 2.4. — *Si* $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$*, il existe* $W \subset \Pi$ *de type fini sur* $\mathscr{O}_L$*, stable par* KZ*, engendrant* Π *comme* G*-module.*

Démonstration. — Comme Π est localement constante et de longueur finie, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que Π soit engendrée par Π^{K_n}. Comme K_n est distingué dans KZ, cela implique que Π^{K_n} est stable par KZ, et comme Π est admissible, cela implique que Π^{K_n} est de type fini sur $\mathscr{O}_L$. On peut donc prendre $W = \Pi^{K_n}$, pour n assez grand.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, on note $\mathscr{W}(\Pi)$ l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L$-modules W de type fini de Π, stables par KZ, engendrant Π comme G-module. Si $W \in \mathscr{W}(\Pi)$, on note $I(W)$ la représentation induite $\mathrm{Ind}_{KZ}^G W$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $\phi : G \to W$, à support fini modulo KZ, telles que $\phi(kh) = k \cdot \phi(h)$ si $k \in K$ et $g \in G$, sur lequel on fait agir $g \in$ G par translation à droite sur la variable (i.e. $(g \cdot \phi)(h) = \phi(hg)$). On dispose alors d'une application G-équivariante surjective de $I(W)$ sur Π, envoyant ϕ sur $\sum_{g \in G/KZ} g \cdot \phi(g^{-1})$, et on note $R(W, \Pi)$ la sous-représentation de G noyau de cette application. On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow R(W, \Pi) \longrightarrow I(W) \longrightarrow \Pi \longrightarrow 0, \quad \text{quel que soit } W \in \mathscr{W}(\Pi).$$

Si $v \in W$ et $g \in G$, on note $[g, v]$ l'élément de $I(W)$ défini par

$$[g, v](h) = \begin{cases} hg \cdot v & \text{si } hg \in KZ, \\ 0 & \text{si } hg \notin KZ. \end{cases}$$

On a $[g, v] = g \cdot [1, v]$, et l'image de $[g, v]$ dans Π est $g \cdot v$. Si $g \in G$, on note $[g, W]$ l'ensemble des $[g, v]$, pour $v \in W$. C'est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $I(W)$ qui ne dépend que de la classe de g dans $G/KZ \cong \mathscr{T}$. Son image dans Π est le translaté $g \cdot W$ de W par g.

Comme $[g, W]$ ne dépend que de la classe de g dans $G/KZ \cong \mathscr{T}$, cela permet de donner un sens à $[s, W]$, si $s \in \mathscr{T}$. On a alors $I(W) = \oplus_{s \in \mathscr{T}} [s, W]$. Si $\mathscr{T}'$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, et si $x \in I(W)$, on dit que $x = \sum_{s \in \mathscr{T}} x_s$, avec $x_s \in [s, W]$, est *à support dans* $\mathscr{T}'$, si $x_s = 0$ quel que soit $s\notin\mathscr{T}'$. On définit *le support de* x comme le plus petit sous-arbre $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{T}$ tel que x soit à support dans $\mathscr{T}'$.

Remarque 2.5. — Si $W\subset\Pi$ est stable par K, et si $n\in\mathbf{N}$, soit $W^{[n]}=\sum_{d(s,\sigma_0)\leqslant n}g\cdot W$. Comme σ_0 est fixe par K, et comme G préserve la distance, le $\mathscr{O}_L$-module $W^{[n]}$ est stable par K. De plus, $(W^{[n_1]})^{[n_2]}=W^{[n_1+n_2]}$ quels que soient n_1, $n_2\in\mathbf{N}$.

On dit que $I(W)/R(W,\Pi)$ est *une présentation standard de* Π, si $R(W,\Pi)$ est engendré, comme $\mathscr{O}_L[G]$-module, par l'inclusion de $W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$ dans W et $\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. Autrement dit, $I(W)/R(W,\Pi)$ est une présentation standard de Π si et seulement si $R(W,\Pi)$ est engendré, comme $\mathscr{O}_L[G]$-module, par

$$R^{(0)}(W,\Pi)=\left\{[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),x]-[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),y],\ \text{avec } y\in W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W \text{ et } x=\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot y\right\}.$$

Plus généralement, si $W\in\mathscr{W}(\Pi)$, et si $n\geqslant 1$, notons $R^{(n)}(W,\Pi)$, le noyau de l'application naturelle $\oplus_{d(s,\sigma_0)\leqslant n}[s,W]\to W^{[n]}$. Si $n\in\mathbf{N}$, on dit que Π *est de complexité* $\leqslant n$, s'il existe $W\in\mathscr{W}(\Pi)$ tel que $R^{(n)}(W,\Pi)$ engendre le $\mathscr{O}_L[G]$-module $R(W,\Pi)$. En particulier, une représentation est de complexité 0 si et seulement si elle admet une présentation standard.

Si $n\in\mathbf{N}$, on note $\mathscr{W}^{(n)}(\Pi)$ l'ensemble des $W\in\mathscr{W}(\Pi)$ tels que $R^{(n)}(W,\Pi)$ engendre le $\mathscr{O}_L[G]$-module $R(W,\Pi)$.

2.5. Représentations admettant une présentation standard

Le but de ce n$^{\text{o}}$ est de prouver (prop. 2.13) la stabililité des représentations admettant une présentation standard par sous-quotient et par extension.

Lemme 2.6. — *Soit* $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, *et soient* $W\in\mathscr{W}(\Pi)$ *et* $W'=W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. *Alors*

(i) $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot W'=\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$ *; en particulier,* $\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$ *est inclus dans* W.

(ii) W' *est stable par* $I^+(1)=\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^*&\mathscr{O}_F\\\pi\mathscr{O}_F&\mathscr{O}_F^*\end{smallmatrix}\right)$ *et par* $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\\pi&0\end{smallmatrix}\right)$.

Démonstration. — Comme W est stable par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ et par Z, on a

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot W'=W\cap\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot W=W\cap\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\pi^{-1}\end{smallmatrix}\right)\cdot W=W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W=\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W'.$$

Ceci démontre le (i). On en déduit la stabilité de W' par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\\pi&0\end{smallmatrix}\right)$. Finalement, W' est stable par $K\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)K\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et comme $\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_F)\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F&\pi^{-1}\mathscr{O}_F\\\pi\mathscr{O}_F&\mathscr{O}_F\end{smallmatrix}\right)$, le groupe $K\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)K\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ est constitué des matrices $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ de K avec c divisible par p, c'est-à-dire $I^+(1)$. Ceci permet de conclure.

Soit $\iota:W\to\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$ défini par $\iota(v)=\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v$. D'après le lemme 2.6, ι induit un isomorphisme de W' sur $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$, et un petit calcul montre que l'on a $\iota(g\cdot x)=\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(x)$ quels que soient $x\in W'$ et $g\in I^+(1)$, et $\iota(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v))=\left(\begin{smallmatrix}0&\pi\\\pi&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v$ quel que soit $v\in W'$. De plus, $R^{(0)}(W,\Pi)$ est l'ensemble des $[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v)]$, pour $v\in W'$, ce qui fait que $I(W)/R(W,\Pi)$ est une présentation standard de Π si et seulement si le $\mathscr{O}_L[G]$-module $R(W,\Pi)$ est engendré par les $[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v)]$, pour $v\in W'$. Ce qui précède admet une réciproque sous la forme de la proposition suivante.

Proposition 2.7. — *Soient*
- *un $\mathscr{O}_L$-module de type fini W muni d'une action de KZ,*
- *un sous-$\mathscr{O}_L$-module W' de W stable par, $I^+(1) = \begin{pmatrix} \mathscr{O}_F^* & \mathscr{O}_F \\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^* \end{pmatrix}$, et par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$,*
- *un isomorphisme $\iota : W' \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot W'$ tel que $\iota(g \cdot x) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \iota(x)$ quels que soient $x \in W'$ et $g \in I^+(1)$, et $\iota(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \iota(v)) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ quel que soit $v \in W'$,*
- *$R(W, W', \iota)$ le sous-$\mathscr{O}_L[G]$-module de $I(W)$ engendré par les $[\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota(v)]$, pour $v \in W'$,*
- *$\Pi = I(W)/R(W, W', \iota)$.*
- *$\overline{W}$ et $\overline{W}'$ les images respectives de W et W' dans Π.*

Alors $I(\overline{W})/R(\overline{W}, \Pi)$ est une présentation standard de Π, et $\overline{W}' = \overline{W} \cap \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{W}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, quitte à quotienter W par le noyau de l'application naturelle de W dans $I(W)/R(W, W', \iota)$, on peut imposer à W d'être inclus dans Π, et donc d'être un élément de $\mathscr{W}(\Pi)$. Nous nous placerons donc dans cette situation, ce qui permet d'identifier W et $\overline{W}$ ainsi que W' et $\overline{W}'$ et que $R(\overline{W}, \Pi)$ et $R(W, W', \iota)$.

Pour démontrer la proposition, il suffit alors de prouver que $W' = W \cap \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W$. En effet, si ceci est le cas, le sous-$\mathscr{O}_L$-module $R(W, W', \iota)$ n'est autre que $R^{(0)}(W, \Pi)$.

L'inclusion $W' \subset W \cap \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W$ est immédiate. Pour démontrer l'autre, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.8. — *Soit H le sous-groupe de G engendré par Z, $I^-(1)$ et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si un système de représentants de G/H dans G est fixé, alors tout élément R de $R(W, W', \iota)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une somme finie du type*

$$R = \sum_{g \in G/H} g \cdot \left([\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_g] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota(v_g)] \right).$$

Démonstration. — Si $g \in I^-(1) = \begin{pmatrix} \mathscr{O}_F^* & \pi\mathscr{O}_F \\ \mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^* \end{pmatrix}$, et si $v \in W'$, on a

$$g \cdot \left([\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota(v)] \right) = [\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota(\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v)].$$

Donc $R(W, W', \iota)$ est stable par le sous-groupe $I^-(1)$ de G. De même,

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left([\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota(v)] \right) = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \cdot v] - [\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \iota(v)],$$

et comme $\iota(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \iota(v)) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \cdot v$, cela montre que $R(W, W', \iota)$ est stable par H. Cela permet d'écrire tout élément R de $R(W, W', \iota)$ sous la forme voulue. Il reste à montrer qu'une telle écriture est unique, et par linéarité, il suffit de prouver que si

$$\sum_{g \in G/H} g \cdot \left([\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_g] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \iota(v_g)] \right) = 0,$$

alors $v_g = 0$ quel que soit $g \in G/H$. Si tel n'est pas le cas, on peut choisir, parmi les sommets $g\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g$, pour $g \in G/H$ tel que $v_g \neq 0$, un sommet s à distance maximale de σ_0. Mais alors, H étant le stabilisateur de l'arête non orientée $[\sigma_0, \sigma_1]$ de $\mathscr{T}$ (car $ZI^-(1)$ est le stabilisateur de l'arête orientée et $\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ échange ses deux sommets), la projection de la somme ci-dessus sur $[s, W]$ est réduite (suivant les cas) à $[g\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_g]$ ou à $[g, \iota(v_g)]$. Comme on a supposé $v_g \neq 0$, cela prouve que cette projection n'est pas nulle, ce qui conduit à une contradiction. On en déduit le résultat.

Revenons à la démonstration de la prop. 2.7. L'unicité de l'écriture dans le lemme 2.8 implique, en particulier, que si $[\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v]-[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v'] \in R(W,W',\iota)$, alors $v\in W'$ et $v'=\iota(v)$. Ceci permet de conclure.

Remarque 2.9. — (i) On peut voir la proposition ci-dessus comme un procédé de construction de représentations de G admettant une présentation standard à partir d'objets « finis ».

(ii) En caractéristique 0 ou en caractéristique $\ell\neq p$, si n est assez grand pour que $W=\Pi^{K_n}\in \mathscr{W}(\Pi)$, alors $I(W)/R(W,\Pi)$ est une présentation standard de Π et donc toute représentation admissible lisse de G admet une présentation standard. (C'est un cas particulier de résultats de Schneider-Stuhler [**21**] en caractéristique 0 et de Vigneras [**22**] en caractéristique $\ell\neq p$.)

Lemme 2.10. — *Si $W\in\mathscr{W}(\Pi)$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$;

(ii) quels que soient le sous-arbre $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{T}$, l'extrémité $[s_0,s_1]$ de $\mathscr{T}'$ et $R=\sum_{s\in\mathscr{T}'}[s,x_s]\in R(W,\Pi)$, de support inclus dans $\mathscr{T}'$, on a $s_1\cdot x_{s_1}\in s_0\cdot W$ dans Π.

Démonstration. — Commençons par remarquer que la décomposition de R sous la forme $R=\sum_{s\in\mathscr{T}'}[s,x_s]$ suppose que l'on a choisi un système de représentants de $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}\cong G/KZ$ dans G. Par contre la condition $s_1\cdot x_{s_1}\in s_0\cdot W$ ne dépend pas du système de représentants choisis, ce qui fait que l'on peut supposer que $s_1=s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si maintenant, $W\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, alors d'après le lemme 2.8, le choix d'un système de représentants de G/H dans G permet d'écrire R, de manière unique, sous la forme

$$R=\sum_{g\in G/H} g\cdot\left([\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v_g]-[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v_g]\right),$$

avec $v_g\in W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. On peut imposer à s_0 de faire partie du système de représentants de G/H dans G, auquel cas, on a $x_{s_1}=v_{s_1}\in W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$, et donc $s_1\cdot x_{s_1}\in s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W=s_0\cdot W$. On en déduit l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Passons à la démonstration de (ii)$\Rightarrow$(i). Soit $R\in R(W,\Pi)$, et soient $\mathscr{T}'$ le support de R, et $[s_0,s_1]$ une extrémité de $\mathscr{T}'$. On peut, comme ci-dessus, supposer que $s_1=s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On peut alors écrire R sous la forme $R=\sum_{s\in\mathscr{T}'}[s,v_s]$, et comme $s_1\cdot x_{s_1}\in s_0\cdot W$ dans Π, cela implique que $x_{s_1}\in W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. Mais alors $R_0=[\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x_{s_1}]-[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x_{s_1}]\in R^{(0)}(W,\Pi)$, et $R-R_0$ est à support dans $\mathscr{T}'-\{s_1\}$. Une récurrence immédiate sur le cardinal du support R permet alors de prouver que $R\in R^{(0)}(W,\Pi)$, et donc que $W\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. Ceci permet de conclure.

Lemme 2.11. — *Si $W\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, alors $W^{[1]}\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$.*

Démonstration. — Soit $R\in R(W^{[1]},\Pi)$, et soit $\mathscr{T}'$ le support de R. On peut donc écrire R de manière unique sous la forme $R=\sum_{s\in\mathscr{T}'}[s,x_s]$, avec $x_s\in W^{[1]}$. Si $|\mathscr{T}'|\leqslant 1$, alors $R=0$, et si $|\mathscr{T}'|=2$, il existe $g\in G$ tel que $g\cdot\mathscr{T}'=\{\sigma_0,\sigma_1\}$, ce qui implique $R\in R^{(0)}(W^{[1]},\Pi)$.

On veut prouver que l'on peut écrire R sous la forme $\sum_{g\in G} g\cdot([\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x_g]-[\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y_g])$, avec $x_g,y_g\in W^{[1]}$, nul pour presque tout $g\in$ G. Ceci va se faire par récurrence sur le cardinal de

$\mathscr{T}'$, et d'après ce qui précède, il suffit de considérer le cas $|\mathscr{T}'| \geqslant 3$. L'arbre $\mathscr{T}'$ contient alors un segment $[s_0, s_1, s_2]$, de longueur 2, tel que $[s_0, s_1]$ soit une extrémité de $\mathscr{T}'$, et, quitte à changer les représentants s_0, s_1, s_2, on peut supposer que $s_1 = s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $s_2 = s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi^2 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Maintenant, on peut écrire x_s, pour $s \in \mathscr{T}'$, de manière non unique, sous la forme

$$x_s = s \cdot w_s + \sum_{i \in \mathbf{P}^1(k_F)} sg_i \cdot v_{s,i},$$

avec $w_s, v_{s,i} \in W$, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F)$, où l'on a posé $g_i = \left(\begin{smallmatrix}\pi & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, où l'on a choisi un relèvement de i dans $\mathscr{O}_F$, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F)$, et $g_\infty = \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Mais alors

$$R' = \sum_{s \in \mathscr{T}'} \Big([s, w_s] + \sum_{i \in \mathbf{P}^1(k_F)} [sg_i, v_{s,i}]\Big)$$

est un élément de $R(W, \Pi)$ dont le support est inclus dans $\mathscr{T}'' = \{s \in \mathscr{T},\ d(s, \mathscr{T}') \leqslant 1\}$. Comme $[s_0, s_1]$ est une extrémité de $\mathscr{T}'$ et $s_1 = s_0 g_0$, cela implique que les $[s_0 g_i, s_0]$, pour $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{0\}$, sont des extrémités de $\mathscr{T}''$. De plus, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{0\}$, on a $g_i s_0 = g_j s$, avec $s \in \mathscr{T}'$ si et seulement si $s = s_0$ et $i = j$. Ceci implique, que si on écrit R' sous la forme $R' = \sum_{s \in \mathscr{T}''} x'_s$, avec $x'_s \in [s, W]$, on a $x_{s_0 g_i} = [s_0 g_i, x_{s_0,i}]$ si $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{0\}$. Il résulte donc du lemme 2.10, que l'on a $s_0 g_i \cdot x_{s_0,i} \in s_0 g_i \cdot W \subset s_0 \cdot W^{[1]}$ si $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{0\}$, et on peut donc écrire x_{s_0} sous la forme $s_0 \cdot w'_{s_0} + s_0 g_0 \cdot x_{s_0,0}$, avec $w'_{s_0} \in W$. Or $w'_{s_0} = g_0 g_\infty \cdot w'_{s_0} \in g_0 \cdot W^{[1]}$, ce qui prouve que x_{s_0} peut sécrire sous la forme $s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot y_{s_0}$, avec $y_{s_0} \in W^{[1]}$. La relation $R'' = R' - [s_0, x_0] + [s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y_{s_0}]$ est alors supportée sur l'arbre $\mathscr{T}' - \{s_0\}$, ce qui permet, par récurrence, de conclure.

Corollaire 2.12. — *Si Π admet une présentation standard, alors quel que soit $W' \in \mathscr{W}(\Pi)$, il existe $W'' \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ contenant W'.*

Démonstration. — Soit $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. Comme $W^{[n+1]} = (W^{[n]})^{[1]}$ et comme $W^{[n]}$ contient W' si n est assez grand, le lemme précédent permet de conclure.

Proposition 2.13. — *Soit $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$.*

(i) Si Π admet une représentation standard, il en est de même de Π_1 et Π_2.

(ii) Si Π_1 et Π_2 admettent des représentations standard, il en est de même de Π.

Démonstration. — (i) Soit $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, et soit $W_2 \subset \Pi_2$ l'image de W. Alors $R(W_2, \Pi_2)$ est l'image de $R(W, \Pi)$ dans $I(W)$, et on peut prendre pour générateurs de $R(W_2, \Pi_2)$ les images d'une famille de générateurs de $R(\Pi, W)$. Ceci permet de montrer que $I(W_2)/R(W_2, \Pi_2)$ est une présentation standard de Π_2. Maintenant, soit $W_1 = W \cap \Pi_1$, et soit $R \in R(W_1, \Pi_1)$. Soit $\mathscr{T}'$ le support de R. On peut alors écrire R, de manière unique, sous la forme $\sum_{s \in \mathscr{T}'} x_s$, avec $x_s \in [s, W_1]$. Soit $[s_0, s_1]$ une extrémité de $\mathscr{T}'$. Comme $R(W_1, \Pi_1) \subset R(W, \Pi)$, et comme $I(W)/R(W, \Pi)$ est une présentation standard de Π, on a $s_0 \cdot x_{s_0} \in s_1 \cdot W$. Comme par ailleurs, $s_0 \cdot x_{s_0} \in \Pi_1$, et $s_1^{-1} \cdot \Pi_1 = \Pi_1$, on a $s_0 \cdot x_{s_0} \in s_1 \cdot W_1$. Le lemme 2.10 permet d'en conclure que $I(W_1)/R(W_1, \Pi_1)$ est une présentation standard de Π_1, ce qui termine la démonstration du (i).

(ii) Soit $W_2 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_2)$. Soient v_i, $i \in I$ fini, des générateurs de W_2 sur $\mathscr{O}_L$, et soient $[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x_j] - [\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y_j]$, $j \in J$ fini, $x_j, y_j \in W_2$, des générateurs de $R(W_2, \Pi_2)$. Soient $\tilde{v}_i$, $i \in I$ et $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_j$, $j \in J$, des relèvements de v_i, $i \in I$ et x_j, y_j, $j \in J$ dans Π, et, si $j \in J$, soit $z_j = \tilde{x}_j - \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \tilde{y}_j$. Soit alors W' le sous K-module de Π engendré par les $\tilde{v}_i$, $i \in I$, les $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_j$,

$j\in J$, et les z_j, $j\in J$. La surjection de Π sur Π_2 induit une sujection de W' sur W_2, et on note W_1' le noyau de cette surjection. D'après le lemme 2.12, on peut trouver $W_1\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi_1)$, contenant W_1'. Soit $W=W'+W_1$. Par construction, $W\in\mathscr{W}(\Pi)$, et la suite $0\to W_1\to W\to W_2\to 0$ est exacte. Il en est donc de même de la suite $0\to R(W_1,\Pi_1)\to R(W,\Pi)\to R(W_2,\Pi_2)\to 0$, et $R(W,\Pi)$ est engendré par les $[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\tilde{x}_j-z_j]-[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\tilde{y}_j]$, $j\in J$, et par $R(W_1,\Pi_1)$. Comme $I(W_1)/R(W_1,\Pi_1)$ est une présentation standard de Π_1, cela implique que $R(W,\Pi)$ admet une famille de générateurs de la forme $[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),x]-[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),y]$, avec $x,y\in W$, ce qu'il fallait démontrer.

2.6. Représentations de complexité $\leqslant 1$

Le but de ce n$^{\rm o}$ est d'étendre aux représentations de complexité $\leqslant 1$ la plupart des résultats que nous avons établis pour les représentations admettant une présentation standard. Pour l'application aux représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, cette extension est inutile puisque nous démontrerons que tout objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admet une présentation standard. D'un autre côté, les travaux de Barthel-Livné [**1, 2**] et Breuil [**6**] montrent que l'on tombe souvent naturellement sur des présentations de complexité $\leqslant 1$ qui ne sont pas des présentations standard.

Lemme 2.14. — *Si $W\in\mathscr{W}(\Pi)$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$;

(ii) quels que soient le sous-arbre $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{T}$, l'extrémité $[s_0,s_1]$ de $\mathscr{T}'$ et $R\in R(W,\Pi)$ de support inclus dans $\mathscr{T}'$, il existe $R_0\in R^{(1)}(W,\Pi)$ tel que $R-s_1\cdot R_0$ soit à support dans $\mathscr{T}'-\{s_0\}$.

Démonstration. — Pour prouver l'implication (ii)$\Rightarrow$(i), il s'agit de prouver que tout élément de $R(W,\Pi)$ peut s'écrire sous la forme $\sum_i g_i\cdot R_i$, avec $g_i\in G$ et $R_i\in R^{(1)}(W,\Pi)$, ce qui se démontre par une récurrence immédiate sur le nombre d'éléments du support de R.

Passons à la démonstration de (i)$\Rightarrow$(ii). Soit donc $R\in R(W,\Pi)$ de support inclus dans $\mathscr{T}'$. Comme $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, on peut écrire R sous la forme $R=\sum_{j\in J}g_j\cdot R_j$, où J est un ensemble fini et, si $j\in J$, $g_j\in G$ et $R_j\in R^{(1)}(W,\Pi)$. Soit $\mathscr{T}''$ *le support apparent de* R, c'est-à-dire le plus petit sous-arbre de $\mathscr{T}$ contenant les supports des $g_j\cdot R_j$, pour $j\in J$. Soit $[s_0,s_1]$ une extrémité de $\mathscr{T}''$, et soit J_0 l'ensemble des $j\in J$ tel que s_0 est dans le support de $g_j\cdot R_j$. Soit g_0 envoyant $[s_0,s_1]$ sur $[\sigma_{-1},\sigma_0]$. Si $j\in J_0$, alors $g_0\cdot(g_j\cdot R_j)$ est un élément de $R(W,\Pi)$, à support dans un arbre de diamètre au plus 2 dont $[\sigma_{-1},\sigma_0]$ est une extrémité ; c'est donc un élément de $R^{(1)}(W,\Pi)$. Soit $R_0'=\sum_{j\in J_0}g_0\cdot(g_j\cdot R_j)$. On a alors $R=g_0^{-1}\cdot R_0'+\sum_{j\in J-J_0}g_j\cdot R_j$. Maintenant, il y a deux cas.

- $s_0\notin\mathscr{T}'$. Dans ce cas, R et $g_j\cdot R_j$, si $j\in J-J_0$, sont à support dans $\mathscr{T}''-\{s_0\}$; il en est donc de même de $g_0^{-1}\cdot R_0'$, et la décomposition $R=g_0^{-1}\cdot R_0'+\sum_{j\in J-J_0}g_j\cdot R_j$ est de support apparent inclus dans $\mathscr{T}''-\{s_0\}$. Une récurrence immédiate permet alors de montrer que l'on peut trouver une décomposition de R de support apparent $\mathscr{T}'$.
- Le support apparent de R est $\mathscr{T}'$ et donc $s_0\in\mathscr{T}'$. Dans ce cas, il suffit de poser $R_0=s_1^{-1}g_0^{-1}\cdot R_0'$ pour obtenir la décomposition voulue (on a $s_1^{-1}g_0^{-1}\sigma_0=\sigma_0$, et donc $s_1^{-1}g_0^{-1}\in KZ$).

Ceci permet de conclure. On a de plus montré en passant le résultat suivant.

Corollaire 2.15. — *Si $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, et si $R\in R(W,\Pi)$ est de support $\mathscr{T}'$, alors il existe une famille finie de couples (g_i,R_i), pour $i\in I$, avec $g_i\in G$, $R_i\in R^{(1)}(W,\Pi)$, et*

- *quel que soit $i\in I$, $g_i\cdot R_i$ est à support dans $\mathscr{T}'$,*
- *$R=\sum_{i\in I}g_i\cdot R_i$.*

Lemme 2.16. — *Si $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, alors $W^{[1]} \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$.*

Démonstration. — Soit $R \in R(W^{[1]}, \Pi)$, soit $\mathscr{T}'$ le support de R, et soit $[s_0, s_1]$ une extrémité de $\mathscr{T}'$. On peut donc écrire R, de manière unique, sous la forme $R = \sum_{s\in\mathscr{T}'}[s, x_s]$, avec $x_s \in W^{[1]}$. Notre but est de montrer que l'on peut trouver $R_0 \in R^{(1)}(W^{[1]}, \Pi)$ tel que $R - s_1 \cdot R_0$ soit à support dans $\mathscr{T}' - \{s_0\}$.

Si $i \in k_L$, soit $\hat{\text{ß}}$ un relèvement de i dans $\mathscr{O}_L$, et soit $g_i = \left(\begin{smallmatrix}\pi & \hat{\text{ß}}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Soit $g_\infty = \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On peut écrire x_s, pour $s \in \mathscr{T}'$, de manière non unique, sous la forme

$$x_s = s \cdot w_s + \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)} sg_i \cdot v_{s,i},$$

avec $w_s, v_{s,i} \in W$, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F)$. Mais alors

$$R' = \sum_{s\in\mathscr{T}'} \Big([s, w_s] + \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)} [sg_i, v_{s,i}]\Big)$$

est un élément de $R(W, \Pi)$ dont le support est inclus dans $\mathscr{T}'' = \{s \in \mathscr{T},\ d(s, \mathscr{T}') \leqslant 1\}$.

Il existe $j \in \mathbf{P}^1(k_F)$ unique tel que $s_1 = s_0 g_j k$, avec $k \in K$. Comme $[s_0, s_1]$ est une extrémité de $\mathscr{T}'$ et $s_1 = s_0 g_0$, cela implique que les $[s_0 g_i, s_0]$, pour $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{j\}$, sont des extrémités de $\mathscr{T}''$. D'après le lemme 2.14, cela implique qu'il existe $R'_i \in R^{(1)}(W, \Pi)$, pour $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{j\}$, tels que $R' - \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)-\{j\}} s_0 \cdot R'_j$ soit à support dans $\mathscr{T}''' = \mathscr{T}'' - \{s_0 g_i,\ i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{j\}\}$. Soit $R_{0,1} = \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)-\{j\}} R'_j$. On a $R_{0,1} = w'_{s_0} + \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)}[g_i, x'_{s_0,i}] \in R^{(1)}(W, \Pi)$, et $R' - s_0 \cdot R_{0,1}$ est à support dans $\mathscr{T}'''$. On en déduit l'égalité $x'_{s_0,i} = x_{s_0,i}$, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{j\}$, et comme $w'_{s_0} + \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)} g_i \cdot x'_{s_0,i} = 0$ dans $W^{[1]}$ par définition de $R^{(1)}(W, \Pi)$, on en déduit le fait que x_{s_0} peut s'écrire sous la forme $w + g_j \cdot x$, avec $w, x \in W$. Maintenant,

$$R_0 = s_1^{-1} \cdot ([s_0, w + g_j x] - [s_1, k^{-1} g_j^{-1} w - k^{-1} x])$$

est un élément de $R^{(1)}(W^{[1]}, \Pi)$, et par construction, $R - s_1 \cdot R_0$ est à support dans $\mathscr{T}' - \{s_0\}$, comme on le voulait. Ceci permet de conclure.

Corollaire 2.17. — *Si Π est de complexité $\leqslant 1$, et si $W' \in \mathscr{W}(\Pi)$, alors il existe $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, contenant W'.*

Démonstration. — Si Π est de complexité $\leqslant 1$, il existe $W_0 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. Le lemme précédent montre qu'alors $W_0^{[n]} \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, et comme $W_0^{[n]}$ contient W' si n est assez grand, cela permet de conclure.

Proposition 2.18. — *Soit $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$. Si Π_1 et Π_2 sont de complexité $\leqslant 1$, il en est de même de Π. Plus précisément, si $W_2 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi_2)$, et si W_1 est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de Π_1, il existe $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, contenant W_1 et ayant pour image W_2 dans Π_2.*

Démonstration. — Soit $W_2 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi_2)$. Soient v_i, $i \in I$ fini, des générateurs de W_2 sur $\mathscr{O}_L$, et soient $[1, x_j] + \sum_{k\in\mathbf{P}^1(k_F)}[g_k, y_{j,k}]$, $j \in J$ fini, $x_j, y_{j,k} \in W_2$, des générateurs de $R^{(1)}(W_2, \Pi_2)$. Soient $\tilde{v}_i$, $i \in I$ et $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_{j,k}$, $j \in J$, $k \in \mathbf{P}^1(k_F)$, des relèvements de v_i, $i \in I$ et x_j, $y_{j,k}$, $j \in J$, $k \in \mathbf{P}^1(k_F)$, dans Π, et, si $j \in J$, soit $z_j = \tilde{x}_j - \sum_{k\in\mathbf{P}^1(k_F)} g_k \cdot \tilde{y}_{j,k}$. Soit alors W' le sous K-module de Π engendré par les $\tilde{v}_i$, $i \in I$, les $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_{j,k}$, $j \in J$, $k \in \mathbf{P}^1(k_F)$, et les z_j, $j \in J$. La surjection de Π sur Π_2 induit une sujection de W' sur W_2, et on note W_1' le noyau de cette surjection. D'après le cor. 2.17, on peut trouver $W_1''\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi_1)$, contenant W_1' (et le W_1 de l'énoncé). Soit $W=W'+W_1''$. Par construction, $W\in\mathscr{W}(\Pi)$, et la suite $0\to W_1''\to W\to W_2\to 0$ est exacte. Il en est donc de même de la suite $0\to R(W_1'',\Pi_1)\to R(W,\Pi)\to R(W_2,\Pi_2)\to 0$, et $R(W,\Pi)$ est engendré par les $[1,\tilde x_j]+\sum_{k\in\mathbf{P}^1(k_F)}[g_k,\tilde y_{j,k}]$, $j\in J$, et par $R(W_1'',\Pi_1)$. Comme $[1,\tilde x_j]+\sum_{k\in\mathbf{P}^1(k_F)}[g_k,\tilde y_{j,k}]\in R^{(1)}(W,\Pi)$, et comme $R^{(1)}(W_1'',\Pi_1)\subset R^{(1)}(W,\Pi)$ engendre $R(W_1'',\Pi_1)$, cela montre que $R^{(1)}(W,\Pi)$ engendre $R(W,\Pi)$, et donc que $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. Ceci permet de conclure.

2.7. Duaux

Si Π est une $\mathscr{O}_L$-représentation de G, soit $\Pi^\vee=\mathrm{Hom}(\Pi,L/\mathscr{O}_L)$, le dual algébrique de Π. Si $\mu\in\Pi^\vee$ et $v\in\Pi$, on note $\langle\mu,v\rangle$ la valeur de μ sur v. On fait agir G sur $\Pi^\vee$ à gauche, en envoyant μ sur $g\cdot\mu$ defini par $\langle g\cdot\mu,v\rangle=\langle\mu,g^{-1}\cdot v\rangle$. On munit $\Pi^\vee$ de la topologie de la convergence faible, ce qui en fait un $\mathscr{O}_L$-module compact.

Si Π est de la forme $I(W)$, où W est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie muni d'une action de KZ, alors $\Pi^\vee$ est le produit des $[s,W]^\vee$, pour $s\in\mathscr{T}$, et la topologie de la convergence faible n'est autre que la topologie produit.

1. Représentations de complexité $\leqslant 1$

On suppose dans tout ce qui suit que Π *est de complexité* $\leqslant 1$ et que $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. On pose $G\cdot R^{(1)}(W,\Pi)=\{g\cdot v,\ g\in G,\ v\in R^{(1)}(W,\Pi)\}$; ce n'est pas un $\mathscr{O}_L$-module : le $\mathscr{O}_L$-module engendré par $G\cdot R^{(1)}(W,\Pi)$ n'est autre que $R(W,\Pi)$.

On note $\Gamma(\mathscr{T}',\mathscr{F}(W,\Pi))$ l'ensemble des $\mu\in\prod_{s\in\mathscr{T}'}[s,W]^\vee$ tels que $\langle\mu,x\rangle=0$ quel que soit $x\in G\cdot R^{(1)}(W,\Pi)$ de support $\mathscr{T}'$. Comme $G\cdot R^{(1)}(W,\Pi)$ engendre $R(W,\Pi)$, on a $\Gamma(\mathscr{T},\mathscr{F}(W,\Pi))=\Pi^\vee$. On obtient donc de la sorte, pour tout $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, une description de $\Pi^\vee$ comme les sections globales sur $\mathscr{T}$ d'un certain faisceau $\mathscr{F}(W,\Pi)$.

Lemme 2.19. — *Si $\mathscr{T}'$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, alors*
$$\Big(\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W\Big)^\vee=\Gamma(\mathscr{T}',\mathscr{F}(W,\Pi)).$$

Démonstration. — On a la suite exacte
$$0\to R(W,\Pi)\cap\Big(\oplus_{s\in\mathscr{T}'}[s,W]\Big)\to\oplus_{s\in\mathscr{T}'}[s,W]\to\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W\to 0.$$
Donc $\big(\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W\big)^\vee$ est l'ensemble des éléments de $\prod_{s\in\mathscr{T}'}[s,W]^\vee$ annulant l'ensemble des éléments de $R(W,\Pi)$ à support dans $\mathscr{T}'$. Comme cet ensemble est engendré (cor. 2.15) par les éléments de $G\cdot R^{(1)}(W,\Pi)$ à support dans $\mathscr{T}'$, cela permet de conclure, au vu de la définition de $\Gamma(\mathscr{T}',\mathscr{F}(W,\Pi))$.

On dit que $\mu\in\Gamma(\mathscr{T},\mathscr{F}(W,\Pi))$ est *nul sur* U si sa restriction à $[s,W]$ est identiquement nulle, quel que soit $s\in\mathscr{T}_U$. Soit P^+ le monoïde $\left(\begin{smallmatrix}\pi^{\mathbf{N}}&\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Si $g_U\in G$ envoie $\mathscr{O}_F$ sur U, les sommets de $\mathscr{T}_U$ sont les $g_Uh\sigma_0$, pour $h\in P^+$; la nullité de μ sur U est donc équivalente à
$$\langle\mu,g_Uh\cdot v\rangle=0,\quad\text{quels que soient } h\in P^+ \text{ et } v\in W.$$

Le lemme suivant est évident.

Lemme 2.20. — *Si $g \in G$, et si $\mu \in \Pi^\vee$, alors μ est nul sur $\mathscr{T}_U$, si et seulement si $g \cdot \mu$ est nul sur $\mathscr{T}_{g \cdot U}$*

Lemme 2.21. — *Soit $\mathscr{T}'$ un sous-arbre de $\mathscr{T}$, soient $[s_{i,0}, s_{i,1}]$, pour $i \in I$, des extrémités de $\mathscr{T}'$, et soit $\mu \in \big(\sum_{s \in \mathscr{T}'} s \cdot W\big)^\vee$ dont la restriction à $s_{i,0} \cdot W + s_{i,1} \cdot W$ est nulle quel que soit $i \in I$. Alors, il existe $\tilde{\mu} \in \Pi^\vee$ dont la restriction à $\sum_{s \in \mathscr{T}'} s \cdot W$ est μ, et qui est identiquement nulle sur $\mathscr{T}_{]s_{i,1}, s_{i,0})}$.*

Démonstration. — Comme $[s_{i,1}, s_{i,0}]$ est une extrémité de $\mathscr{T}'$, quel que soit $i \in I$, la réunion $\mathscr{T}''$ de $\mathscr{T}'$ et des $\mathscr{T}_{]s_{i,1}, s_{i,0})}$, $i \in I$ est un arbre, et un arbre de diamètre $\leqslant 2$ contenu dans $\mathscr{T}''$ est inclus dans $\mathscr{T}'$ ou dans $s_{i,0} \cup \mathscr{T}_{]s_{i,1}, s_{i,0})}$ pour un $i \in I$. En particulier, un élément de $G \cdot R^{(1)}(W, \Pi)$ à support dans $\mathscr{T}''$ est en fait à support dans $\mathscr{T}'$ ou dans $s_{i,0} \cup \mathscr{T}_{]s_{i,1}, s_{i,0})}$ pour un $i \in I$. On en déduit le fait que si $\mu = (\mu_s)_{s \in \mathscr{T}'} \in \Gamma(\mathscr{T}', \mathscr{F}(W, \Pi))$ vérifie $\mu_{s_{i,0}} = \mu_{s_{i,1}} = 0$ quel que soit $i \in I$, et si $\mu' = (\mu'_s)_{s \in \mathscr{T}''}$ défini par $\mu'_s = \mu_s$ si $s \in \mathscr{T}'$, et $\mu_s = 0$, si $s \notin \mathscr{T}'$, alors $\mu' \in \Gamma(\mathscr{T}'', \mathscr{F}(W, \Pi))$. Ceci permet de voir μ' comme un élément de $\big(\sum_{s \in \mathscr{T}''} s \cdot W\big)^\vee$ que l'on peut prolonger en un élément $\tilde{\mu}$ de $\Pi^\vee$. Par construction, $\tilde{\mu}$ est, quel que soit $i \in I$, nul sur $\mathscr{T}_{]s_{i,1}, s_{i,0})}$, ce qui permet de conclure.

2. Le sous-module $\Pi_c^\vee$

Les résultats de ce n$^{\text{o}}$ ne sont pas réutilisés par la suite.

Lemme 2.22. — *Soient $W, W' \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, et soit $\mu \in \Pi^\vee$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que μ, vu comme élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W, \Pi))$, soit nul sur $D(0, a)$;

(ii) Il existe $a' \in \mathbf{N}$ tel que μ, vu comme élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W', \Pi))$, soit nul sur $D(0, a')$.

Démonstration. — Si $W' \subset W$ et si $\mu \in \Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W, \Pi))$, est nul sur $D(0, a)$, alors μ, vu comme élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W', \Pi))$ est, de manière évidente, aussi nul sur $D(0, a)$.

Supposons maintenant que $W \subset W'$ et que $\mu \in \Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W, \Pi))$ est nul sur $D(0, a)$. Il existe alors $N \in \mathbf{N}$ tel que $W' \subset \sum_{s \in B(\sigma_0, N)} [s, W]$, et comme $\alpha^{N+a} h B(\sigma_0, N) \subset \mathscr{T}_{D(0,a)}$, si $h \in P^+$, cela implique que μ, vu comme élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W', \Pi))$, est nul sur $D(0, a+N) = \alpha^{a+N} \cdot \mathscr{O}_F$.

Le cas général s'en déduit en introduisant $W'' = W + W'$.

On dit que $\mu \in \Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W, \Pi))$ est *à support compact dans F* (resp. dans F^*) s'il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que μ soit nul sur $D(\infty, a)$ (resp. sur $D(0, a)$ et $D(\infty, a)$).

Corollaire 2.23. — *Soient $W, W' \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, et soit $\mu \in \Pi^\vee$. Alors μ est à support compact dans F (resp. dans F^*) vu comme élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W, \Pi))$ si et seulement si il l'est en tant qu'élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W', \Pi))$.*

On dit que $\mu \in \Pi^\vee$ est *à support compact dans F* (resp. dans F^*) s'il existe $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$ tel que μ, vu comme élément de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W, \Pi))$ soit à support compact dans F (resp. dans F^*). D'après le corollaire précédent cette notion ne dépend pas du choix de $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. On note $\Pi_c^\vee$ l'ensemble des éléments de $\Pi^\vee$ à support compact dans F^*. On remarquera que $\mu \in \Pi_c^\vee$ si et seulement si μ et $\mu \star w$ sont à support compact dans F.

Proposition 2.24. — *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ est de complexité $\leqslant 1$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\Pi^{\mathbf{SL}_2(F)}=0$,
(ii) $\Pi_c^\vee$ *est dense dans* $\Pi^\vee$.

Démonstration. — Soit $v\in\Pi^{\mathbf{SL}_2(F)}$. Le $\mathscr{O}_L$-module engendré par v est stable par $Z\mathbf{SL}_2(F)$ qui est d'indice fini dans G, et donc $\mathscr{O}_L[G]\cdot v$ est de type fini (et donc de longueur finie) sur $\mathscr{O}_L$. Soit V le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π engendré par les $\left(\begin{smallmatrix}\pi^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v$, pour $n\geqslant k$. D'après ce qui précède, c'est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie stable par $\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ qui agit de manière injective donc bijective. En particulier, on a $v\in\left(\begin{smallmatrix}\pi^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot V$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$.

Maintenant, soit $\mu\in\Pi^\vee$. Si $\Pi_c^\vee$ est dense dans $\Pi^\vee$, il existe $\mu'\in\Pi_c^\vee$ coïncidant avec μ sur V, mais comme $\mu'\in\Pi_c^\vee$, on a $\langle\mu',\left(\begin{smallmatrix}\pi^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot x\rangle=0$ quel que soit $x\in V$, si n est assez grand. En particulier, comme $v\in\left(\begin{smallmatrix}\pi^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot V$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$, cela implique $\langle\mu,v\rangle=0$, et comme ceci est vrai quel que soit $\mu\in\Pi^\vee$, cela implique $v=0$. On en déduit l'implication (ii)$\Rightarrow$(i).

Passons à la démonstration de (i)$\Rightarrow$(ii). Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.25. — *Si* $\Pi^{\mathbf{SL}_2(F)}=0$, *alors quels que soient les sous-*$\mathscr{O}_L$*-modules de type fini* M, M' *de* Π, *il existe* $n\in\mathbf{N}$ *tel que*
$$M'\cap\Big(\sum_{m\geqslant n}\left(\begin{smallmatrix}\pi^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot M\Big)=0\quad\text{et}\quad M'\cap\Big(\sum_{m\geqslant n}\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-m}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot M\Big)=0.$$

Démonstration. — Il existe $a\in\mathbf{N}$ tel que, si $g\in 1+p^a\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_F)$, alors $g\cdot x=x$ quel que soit $x\in M$ ou $x\in M'$. Soit alors $x\in M'\cap\big(\sum_{m\geqslant n}\left(\begin{smallmatrix}\pi^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot M\big)$. Comme un élément de $\left(\begin{smallmatrix}\pi^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot M$ est fixe par $1+\left(\begin{smallmatrix}\pi^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\\pi^a\mathscr{O}_F&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-m}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1+\left(\begin{smallmatrix}0&0\\\pi^{a-m}\mathscr{O}_F&0\end{smallmatrix}\right)$, on en déduit le fait que x est fixe par $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\pi^{a-n}\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\right)$. Comme, il est de plus fixe par $\left(\begin{smallmatrix}1&\pi^a\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ puisqu'il appartient à M', et comme le sous-groupe engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1&\pi^a\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\pi^{-a-1}\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\right)$ est $\mathbf{SL}_2(F)$, on voit que l'on a $M'\cap\big(\sum_{m\geqslant n}\left(\begin{smallmatrix}\pi^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot M\big)\subset\Pi^{\mathbf{SL}_2(F)}=0$, si $n\geqslant 2a+1$. Cela démontre la moitié du lemme. L'autre moité s'en déduit en conjugant par l'action de $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$.

Revenons à la démonstration de l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) de la prop. 2.24. Choisissons $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. Il s'agit de montrer que, si $\mu\in\Pi^\vee$, et si $\mathscr{T}'$ est un sous-arbre fini de $\mathscr{T}$, il existe $\mu'\in\Pi_c^\vee$ coïncidant avec μ sur $[s,W]$, quel que soit $s\in\mathscr{T}'$. On peut, sans nuire à la généralité, supposer que $\mathscr{T}'$ contient σ_0, ce qui fait que $\mathscr{T}'_n=\mathscr{T}'\cup[\sigma_{-n-1},\sigma_{n+1}]$ est un arbre quel que soit $n\in\mathbf{N}$. Par ailleurs, d'après le lemme 2.25 appliqué à $M'=\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W$ et $M=W$, l'hypothèse $\Pi^{\mathbf{SL}_2(F)}=0$ implique qu'il existe $a\in\mathbf{N}$ tel que
$$\Big(\left(\begin{smallmatrix}\pi^a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W+\left(\begin{smallmatrix}\pi^{a+1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W\Big)\cap\Big(\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W\Big)=0.$$

Le même lemme utilisé pour $M'=\left(\begin{smallmatrix}\pi^a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W+\left(\begin{smallmatrix}\pi^{a+1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W+\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W$ et $M=W$ montre qu'il existe $b\in\mathbf{N}$ tel que
$$\Big(\left(\begin{smallmatrix}\pi^a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W+\left(\begin{smallmatrix}\pi^{a+1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W+\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-b}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W+\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-b-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W\Big)\cap\Big(\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W\Big)=0.$$

On peut alors trouver $\mu''\in\big(\sum_{s\in\mathscr{T}'_n}s\cdot W\big)^\vee$ dont la restriction à $\sum_{s\in\mathscr{T}'}s\cdot W$ est μ et qui est nul sur $\sigma_k\cdot W$, pour $k\in\{-b-1,-b,a,a+1\}$. D'après le lemme 2.21, on peut alors prolonger μ'' en un élément μ' de $\Pi^\vee$ coïncidant avec μ' sur $\mathscr{T}'_n$ et identiquement nul sur $\mathscr{T}_{]\sigma_a,\sigma_{a+1})}$ et $\mathscr{T}_{]\sigma_{-b},\sigma_{-b-1})}$. Cet élément μ' vérifie donc les propriétés demandées. Ceci permet de conclure.

2.8. Le foncteur de Jacquet $\Pi \mapsto J(\Pi)$

Soit M un $k_L[B]$-module de longueur finie sur k_L avec caractère central ω_M. Comme on l'a vu au lemme 2.2, le sous-groupe U^+ de B agit trivialement, et M peut aussi être considéré comme un $k_L[A]$-module, ce qui permet de le décomposer en composantes isotypiques suivant les caractères $\delta_1 \otimes \delta_2$ de A. On note $M_{\delta_1\otimes\delta_2}$ l'ensemble des $x \in M$ tels qu'il existe $k(x) \in \mathbf{N}$ tel que $(g - \delta_1 \otimes \delta_2(g))^{k(x)} \cdot x = 0$ quel que soit $g \in B$. Alors $M_{\delta_1\otimes\delta_2} = 0$ si $\delta_1\delta_2 \neq \omega_M$, et $M = \oplus_{\delta_1\delta_2=\omega_M} M_{\delta_1\otimes\delta_2}$.

De plus, le $k_L[B]$-module $M_{\delta_1\otimes\delta_2}$ est une extension successive de $k_L[B]$-modules de rang 1, tous isomorphes à $k_L(\delta_1 \otimes \delta_2)$. On note $M'_{\delta_1\otimes\delta_2}$ le plus grand quotient de $M_{\delta_1\otimes\delta_2}$ isomorphe à une somme directe de $k_L(\delta_1 \otimes \delta_2)$. Soit

$$\big(\mathrm{Ind}_B^G\, \delta_1 \otimes \delta_2\big)^0 = \begin{cases} \mathrm{Ind}_B^G\, \delta_1 \otimes \delta_2 & \text{si } \delta_1 \neq \delta_2, \\ \delta \circ \det & \text{si } \delta_1 = \delta_2 = \delta, \end{cases}$$

et définissons $\big(\mathrm{Ind}_B^G\, M'_{\delta_1\otimes\delta_2}\big)^0$ comme $\big(\mathrm{Ind}_B^G\, \delta_1 \otimes \delta_2\big)^0 \otimes M'_{\delta_1\otimes\delta_2}$, où $M'_{\delta_1\otimes\delta_2}$ est considéré comme étant muni de l'action triviale de G. Finalement, soient $\big(\mathrm{Ind}_B^G\, M_{\delta_1\otimes\delta_2}\big)^0$ l'image inverse de $\big(\mathrm{Ind}_B^G\, M'_{\delta_1\otimes\delta_2}\big)^0$ dans $\mathrm{Ind}_B^G\, M_{\delta_1\otimes\delta_2}$, et

$$\big(\mathrm{Ind}_B^G\, M\big)^0 = \oplus_{\delta_1\delta_2=\omega_M} \big(\mathrm{Ind}_B^G\, M_{\delta_1\otimes\delta_2}\big)^0.$$

Proposition 2.26. — *Soit* $\Pi \subset \mathrm{Ind}_B^G M$ *un* $k_L[G]$*-module. Si l'application* $\Pi \to M$*,* B*-équivariante, obtenue en composant l'inclusion avec l'application naturelle* $\mathrm{Ind}_B^G M \to M$*, est surjective, alors* Π *contient* $\big(\mathrm{Ind}_B^G\, M\big)^0$*.*

Démonstration. — La démonstration se fait composante isotypique par composante isotypique, par récurence sur la longueur. Le seul cas non trivial (où $\mathrm{Ind}_B^G\, \delta_1 \otimes \delta_2$ n'est pas irréductible) est celui d'une composante de la forme $M_{\delta\otimes\delta}$, pour lequel on utilise le lemme 2.27 ci-dessous.

Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, on note Y_τ le $k_L[B]$-module $k_L \cdot e_1 \oplus k_L \cdot e_2$ avec action de B donnée par

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_1 = e_1 \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_2 = e_2 + \tau(ad^{-1})e_1.$$

Alors Y_τ est une extension de $k_L(1 \otimes 1)$ par $k_L(1 \otimes 1)$, et toute $k_L[B]$-extension non triviale de $k_L(1 \otimes 1)$ par $k_L(1 \otimes 1)$, possédant un caractère central, est isomorphe à Y_τ pour un $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$ (unique à multiplication près par un élément de k_L^*).

Maintenant, on a une suite exacte de $k_L[G]$-modules

$$0 \to \big(\mathrm{Ind}_B^G\, 1 \otimes 1\big) \cdot e_1 \to \mathrm{Ind}_B^G\, Y_\tau \to \big(\mathrm{Ind}_B^G\, 1 \otimes 1\big) \cdot \overline{e}_2 \to 0,$$

où l'on a noté $\overline{e}_2$ l'image de e_2 dans $Y_\tau/(k_L \cdot e_1)$. Par ailleurs, $\mathrm{Ind}_B^G\, 1 \otimes 1$ est une extension non triviale de St par $\mathbf{1}$, et on note $\widetilde{E}_\tau$ l'image réciproque de $\mathbf{1} \cdot \overline{e}_2$ dans $\mathrm{Ind}_B^G\, Y_\tau$.

Lemme 2.27. — *(i) La sous-extension* $0 \to \mathrm{St} \cdot e_1 \to E_\tau \to \mathbf{1} \cdot \overline{e}_2 \to 0$ *de* $\mathbf{1}$ *par* St *est non triviale.*

(ii) Soit $\Pi\subset \mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$. Si l'application B-équivariante $\Pi\to Y_\tau$, obtenue en composant l'inclusion avec l'application naturelle $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau\to Y_\tau$, est injective, alors Π contient $\widetilde{E}_\tau$.

Démonstration. — (i) Si $0\to \mathrm{St}\cdot e_1\to E_\tau\to \mathbf{1}\cdot\overline{e}_2\to 0$ est scindée, alors $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$ admet comme sous-$k_L[G]$-module une extension de $\mathbf{1}\cdot\overline{e}_2$ par $\mathbf{1}\cdot e_1$. Par ailleurs, $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$, vu comme $k_L[B]$-module, admet un unique sous-quotient extension de $\mathbf{1}\cdot\overline{e}_2$ par $\mathbf{1}\cdot e_1$, à savoir Y_τ. Or Y_τ ne s'étend pas en une représentation de G car $B\cap \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ n'agit pas trivialement ; on obtient donc une contradiction qui permet de conclure.

Passons à la démonstration du (ii). Si $\Pi\to Y_\tau$ est surjective, alors Π contient $\mathbf{1}\cdot e_1$, et son image modulo $\big(\mathrm{Ind}_B^G 1\otimes 1\big)\cdot e_1$ contient $\mathbf{1}\cdot\overline{e}_2$, et comme l'extension $0\to\mathrm{St}\cdot e_1\to E_\tau\to\mathbf{1}\cdot\overline{e}_2\to 0$ est non triviale, cela implique que $\Pi/\mathbf{1}\cdot e_1$ contient E_τ, et donc que Π contient $\widetilde{E}_\tau$, ce que l'on cherchait à démontrer.

Proposition 2.28. — *Si Π est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, alors Π admet $(\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi))^0$ comme sous-quotient (*plus exactement, comme sous-objet d'un quotient).

Démonstration. — Si $v\in\Pi$, on note $\phi_v : G\to J(\Pi)$ la fonction définie par $\phi_v(g)=\overline{g\cdot v}$, où $\overline{g\cdot v}$ désigne l'image de $g\cdot v$ dans $J(\Pi)$. Si $h\in G$, on a $\phi_{h\cdot v}(g)=\phi_v(gh)$, et si $b\in B$, on a $\phi_v(bg)=b\cdot\phi_v(g)$, ce qui montre que $v\mapsto\phi_v$ est une application G-équivariante de Π dans $\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$. Par ailleurs, l'application composée $\Pi\to\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)\to J(\Pi)$ est clairement surjective, ce qui permet d'utiliser la prop. 2.26 pour conclure.

Corollaire 2.29. — *Si Π est irréductible, alors $J(\Pi)$ est de longueur $\leqslant 1$ sur $\mathscr{O}_L$.*

3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Le but de ce § est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.1. — *Toute objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admet une présentation standard.*

Démonstration. — D'après la prop. 2.13, il suffit de prouver que, si Π est irréductible, alors Π admet une présentation standard. Or d'après Barthel-Livné [**1, 2**] et Breuil [**6**], une représentation irréductible est, soit supersingulière soit un sous-objet d'une série principale, et il suffit donc de montrer que ces deux types de représentations admettent une présentation standard. Pour les supersingulières cela fait l'objet de la prop. 3.11, et la série principale est traitée dans la prop. 3.7.

3.1. Les objets irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$

Les objets irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ ont été classifiés par Barthel-livné [**1, 2**] et Breuil [**6**].

Si $0\leqslant r\leqslant p-1$, et si $\chi:\mathbf{Q}_p^*\to k_L^*$ est un caractère, on note $W_{r,\chi}$ le KZ-module $(\mathrm{Sym}^r k_L^2)\otimes\chi\circ\det$, où K agit à travers son quotient $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. C'est un KZ-module irréductible.

Dans la suite, on identifiera $\mathrm{Sym}^r k_L^2$ au sous-espace de $k_L[X]$ des polynômes de degré $\leqslant r$, muni de l'action à gauche de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ donnée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot P(X)=(a+cX)^r P(\frac{b+dX}{a+cX})$. Le module $W_{r,\chi}$ admet alors comme base les polynômes

$$X^r, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r=(X+1)^r,\dots,\left(\begin{smallmatrix} 1 & r\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r=(X+r)^r,$$

et l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ est décrite par les relations :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\right)^r \cdot X^r = \chi(-1)r!\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^r,$$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^r = \chi(a)X^r, \text{ si } a \in \mathbf{Z}_p^*.$$

Si P est un élément de $W_{r,\chi}$, on définit $P(\infty) \in k_L$ comme le coefficient de X^r dans P. Si $0 \leqslant r \leqslant p-1$, et si $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$, Barthel et Livné ont montré l'existence d'un opérateur $T_p : I(W_{r,\chi}) \to I(W_{r,\chi})$, commutant à l'action de G, et tel que, si $g \in G$ et $P \in W_{r,\chi}$, l'on ait

$$T_p([g,P]) = \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[g\begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1] + P(\infty)[g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, X^r].$$

Si $\lambda \in k_L$, soit $\Pi(r,\lambda,\chi) = I(W_{r,\chi})/(T_p - \lambda) \cdot (I(W_{r,\chi}))$.

Théorème 3.2. — *(i) La représentation $\Pi(r,\lambda,\chi)$ est irréductible sauf si $r = 0$ et $\lambda = \pm 1$, auquel cas $\Pi(r,\lambda,\chi)$ est une extension d'une représentation $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda \circ \det$ irréductible, de dimension infinie, par le caractère $\chi\mu_\lambda \circ \det$, ou si $r = p-1$ et $\lambda = \pm 1$, auquel cas $\Pi(r,\lambda,\chi)$ est une extension de $\chi\mu_\lambda \circ \det$ par $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda \circ \det$.*

(ii) Tout objet irréductible de $\mathrm{Rep}_{k_L} G$ est isomorphe à un constituant de Jordan-Hölder d'une représentation $\Pi(r,\lambda,\chi)$.

Remarque 3.3. — Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, soit $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$ l'ensemble des fonctions localement constantes sur G, à support fini modulo B, telles que $\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \delta_1(a)\delta_2(d)\phi(g)$ si $g \in G$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$. On fait agir G (à gauche) sur $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$ par translation à droite sur la variable. Une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$ est dite *de la série principale*. Barthel et Livné ont démontré que $\Pi(r,\lambda,\chi)$ a même semi-simplifiée que $\mathrm{Ind}_B^G(\chi\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \chi\mu_\lambda\omega^r)$, si $\lambda \neq 0$. Donc toute représentation irréductible de G qui n'est pas de la forme $\Pi(r,0,\chi)$ est un sous-objet d'une représentation de la série principale. Les $\Pi(r,0,\chi)$ sont dites *supersingulières*. Nous verrons plus loin (discussion précédent la prop. 3.6) une description plus explicite des séries principales.

Proposition 3.4. — *(i) les seuls entrelacements entre supersingulières sont*

$$\Pi(r,0,\chi) \cong \Pi(r,0,\chi\mu_{-1}) \cong \Pi(p-1-r,0,\chi\omega^r) \cong \Pi(p-1-r,0,\chi\omega^r\mu_{-1}).$$

(ii) Il n'y a pas d'entrelacements entre les supersingulières et les sous-objets des séries principales, ni entre les composantes de Jordan-Holder de $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$ et de $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1' \otimes \delta_2'$, si $(\delta_1,\delta_2) \neq (\delta_1',\delta_2')$.

3.2. Quelques représentations du borel

Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $\delta_1 \otimes \delta_2$ le caractère $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \to \delta_1(a)\delta_2(d)$ de B, que l'on voit aussi comme une k_L-représentation de dimension 1 de B (à gauche).

Par ailleurs, on note $\mathrm{LC}_c(\delta_1 \otimes \delta_2)$ l'espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$ des fonctions localement constantes, à support commpact dans $\mathbf{Q}_p$ et à valeurs dans k_L, muni de l'action de B (à gauche) donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot_{\delta_1 \otimes \delta_2} \phi(x) = \delta_1(a)\delta_2(d)\phi\left(\frac{dx-b}{a}\right),$$

et l'action à droite correspondante étant donnée par

$$\phi\star_{\delta_1\otimes\delta_2}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)(x)=\delta_1^{-1}(a)\delta_2^{-1}(d)\phi\big(\frac{ax+b}{d}\big).$$

Si $i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, soit $\phi_i=\mathbf{1}_{i+p\mathbf{Z}_p}\in\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$. Soit $Y(\delta_1,\delta_2)$ le k_L-espace vectoriel $\oplus_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}k_L\cdot\phi_i$, munie de l'action de $ZB(\mathbf{Z}_p)$ obtenue par restriction de celle sur $\mathrm{LC}_c(\delta_1\otimes\delta_2)$.

Proposition 3.5. — *Le $k_L[B]$-module $\mathrm{LC}_c(\delta_1\otimes\delta_2)$ est le quotient de $\mathrm{Ind}_{ZB(\mathbf{Z}_p)}^BY(\delta_1,\delta_2)$ par le sous-$k_L[B]$-module engendré par $R_{\delta_1,\delta_2,0}$, avec*

$$R_{\delta_1,\delta_2,0}=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_0]-\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\delta_1(p)^{-1}\phi_i].$$

Démonstration. — Soit J un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$. Alors

- les $\left(\begin{smallmatrix}p^n&p^nc\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, avec $n\in\mathbf{Z}$, $c\in J$, forment une famille de représentants de G/KZ ;
- $\left(\begin{smallmatrix}p^n&p^nc\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=\delta_1(p)^n\mathbf{1}_{p^n(i+c)+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$
- les $p^n(i+c)$, avec $c\in J$ et $i\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ forment un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/p^{n+1}\mathbf{Z}_p$,
- en tant que k_L-espace vectoriel, on a

$$\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)=\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\bigoplus_{b\in\mathbf{Q}_p/p^{n+1}\mathbf{Z}_p}k_L\cdot\mathbf{1}_{b+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}\Big)/\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\bigoplus_{b\in\mathbf{Q}_p/p^n\mathbf{Z}_p}k_L\cdot(\mathbf{1}_{b+p^n\mathbf{Z}_p}-\sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{1}_{b+p^ni+p^{n+1}\mathbf{Z}_p})\Big),$$

- $\mathbf{1}_{b+p^n\mathbf{Z}_p}-\sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{1}_{b+p^ni+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}=\delta_1(p)^{1-n}\left(\begin{smallmatrix}p^{n-1}&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_{\delta_1,\delta_2,0}$.

Ceci permet de conclure.

3.3. La série principale en caractéristique p

Remarquons que, k_L^* étant d'ordre premier à p, et $1+p\mathbf{Z}_p$ étant un pro-p-groupe, on a $\delta(x)=1$ si $x\in1+p\mathbf{Z}_p$ et $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$. Soit $\omega:\mathbf{Q}_p^*\to\mathbf{F}_p^*$ la réduction modulo p du caractère $x\mapsto x|x|$. On a donc $\omega(p)=1$. Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $B(\delta_1,\delta_2)$ l'espace des fonctions ϕ, à valeurs dans k_L, localement constantes sur $\mathbf{Q}_p$, telle que $x\mapsto\big(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}\big)(x)\cdot\phi(1/x)$ se prolonge en 0 en une fonction localement constante sur $\mathbf{Q}_p$. Si ϕ_∞ est la fonction définie sur $\mathbf{Q}_p$ par

$$\phi_\infty(x)=\begin{cases}\big(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}\big)(x)&\text{si } x\notin\mathbf{Z}_p,\\0&\text{si } x\in\mathbf{Z}_p,\end{cases}$$

alors $B(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)\oplus k_L\cdot\phi_\infty$. On munit $B(\delta_1,\delta_2)$ d'une action à droite $\star_{\delta_1,\delta_2}$ de G, définie par,

$$\big(\phi\star_{\delta_1,\delta_2}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\big)(x)=\big(\omega\delta_1^{-1}\big)(ad-bc)\big(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}\big)(cx+d)\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big).$$

Comme d'habitude, cela permet de munir $B(\delta_1,\delta_2)$ d'une action à gauche $\cdot_{\delta_1,\delta_2}$ de G définie par $g\cdot_{\delta_1,\delta_2}\phi=\phi\star_{\delta_1,\delta_2}g^{-1}$.

Si $v\in\mathrm{Ind}_B^G\delta_1\otimes\delta_2$, on définit $\phi_v:\mathbf{Q}_p\to k_L$ par la formule $\phi_v(x)=v\big(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right)\big)$. Un petit calcul montre que ceci définit un isomorphisme G-équivariant de $\mathrm{Ind}_B^G\delta_1\otimes\delta_2$ sur $B(\delta_2\omega,\delta_1)$ (et donc que $B(\delta_1,\delta_2)\cong\mathrm{Ind}_B^G\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$). Par ailleurs, l'évaluation en $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ nous fournit une application B-équivariante surjective $\mathrm{Ind}_B^G\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}\to\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$. Traduit en termes de l'isomorphisme

$B(\delta_1,\delta_2)\cong \mathrm{Ind}_B^G\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$, il est facile de voir que le noyau n'est autre que $\mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2)$. On en déduit les résultats suivants.

Proposition 3.6. — *(i) $B(\delta_1,\delta_2)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$; son caractère central est $\omega^{-1}\delta_1\delta_2$.*

(ii) $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$ est stable sous l'action du borel B, et on a une suite exacte de $k_L[B]$-modules

$$0\to \mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2)\to B(\delta_1,\delta_2)\to\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}\to 0.$$

Proposition 3.7. — *Si $i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, soit $\phi_i=\mathbf{1}_{i+p\mathbf{Z}_p}$, et soit $W(\delta_1,\delta_2)$ le sous-k_L-espace vectoriel de $B(\delta_1,\delta_2)$ engendré par ϕ_∞ et les ϕ_i, pour $i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$. Alors $W(\delta_1,\delta_2)\in\mathscr{W}(B(\delta_1,\delta_2))$, et $R(W(\delta_1,\delta_2),B(\delta_1,\delta_2))$ est engendré, comme $\mathscr{O}_L[G]$-module, par*

$$\begin{aligned}R_{\delta_1,\delta_2,0}&=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_0]-\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\delta_1(p)^{-1}\phi_i]\\ R_{\delta_1,\delta_2,\infty}&=[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\delta_1(p)^{-1}\phi_\infty]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_\infty]-\sum_{i\in(\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*}[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1})(i)\phi_i].\end{aligned}$$

Corollaire 3.8. — *$I(W(\delta_1,\delta_2))/R(W(\delta_1,\delta_2),B(\delta_1,\delta_2))$ est une présentation standard de $B(\delta_1,\delta_2)$.*

Démonstration. — Pour déduire le corollaire de la proposition, il suffit d'utiliser la prop. 2.7.

Passons à la démonstration de la prop. 3.7. Pour simplifier les notations, posons $\Pi=B(\delta_1,\delta_2)$, $W=W(\delta_1,\delta_2)$ et $\delta=\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$, et notons simplement $\cdot$ au lieu de $\cdot_{\delta_1,\delta_2}$ l'action de G sur Π.

Des calculs immédiats montrent que

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=\phi_{i+1}\quad\text{si } i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,$$

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty(x)=\begin{cases}\delta(x-1)=\delta(x)\delta(1-x^{-1})=\delta(x) & \text{si } x\notin\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } x\in\mathbf{Z}_p,\end{cases}=\phi_\infty(x),$$

$$\text{si } a\in(\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*,\text{ alors}\quad\begin{cases}\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=\omega^{-1}(a)\delta_1(a)\phi_{ai} & \text{si } i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,\\ \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty=\delta_2(a)\phi_\infty\end{cases}$$

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=\delta_1(-1)\delta(i)^{-1}\phi_{i^{-1}}\quad\text{si } i\in(\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*,\quad \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_0=\phi_\infty,\quad \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty=\phi_0.$$

On en déduit la stabilité de W par $ZG(\mathbf{Z}_p)$, et donc l'appartenance de W à $\mathscr{W}(\Pi)$.

Maintenant, on a $\delta_1(p)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=\mathbf{1}_{pi+p^2\mathbf{Z}_p}$, et

$$\delta_1(p)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty(x)=\phi_\infty(x/p)=\begin{cases}\delta(x) & \text{si } x\notin p\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } x\in\mathbf{Z}_p,\end{cases}=\phi_\infty(x)+\sum_{i\in(\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*}\delta(i)\phi_i(x).$$

On en déduit l'appartenance de $R_0=R_{\delta_1,\delta_2,0}$ et $R_\infty=R_{\delta_1,\delta_2,\infty}$ à $R(W,\Pi)$.

En tant que B-module, Π est, modulo $\mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2)$, engendré par l'image $\overline{\phi}_\infty$ de ϕ_∞, et R_∞ devient $[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\delta_1(p)^{-1}\overline{\phi}_\infty]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\overline{\phi}_\infty]$. Soit $R'(W,\Pi)$ le sous-$k_L[B]$-module de $R(W,\Pi)$ engendré par R_0 et R_∞. Le quotient de $I(W)$ par $R'(W,\Pi)$ peut, grâce à la prop. 3.5, se dévisser par la suite exacte de $k_L[B]$-modules

$$0\to\mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2)\to I(W)/R'(W,\Pi)\to k_L\cdot\overline{\phi}_\infty\to 0.$$

Comme $\Pi = I(W)/R(W,\Pi)$ est un quotient de $I(W)/R'(W,\Pi)$ qui, d'après la prop. 3.6, s'inscrit dans la même suite exacte de $k_L[B]$-modules, on en déduit que l'application naturelle de $I(W)/R'(W,\Pi)$ sur Π est un isomorphisme, et donc que $R(W,\Pi) = R'(W,\Pi)$. Ceci permet de conclure.

Remarque 3.9. — Soit $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans k_L et à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. C'est un sous-k_L-espace vectoriel de dimension 1 de $B(\delta_1,\delta_2)$ stable par le sous-groupe dièdral Δ de G. Le quotient $B(\delta_1,\delta_2)/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est donc une représentation de D de dimension 2 engendré par les images $\overline{\phi}_\infty$ et $\overline{\phi}_0$ de ϕ_∞ et ϕ_0 qui sont échangées par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Par ailleurs $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ agit par multiplication par $\delta_1\omega^{-1}(a)\delta_2(d)$ sur $\overline{\phi}_0$ et par multiplication par $\delta_1\omega^{-1}(d)\delta_2(a)$ sur $\overline{\phi}_\infty$. On en déduit, qu'en tant que $k_L[\Delta]$-module, on a

$$B(\delta_1,\delta_2)/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L) \cong \mathrm{Ind}_A^D\, \delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2,$$

où l'on a noté $\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2$ le caractère $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right) \mapsto \delta_1\omega^{-1}(a)\delta_2(d)$ de A. En particulier, si $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, ce $k_L[\Delta]$-module est irréductible, ce qui nous sera utile plus loin.

3.4. La steinberg

Si $\delta_1 = \omega$ et $\delta_2 = 1$, on a $\phi_\infty = \mathbf{1}_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)-\mathbf{Z}_p}$, et $B(\omega,1)$ est l'espace $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p),k_L)$ des fonctions localement constantes sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ muni de l'action à gauche de G définie par $g\cdot\phi = \phi\star g^{-1}$, où l'action $\star$ à droite de G est donnée par $\phi\star\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)(x) = \phi(\frac{ax+b}{cx+d})$. Le sous-espace des fonctions constantes est stable par G, et on note St le quotient : c'est la steinberg. Comme $\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} = \phi_\infty + \sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}\phi_i \in W(\omega,1)$, on peut définir le $ZG(\mathbf{Z}_p)$-module $W_0(\omega,1) = W(\omega,1)/k_L\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}$. De manière explicite, on a $W_0(\omega,1) = \oplus_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} k_L\cdot\phi_i$, avec action triviale de Z et

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i = \phi_{i+1} \quad \text{si } i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,\\
&\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i = \phi_{ai} \quad \text{si } a\in\mathbf{Z}_p^* \text{ et si } i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,\\
&\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i = \phi_{i^{-1}} \quad \text{si } i\in(\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*, \quad \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_0 = -\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}\phi_i.
\end{aligned}$$

On déduit de la prop. 3.7 le résultat suivant.

Proposition 3.10. — *La représentation* St *admet une présentation standard et, plus précisément,* $W_0(\omega,1)\in\mathscr{W}^{(0)}(\mathrm{St})$ *et* $R(W_0(\omega,1),\mathrm{St})$ *est engendré par* $[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_0] - \sum_{i=0}^{p-1}[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_i]$.

3.5. Les supersingulières

Le but de ce n° est de démontrer que les représentations supersingulières de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettent une présentation standard (ceci a aussi été démontré par Breuil et Paskunas [**9**], et par Vigneras [**23**]). De manière précise, on a le résultat suivant.

Proposition 3.11. — *Si* $0\leqslant r\leqslant p-1$, *et si* $\chi:\mathbf{Q}_p^*\to k_L^*$, *alors, on a des isomorphismes*

$$\Pi(r,0,\chi)\cong\frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(R_0,R_1)}\cong\Pi(p-1-r,0,\chi\omega^r),$$

de G-représentations, avec

$$R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), (0, Y^{p-1-r})] - [\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), (1,0)]$$

$$R_1 = [\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), (0,1)] - (-1)^r\chi(p)^2[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), (X^r, 0)]$$

Démonstration. — La démonstration de la proposition va demander un peu de préparation.

Lemme 3.12. — *Soit $0 \leqslant r \leqslant p-1$, et soit $P_r(X) = \frac{(-X+1)\cdots(-X+r)}{r!}$. Alors, dans $\mathbf{F}_p$, on a, $P_r(\infty) = \frac{(-1)^r}{r!}$ et*

$$P_r(-i) = \begin{cases} (-1)^i\binom{p-1-r}{i} & si\ 0 \leqslant i \leqslant p-1-r,\\ 0 & si\ p-r \leqslant i \leqslant p-1.\end{cases}$$

Démonstration. — Les deux termes sont clairement nuls si $p-r \leqslant i \leqslant p-1$. Maintenant, modulo p, on a, si $0 \leqslant i \leqslant p-1-r$,

$$\binom{p-1-r}{i} = \frac{(p-1-r)\cdots(p-i-r)}{i!} = (-1)^i\frac{(r+1)\cdots(r+i)}{i!} = (-1)^i\frac{(r+i)!}{r!\cdot i!} = (-1)^iP_r(-i).$$

Ceci permet de conclure.

Lemme 3.13. — *Soit $f(r,\chi) = \left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 \in \Pi(r,0,\chi)$. Alors le sous-$KZ$-module de $\Pi(r,0,\chi)$ engendré par $f(r,\chi)$ est isomorphe à $W_{p-1-r,\chi\omega^r}$.*

Démonstration. — Comme $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1$ est invariant par $\left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$, le vecteur $f(r,\chi)$ est invariant par $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \supset \left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & p\mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$. De plus, on a

$$\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot f(r,\chi) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = \chi(-1)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r$$

$$\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot f(r,\chi) = \left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = \chi(a)a^rf(r,\chi) = (\chi\omega^r(a))f(r,\chi)$$

$$\begin{aligned}(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)^{p-1-r}\cdot f(r,\chi) &= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-1-r-i}\binom{p-1-r}{i}\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1\\ &= (-1)^{p-1-r}\sum_{i=0}^{p-1}P_r(-i)\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1\\ &= -(-1)^{p-1-r}P(\infty)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r - \frac{1}{r!}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r = (-1)^r(p-1-r)!\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r,\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de ce que, d'après le théorème de Wilson,

$$r!(p-1-r)! = (-1)^{p-1-r}(p-1)! = -(-1)^{p-1-r} = -(-1)^r.$$

On peut réécrire la dernière relation sous la forme

$$(u-1)^{p-1-r}\cdot f(r,\chi) = \chi(-1)(-1)^r(p-1-r)!\,w\cdot f(r,\chi).$$

Il n'y a plus qu'à comparer les formules ci-dessus avec celles pour $W_{p-1-r,\chi\omega^r}$ pour conclure.

Soit alors $W = W_{r,\chi}\oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r}$. On peut représenter un élément de W sous la forme (P,Q), où P est un polynôme de degré $\leqslant r$ en X et Q est un polynôme de degré $\leqslant p-1-r$ en Y. D'après ce qui précède, on dispose d'une application G-équivariante de $I(W)$ dans $\Pi(r,0,\chi)$ envoyant $[g,(X^r,0)]$ sur $g\cdot X^r$ et $[g,(0,Y^{p-1-r})]$ sur $g\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1$.

Lemme 3.14. — *Le k_L-espace vectoriel $R(W,\Pi(r,0,\chi))$ contient les relations R_0 et R_1 de la proposition 3.11.*

Démonstration. — Pour $R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})] - [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]$, le résultat est évident. Par ailleurs, dans $I(W)$, on a

$$[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)] = [\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot(0,1)] = \chi(-1)(-1)^r\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})].$$

L'image dans $\Pi(r,0,\chi)$ du membre de droite est $\chi(-1)(-1)^r\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = (-1)^r\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r$. On en déduit le fait que $R(W,\Pi(r,0,\chi))$ contient aussi

$$R_1' = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)] - (-1)^r[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),(X^r,0)].$$

finalement, en multipliant la relation ci-dessus par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, on voit que $R(W,\Pi(r,0,\chi))$ contient

$$R_1 = [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)] - (-1)^r\chi(p)^2[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(X^r,0)].$$

Lemme 3.15. — *Le $\mathscr{O}_L[G]$-module engendré par les relations R_0, R_1 contient le sous-$\mathscr{O}_L[G]$-module $(T_p\cdot I(W_{r,\chi}),0)\oplus(0,T_p\cdot I(W_{p-1-r,\chi\omega^r}))$ comme sous-module strict.*

Démonstration. — Si P est un polynôme de degré $\leqslant r$, on a

$$\sum_{i=0}^{p-1}P(-i)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_0 = \sum_{i=0}^{p-1}\Big(P(-i)[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(0,Y^{p-1-r})] - P(-i)[\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]\Big).$$

On a de plus

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1}P(-i)[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(0,Y^{p-1-r})] =&[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\sum_{i=0}^{p-1}P(-i)(0,(Y+i)^{p-1-r})]\\ =&-(-1)^rP(\infty)[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)],\end{aligned}$$

la dernière identité venant de ce que P étant de degré $\leqslant r$, le polynôme $i\mapsto P(-i)(Y+i)^{p-r-1}$ est de degré $\leqslant p-1$, de terme de degré $p-1$ égal à $(-1)^rP(\infty)$, et de ce que $\sum_{i=0}^{p-1}i^k=0$ si $0\leqslant k\leqslant p-2$ et $\sum_{i=0}^{p-1}i^{p-1}=-1$. On en déduit l'identité

$$\begin{aligned}(-1)^rP(\infty)R_1' + \sum_{i=0}^{p-1}P(-i)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_0 =& -\Big(\sum_{i=0}^{p-1}P(-i)[\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)] + P(\infty)[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),(X^r,0)]\Big)\\ =& -(T_p([\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P]),0).\end{aligned}$$

De même, (R_0,R_1) contient aussi $R_0' = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})] - \chi(p)^2[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]$, et un calcul similaire à celui effectué ci-dessus montre que, si Q est un polynôme de degré $\leqslant p-1-r$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1}Q(-i)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_1 + Q(\infty)R_0' =& \sum_{i=0}^{p-1}Q(-i)[\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)] + Q(\infty)[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-r-1})]\\ =&(0,T_p([\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),Q])).\end{aligned}$$

On en déduit que (R_0, R_1) contient les $k_L[G]$-modules $\big(T_p\cdot I(W_{r,\chi}),0\big)$ et $\big(0,T_p\cdot I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})\big)$, et la somme directe de ces deux modules est un sous-module strict de (R_0,R_1) car ni R_0 ni R_1 n'en sont éléments. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition 3.11. On déduit du lemme 3.14 l'existence d'une application G-équivariante *non injective*

$$f:\frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(T_p\cdot I(W_{r,\chi}),0)\oplus(0,T_p\cdot I(W_{p-1-r,\chi\omega^r}))}\to\frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(R_0,R_1)}.$$

Le membre de gauche n'est autre que $\Pi(r,0,\chi)\oplus\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$. Comme par ailleurs $R(W_{r,\chi}\oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r},\Pi(r,0,\chi))$ contient (R_0,R_1), on en déduit l'existence d'une application G-équivariante surjective

$$g:\frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(R_0,R_1)}\to\Pi(r,0,\chi)$$

telle que la composée $g\circ f$ soit l'identité de $\Pi(r,0,\chi)$, et induise une application non nulle de $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$ sur $\Pi(r,0,\chi)$ (puisque l'image de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot Y^{p-1-r}$ est $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1\neq 0$). Comme $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$ et $\Pi(r,0,\chi)$ sont irréductibles, cela implique que

- $g\circ f$ induit un isomorphisme de $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$ sur $\Pi(r,0,\chi)$;
- le noyau de f est isomorphe à $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)\cong\Pi(r,0,\chi)$;
- g est un isomorphisme ;
- $R(W_{r,\chi}\oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r},\Pi(r,0,\chi))=(R_0,R_1)$.

Ceci permet de conclure.

4. Les foncteurs $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$ et $\Pi\to\mathbf{V}(\Pi)$

Ce § contient la définition du (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi)$ attaché à une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. La définition est *finalement* très simple (elle correspond à couper l'arbre de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$ au milieu de l'arête correspondant à $\mathbf{Z}_p$), et se généralise **[24]** à d'autres groupes que $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il faut quand-même vérifier que le foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$ ainsi obtenu donne bien les résultats voulus ; c'est l'objet du th. 4.14.

4.1. P^+-modules et (φ,Γ)-modules

Notons P^+ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\}&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique muni d'une action continue de P^+, alors M est aussi muni d'une action continue de l'algèbre de groupe complétée $\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)]]$ de $\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Comme l'application $\lambda\mapsto A_\lambda\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\,\lambda(\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right))$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)]]$ sur $\mathscr{O}_L[[T]]$, on peut aussi voir M comme un module sur $\mathscr{O}_L[[T]]$ ou, de manière pédante, on peut considérer le $\mathscr{O}_L[[T]]$-module $\mathbf{D}(M)$ défini par

$$\mathbf{D}(M)=\mathscr{O}_L[[T]]\otimes_{\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)]]}M.$$

Les $\mathscr{O}_L$-modules M et $\mathbf{D}(M)$ sont naturellement isomorphes ; notons $\iota:M\to\mathbf{D}(M)$ cet isomorphisme. Il existe un opérateur $\varphi:\mathbf{D}(M)\to\mathbf{D}(M)$, et si $\gamma\in\Gamma$, un opérateur $\gamma:\mathbf{D}(M)\to\mathbf{D}(M)$, vérifiant, si $v\in M$, les relations suivantes :

$$\varphi(\iota(v))=\iota(\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v)\quad\text{et}\quad\gamma(\iota(v))=\iota(\left(\begin{smallmatrix}\chi(\gamma)&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v).$$

Rapellons par ailleurs que l'on a muni $\mathscr{O}_L[[T]]$ d'une action de φ et Γ, avec

$$\varphi(T)=(1+T)^p-1 \quad \text{et} \quad \gamma(T)=(1+T)^{\chi(\gamma)}-1.$$

Lemme 4.1. — *Si $\lambda\in\mathscr{O}_L[[T]]$, et si $x\in M$, alors*

$$\varphi(\lambda\iota(v))=\varphi(\lambda)\iota(v) \quad \text{et} \quad \gamma(\lambda\iota(v))=\gamma(\lambda)\iota(v),\ \textit{si } \gamma\in\Gamma,$$

et les actions de φ et Γ commutent entre elles. Autrement dit, $\mathbf{D}(M)$ est muni d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_L[[T]]$.

Démonstration. — C'est une simple traduction de l'identité $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & ax\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et de la commutativité de $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

4.2. Le (φ,Γ)-module attaché à une représentation de $\mathbf{GL}_2$

Soit $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, et soit $W\in\mathscr{W}(\Pi)$. Soit $I^+(W)$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $I(W)$ engendré par les $[g,W]$, pour $g\in P^+=\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Comme l'intersection du semi-groupe P^+ avec K est $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et comme

$$P^+/\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\coprod_{n\in\mathbf{N}}\left\{\begin{pmatrix} p^n & i\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{avec } 0\leqslant i\leqslant p^n-1\right\},$$

on a une décomposition naturelle de $I^+(W)$ sous la forme

$$I^+(W)=\oplus_{n\in\mathbf{N}}I^{(n)}(W),\quad \text{avec } I^{(n)}(W)=\oplus_{i=0}^{p^n-1}[\begin{pmatrix} p^n & i\\ 0 & 1\end{pmatrix},W],$$

et, si $n\in\mathbf{N}$, on note $\pi_n : I^+(W)\to I^{(n)}(W)$ la projection naturelle.

On note $I^+(W,\Pi)$ l'image de $I^+(W)$ dans Π. Autrement dit

$$I^+(W,\Pi)=\sum_{g\in P^+}g\cdot W=\sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{i=0}^{p^n-1}\begin{pmatrix} p^n & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot W$$

est le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π engendré par les translatés de W par le semi-groupe P^+. En particulier, $I^+(W,\Pi)$ est un P^+-module.

On note $I^-(W)$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $I(W)$ engendré par les $[\begin{pmatrix} p^n & i\\ 0 & 1\end{pmatrix},W]$, pour $n\notin\mathbf{N}$ ou $i\notin\mathbf{Z}_p$. On a donc $I(W)=I^+(W)\oplus I^-(W)$ et $I^-(W)$ est stable sous l'action de $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, mais pas sous l'action de $\begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Par contre, $I^-(W)$ est stable sous l'action de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Lemme 4.2. — *Si $W'\in\mathscr{W}(\Pi)$ contient W, alors $I^+(W,\Pi)$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module d'indice fini de $I^+(W',\Pi)$.*

Démonstration. — Comme $W'\subset W^{[n]}$ si n est assez grand, et comme $W^{[n+1]}=(W^{[n]})^{[1]}$, il suffit de vérifier le résultat pour $W'=W^{[1]}$. Mais alors, $W'\subset I^+(W,\Pi)+\begin{pmatrix} p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot W$, et $\begin{pmatrix} p^n & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^{n-1} & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in P^+$ si $n\geqslant 1$, ce qui prouve que $I^+(W',\Pi)/I^+(W,\Pi)$ est un quotient de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot W$. Ceci permet de conclure.

On suppose maintenant $W \in \mathscr{W}^{(1)}(W,\Pi)$. On note $D_W^\natural(\Pi)$ le dual de $I^+(W,\Pi)$; c'est un quotient de $\Pi^\vee$. Par ailleurs, on note $D_W^+(\Pi)$ le sous-ensemble des $\mu \in \Pi^\vee$ qui sont identiquement nul sur $I^-(W)$.

Lemme 4.3. — *L'application naturelle de $D_W^+(\Pi)$ dans $D_W^\natural(\Pi)$ est injective et (l'image de) $D_W^+(\Pi)$ est d'indice fini dans $D_W^\natural(\Pi)$.*

Démonstration. — Si $\mu \in D_W^+(\Pi)$ a une image nulle dans $D_W^\natural(\Pi)$, alors μ, vu comme élément de $I(W)^\vee$, est nul sur $I^+(W)$ et sur $I^-(W)$; on a donc $\mu = 0$, ce qui montre que $D_W^+(\Pi)$ s'identifie à un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $D_W^\natural(\Pi)$.

Maintenant, si $\mu \in D_W^\natural(\Pi) = \Gamma(\mathscr{T}_{]\sigma_{-1},\sigma_0)}, \mathscr{F}(W,\Pi))$ est identiquement nul sur $W + \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$, alors μ peut s'étendre en un élément de $\Pi^\vee$ identiquement nul sur $\mathscr{T}_{]\sigma_0,\sigma_{-1})}$, d'après le lemme 2.21. Ceci implique que l'image de $D_W^+(\Pi)$ dans $D_W^\natural(\Pi)$ contient tous les μ nuls sur $W + \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$, et donc est d'indice inférieur ou égal à deux fois la longueur de W sur $\mathscr{O}_L$. Ceci permet de conclure.

Remarque 4.4. — (i) Si $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, pour qu'un élément de $D_W^\natural(\Pi)$ puisse s'étendre en un élément de $D_W^+(\Pi)$, il suffit que μ soit nul sur $W \cap \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$.

(ii) Si $n \geqslant 2$, et si $W \in \mathscr{W}^{(n)}(\Pi)$, la démonstration précédente s'adapte sans problème si on remplace $D_W^\natural(\Pi)$ par $\Gamma(\mathscr{T}_{]\sigma_{-1},\sigma_0)}, \mathscr{F}(W,\Pi))$; il est possible que ces deux espaces coïncident.

Comme $I^+(W)$ et $I^-(W)$ sont stables sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, il en est de même de $D_W^+(\Pi)$ et $D_W^\natural(\Pi)$. Comme de plus, $I^-(W)$ est stable sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, cela implique que $D_W^+(\Pi)$ est stable sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et donc $D_W^+(\Pi)$ est un P^+-module ; il est donc muni naturellement d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_L[[T]]$. Le module $I^+(W)$ n'est pas stable par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et donc $D_W^\natural(\Pi)$ n'est pas stable par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et donc est seulement muni d'une structure de Γ-module sur $\mathscr{O}_L[[T]]$. D'un autre côté, $I^+(W)$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et donc, par dualité, $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agit sur $D_W^\natural(\Pi)$. Nous noterons $\psi : D_W^\natural(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$ cet opérateur. Il est clair que ψ commute à l'action de Γ, et que l'on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ sur $D_W^+(\Pi)$.

Lemme 4.5. — *$\psi : D_W^\natural(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$ est surjectif.*

Démonstration. — Par définition, on a $\langle \psi(\mu), v\rangle = \langle \mu, \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot v\rangle$. Par ailleurs, comme $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot I^+(\Pi,W) \subset I^+(\Pi,W)$, l'application naturelle de $D_W^\natural(\Pi) = (I^+(\Pi,W))^\vee$ sur $\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot I^+(\Pi,W)\big)^\vee$ est surjective. On en déduit que, si $\lambda \in D_W^\natural(\Pi)$, il existe $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$ dont la restriction à $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot I^+(\Pi,W)$ est donnée par $\langle \psi, v\rangle = \langle \lambda, \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot v\rangle$. On a alors $\psi(\mu) = \lambda$, ce qui permet de conclure.

Proposition 4.6. — *(i) Si $\mu \in \Pi^\vee$, et si $\mu^{(n)}$ est la restriction de $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu$ à $I^+(W,\Pi)$, alors $(\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(D_W^\natural(\Pi))$.*

(ii) $\mu \mapsto (\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ induit un isomorphisme B-équivariant de $\Pi^\vee$ sur $\psi^{-\infty}(D_W^\natural(\Pi))$.

Démonstration. — Pour démontrer le (i), il faut vérifier que $\psi(\mu^{(n+1)}) = \mu^{(n)}$, ce qui est immédiat en revenant aux définitions. La bijectivité de $\mu \mapsto (\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ suit de ce que $I(W)$ est la réunion des $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot I^+(W)$, pour $n \in \mathbf{N}$.

Lemme 4.7. — *(i) Si $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, l'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L[[T]]} D^+_W(\Pi) \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L[[T]]} D^\natural_W(\Pi)$ est un isomorphisme.*

(ii) Si $W \subset W'$ sont deux éléments $\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, l'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L[[T]]} D^+_{W'}(\Pi) \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L[[T]]} D^\natural_W(\Pi)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après le lemme 4.3, le module $D^\natural_W(\Pi)/D^+_W(\Pi)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$; c'est donc un $\mathscr{O}_L[[T]]$-module de torsion, ce qui permet de demontrer le (i). L'argument est le même pour le (ii) ; il suffit d'utiliser le lemme 4.2.

Définition 4.8. — Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, et si $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, on note $\mathbf{D}(\Pi)$ le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L[[T]]} D^\natural_W(\Pi)$ qui, d'après le (ii) du lemme 4.7, ne dépend pas du choix de $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. D'après le (i) du lemme 4.7 et le lemme 4.1, ce module est muni d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Proposition 4.9. — *Si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, alors la suite*

$$0 \to \mathbf{D}(\Pi_2) \to \mathbf{D}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi_1) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. — Soit $R^+(W,\Pi)$ le noyau de $I^+(W) \to I^+(W,\Pi)$. Autrement dit, $R^+(W,\Pi) = R(W,\Pi) \cap I^+(W)$ est l'ensemble des éléments de $R(W,\Pi)$ à support dans $D(0,0)$. D'après le cor. 2.15, tout élément R de $R^+(W,\Pi)$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{j\in J} g_j \cdot R_j$, où J est fini, $g_j \in G$, $R_j \in R^{(1)}(W,\Pi)$ et $g_j \cdot R_j$ est à support dans $D(0,0)$ quel que soit $j \in J$. Comme un élément non nul de $R^{(1)}(W,\Pi)$ est à support dans $\{s,\ d(\sigma_0,s)\} \leqslant 1$, et a au moins deux composantes non nulles, la condition « $g_j \cdot R_j$ est à support dans $D(0,0)$ » est vérifiée si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :

- $g_j = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $R_j \in R^{(1)}(W,\Pi)_0 = R^{(1)}(W,\Pi) \cap I^+(W)$;
- il existe $i \in \{0,1,\dots,p-1\}$ et $h_j \in P^+$ tels que $g_j = \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) h_j$.

Autrement dit, on a

$$R^+(W,\Pi) = \sum_{h\in P^+} h \cdot R^{(1)}(W,\Pi)_0 + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{h\in P^+} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) h \cdot R^{(1)}(W,\Pi).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.10. — *Si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, il existe $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, $W_1 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi_1)$ et $W_2 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi_2)$ tels que les suites*

$$0 \to W_1 \to W \to W_2 \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to R^+(W_1,\Pi_1) \to R^+(W,\Pi) \to R^+(W_2,\Pi_2) \to 0$$

soient exactes.

Démonstration. — Soit $W_2 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi_2)$. Choisissons une famille génératrice finie $R_1, \dots, R_k$ de $R^{(1)}(W_2, \Pi_2)$ sur $\mathscr{O}_L$ telle que $R_1, \dots, R_\ell$ soit une famille génératrice de $R^{(1)}(W_2, \Pi_2)_0$ sur $\mathscr{O}_L$. Choisissons aussi une famille génératrice $v_1, \dots, v_m$ de W_2 sur $\mathscr{O}_L$, un relèvement $\tilde{v}_i$ de v_i dans Π pour $i \in \{1, \dots, m\}$, et une section (ensembliste) $x \mapsto \tilde{x}$ de W_2 dans le sous-$\mathscr{O}_L$-module $\tilde{W}_2$ de Π engendré par les $\tilde{v}_i$, pour $i \in \{1, \dots, m\}$.

Si $1 \leqslant j \leqslant k$, et si $R_j = \sum_{s \in \mathscr{T}} [s, x_{j,s}]$, alors $y_j = \sum_{s \in \mathscr{T}} s \cdot \tilde{x}_{j,s} \in \Pi_1$. D'après la prop. 2.18, il existe $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$, contenant les y_j, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, vivant dans une suite exacte $0 \to W_1 \to W \to W_2 \to 0$ avec $W \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$ et $W_1 \in \mathscr{W}^{(1)}(\Pi_1)$.

Soit alors, si $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$\tilde{R}_j = -[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y_j] + \sum_{s \in \mathscr{T}} [s, \tilde{x}_{j,s}].$$

Par construction, $\tilde{R}_j$ est un élément de $R^{(1)}(W, \Pi)$, et même de $R^{(1)}(W, \Pi)_0$, si $1 \leqslant j \leqslant \ell$; de plus, son image dans $I(W_2)$ est R_j. On en déduit la surjectivité de $R^+(W, \Pi) \to R^+(W_2, \Pi_2)$, ce qui permet de conclure, l'injectivité de $R^+(W_1, \Pi_1) \to R^+(W, \Pi)$ étant immédiate.

Revenons à la démonstration de la prop. 4.9. Si W, W_1, W_2 vérifient les conclusions du lemme 4.10, la suite $0 \to I^+(W_1, \Pi_1) \to I^+(W, \Pi) \to I^+(W_2, \Pi_2) \to 0$ est exacte. Par dualité, il en est de même de la suite $0 \to D^\natural_{W_2}(\Pi_2) \to D^\natural_W(\Pi) \to D^\natural_{W_1}(\Pi_1) \to 0$. Pour conclure à l'exactitude de la suite $0 \to \mathbf{D}(\Pi_2) \to \mathbf{D}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi_1) \to 0$, il suffit de remarquer que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est plat au-dessus de $\mathscr{O}_L[[T]]$ en tant que complété d'un localisé.

Lemme 4.11. — *L'application* $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$ *de* $(\Pi^\vee)^p$ *dans* $\Pi^\vee$ *induit une injection de* $(D^+_W(\Pi))^p$ *dans* $D^+_W(\Pi)$*, et le conoyau est de longueur finie sur* $\mathscr{O}_L$.

Démonstration. — Comme $D^+_W(\Pi)$ est l'ensemble des $\mu \in \Pi^\vee$ nuls en dehors de $\mathbf{Z}_p$, l'image de $D^+_W(\Pi)$ par $\mu \mapsto \left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu$ est l'ensemble des $\mu \in \Pi^\vee$ nuls en dehors de $i + p\mathbf{Z}_p$. On en déduit l'injectivité de la restriction de $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$ à $(D^+_W(\Pi))^p$.

Maintenant, soit $\mathscr{T}_i$ le sous-arbre de $\mathscr{T}$ union de σ_0 et de $\mathscr{T}_{i+p\mathbf{Z}_p}$. Cet arbre admet comme unique extrémité l'arête $[\sigma_0, \left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \sigma_0]$. D'après le lemme 2.21, si $\mu \in \Gamma(\mathscr{T}_i, \mathscr{F}(W, \Pi))$ est nul sur $[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), W]$ et sur $[\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), W]$, alors μ peut se prolonger par 0 en un élément de $\Pi^\vee$, et cet élément est de la forme $\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$, avec $\mu_i \in D^+_W(\Pi)$. On en déduit le fait que l'image de l'application $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$ contient les $\mu \in D^+_W(\Pi)$ nuls sur W et les $\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$ pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Le conoyau de l'application est donc un quotient de $W + \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$, et par suite est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 4.12. — $\mathbf{D}(\Pi)$ *est un* (φ, Γ)*-module étale.*

Démonstration. — Le lemme 4.11 se traduit, après tensorisation par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, par le fait que l'application $(x_0, \dots, x_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i)$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}(\Pi)^p$ sur $\mathbf{D}(\Pi)$, ce qui permet de conclure.

Théorème 4.13. — *L'application* $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ *est un foncteur exact contravariant de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ *dans la catégorie des* (φ, Γ)*-modules étales de longueur finie sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Démonstration. — Étant données les prop. 4.12 et 4.9, il suffit de prouver que $\mathbf{D}(\Pi)$ est de longueur finie, si Π est irréductible. Cela résulte du th. 4.14 du § suivant.

4.3. Calcul des (φ,Γ)-modules attachés aux irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$

Si $0 \leqslant r \leqslant p-1$, et si $\lambda \in k_L$, on pose $\Pi(r,\lambda) = \Pi(r,\lambda,1)$. D'après les résultats de Barthel-Livné et Breuil rappelés au § 3.1, toute k_L représentation irréductible de dimension infinie de G est isomorphe (à un espace près de dimension au plus 1) à une tordue d'une $\Pi(r,\lambda)$ pour un choix convenable de r et λ.

Théorème 4.14. — *Si $0 \leqslant r \leqslant p-1$, et si $\lambda \in k_L$, alors*

$$D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda)) \cong \begin{cases} k_L[[T]] \oplus k_L[[T]] & si\ \lambda = 0, \\ k_L[[T]] \oplus k_L[[T]]/(T) & si\ \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Le module $D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda))$ étant un $k_L[[T]]$-module compact, l'énoncé ci-dessus est équivalent à

$$\dim_{k_L} D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda))/T = 2 \quad \text{et} \quad \dim_{k_L} \ker T^p_{|_{D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda))}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0, \\ 1 & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Comme $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$, cet énoncé est aussi équivalent, par dualité, à

$$\dim_{k_L} I^+(W_r, \Pi(r,\lambda))^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} = 2 \quad \text{et} \quad \dim_{k_L} I^+(W_r,\Pi(r,\lambda))/(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1)^p = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0, \\ 1 & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Le calcul de la dimension du premier (resp. second) de ces espaces fait l'objet du cor. 4.22 (resp. 4.24). L'ingrédient principal est l'étude des invariants et des coinvariants de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur les deux premiers termes de cette suite exacte

$$0 \to Y_{r,\lambda} \to I^+(W_r) \to I^+(W_r, \Pi(r,\lambda)) \to 0,$$

où si $\lambda \in k_L$, on a noté $Y_{r,\lambda} = I^+(W_r) \cap (T_p - \lambda) \cdot I(W_r)$ le noyau de l'application naturelle de $I^+(W_r)$ dans $\Pi(r,\lambda)$.

Remarque 4.15. — (i) La démonstration qui suit traite sur le même pied les séries principales et les supersingulières. Dans le cas des séries principales, il y a une démonstration nettement plus directe. En reprenant les notations de la prop. 3.7, et en posant $W = W(\delta_1,\delta_2)$ et $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$, il est assez facile de voir que $I^+(W,\Pi)$ est le sous-espace $k_L\phi_\infty \oplus \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, k_L)$ de Π. L'action de $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur ϕ_∞ est triviale et est donnée par $(\phi \star u)(x) = \phi(x+1)$ sur $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, k_L)$. Le dual $D^\natural_W(\Pi)$ de $I^+(W,\Pi)$ est donc $k_L\mathrm{Dir}_\infty \oplus \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$, où Dir_∞ est la masse de Dirac à l'infini et est fixe par u, alors que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ est l'ensemble des mesures sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans k_L, l'action de u étant la convolution avec la masse de Dirac Dir_1 en 1. Maintenant, la transformée d'Amice $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\,\mu$ induit un isomorphisme de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ sur $k_L[[T]]$, la convolution avec Dir_1 devenant la multiplication par $1+T$. On en déduit que $D^\natural_W(\Pi)$ est isomorphe à $k_L[[T]]/(T) \oplus k_L[[T]]$.

(ii) Les calculs ne sont pas sans rappeler ceux de Breuil **[6]** menant à l'irréductibilité de $\Pi(r,0,\chi)$.

Lemme 4.16. — *Si* $0 \leqslant r \leqslant p-1$*, alors* $W_r^{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$ *est le* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* 1*, et* $W_r/(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)$ *est un* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par l'image de* X^r*.*

Démonstration. — On a $(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot X^k=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j$, et comme $\binom{k}{j}$ n'est pas nul modulo p si $k\leqslant r\leqslant p-1$, cela permet de conclure.

Lemme 4.17. — *Si* $n \geqslant 1$*, alors* $I^{(n)}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$ *est le* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* $f_n=\sum_{i=0}^{p^n-1}[\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),1]$*, et* $I^{(n)}(W_r)/(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)$ *est un* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par l'image de* $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),X^r]$*.*

Démonstration. — Comme $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}p^n & i+1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, cela implique que $\phi=\sum_{i=0}^{p^n-1}[\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),P_i]$ est fixe par $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ si et seulement si $P_{i+1}=P_i$ si $0\leqslant i\leqslant p^{n-2}$, et si $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),P_0]=[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),P_0]$. En faisant agir $\left(\begin{smallmatrix}p^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur cette dernière égalité, on voit qu'elle est équivalente à $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot P_0=P_0$ dans W_r. D'après le lemme 4.16, cela implique que P_0 est constant. On en déduit que $I^{(n)}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$ est le k_L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par f_n, et, $I^{(n)}(W_r)$ étant de dimension finie, que $I^{(n)}(W_r)/(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)$ est un k_L-espace vectoriel de dimension 1. Pour conclure, il suffit donc de pouver que $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),x^r]$ n'est pas dans l'image de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1$. Or

$$(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot\Big(\sum_{i=0}^{p^n-1}[\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),P_i]\Big)=[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),X^r]$$

équivaut à $P_{i+1}=P_i$ si $0\leqslant i\leqslant p^{n-2}$, et $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),P_0]-[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),P_0]=[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),X^r]$. Cette dernière relation est équivalente à $(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot P_0=X^r$ dans W_r, et ceci n'est pas possible, d'après le lemme 4.16. Ceci permet de conclure.

Lemme 4.18. — *Si* $0\leqslant r\leqslant p-1$*, et si* $\lambda\in k_L$*, alors*

$$Y_{r,\lambda}^{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}=\begin{cases}\oplus_{n=0}^{+\infty}k_L\cdot(f_{n+1}-\lambda f_n) & si\ r\neq 0,\\ \oplus_{n=1}^{+\infty}k_L\cdot(f_{n+1}-\lambda f_n+f_{n-1}) & si\ r=0.\end{cases}$$

Démonstration. — • Si $r\neq 0$, on a $(T_p-\lambda)\cdot f_n=f_{n+1}-\lambda f_n$, et on est donc ramené à prouver que $f_0\notin(T_p-\lambda)\cdot I(W_r)$, ce qui est clair car un élément de $(T_p-\lambda)\cdot I(W_r)$ a au moins deux composantes non nulles.

• Si $r=0$, alors $(T_p-\lambda)\cdot f_n=f_{n+1}-\lambda f_n+f_{n-1}$, si $n\geqslant 1$. On est donc ramené à prouver que $(k_L\cdot f_0\oplus k_L\cdot f_1)\cap((T_p-\lambda)\cdot I(W_r))=0$. Or,

$$af_0+bf_1=-b[(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right),1]+(a+\lambda b)[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),1]+(T_p-\lambda)\cdot f_0,$$

et comme un élément de $(T_p-\lambda)\cdot I(W_r)$ a au moins deux composantes non nulles à distance $\geqslant 2$, l'appartenance de af_0+bf_1 à $(T_p-\lambda)\cdot I(W_r)$ implique $b=a+\lambda b=0$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 4.19. — *Si $0 \leqslant r \leqslant p-1$, et si $\lambda \in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L}\Big((I^+(W_r))^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}/Y_{r,\lambda}^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}\Big) = \begin{cases}1 & si\ r\neq 0,\\ 2 & si\ r=0.\end{cases}$$

Lemme 4.20. — *(i) Si $\phi \in I^{(n)}(W_r)$, alors $\pi_{n+1}(T_p(\phi)) \in (\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)^{p^n}\cdot I^{(n+1)}(W_r)$.*

(ii) Si $n \geqslant 1$, si $\phi \in I^{(n)}(W_r)$, et si $\pi_{n-1}(T_p(\phi)) \in (\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot I^{(n-1)}(W_r)$, alors $\phi \in (\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot I^{(n)}(W_r)$.

Démonstration. — Pour démontrer le (i), il suffit, par linéarité, il suffit de traiter le cas de $\phi = [\left(\begin{smallmatrix}p^n&j\\0&1\end{smallmatrix}\right), P]$, et on a alors

$$\pi_{n+1}(T_p(\phi)) = \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[\left(\begin{smallmatrix}p^n&j\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),1] = \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&j+p^ni\\0&1\end{smallmatrix}\right),1].$$

Il y a alors deux cas.

- Si $r\neq 0$, alors $1 = (\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot X$, et donc

$$\begin{aligned}[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&j+p^ni\\0&1\end{smallmatrix}\right),1] &= [\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&j+p^ni\\0&1\end{smallmatrix}\right),(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot X]\\ &= (\left(\begin{smallmatrix}1&p^{n+1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&j+p^ni\\0&1\end{smallmatrix}\right),X] \in (\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)^{p^{n+1}}\cdot I^{(n+1)}(W_r).\end{aligned}$$

- Si $r=0$, alors P est constant et

$$\sum_{i=0}^{p-1}[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&j+p^ni\\0&1\end{smallmatrix}\right),1] = -(\left(\begin{smallmatrix}1&p^n\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot\Big(\sum_{i=0}^{p-1} i[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&j+p^ni\\0&1\end{smallmatrix}\right),1]\Big) \in (\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)^{p^n}\cdot I^{(n+1)}(W_r).$$

Ceci termine la démonstration du (i). Passons à celle du (ii). L'action de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ commute à celles de T_p et π_{n-1}. L'énoncé à démontrer est donc équivalent à l'injectivité de

$$\pi_{n-1}\circ T_p : I^{(n)}(W_r)/(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1) \to I^{(n-1)}(W_r)/(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1),$$

et comme les deux espaces sont de dimension 1 sur k_L (cf. lemme 4.17), cette énoncé est aussi équivalent à la surjectivité de $\pi_{n-1}\circ T_p$. Or on a

$$\pi_{n-1}(T_p[\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r]) = [\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),X^r] = [\left(\begin{smallmatrix}p^{n-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r],$$

ce qui permet, grâce au lemme 4.17, de conclure.

Lemme 4.21. — *Si $0\leqslant r\leqslant p-1$, et si $\lambda\in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L}\Big((Y_{r,\lambda}\cap(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot I^+(W_r))/(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot Y_{r,\lambda})\Big) = \begin{cases}1 & si\ r\neq 0,\\ 0 & si\ r=0,\end{cases}$$

et dans tous les cas, l'espace ci-dessus est engendré par $(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)\cdot(T_p-\lambda)\cdot([\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r])$.

Démonstration. — Comme on l'a vu plus haut, un élément F de $Y_{r,\lambda}$ s'écrit de manière unique sous la forme $F=(T_p-\lambda)\cdot\phi$, avec $\phi\in I^+(W_r)$ avec $\pi_0(\phi)=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P]$ et $P(\infty)=0$. Si $\ell\in\mathbf{N}$, soit $\phi_\ell=\pi_\ell(\phi)$. Il existe alors $n\in\mathbf{N}$ tel que $\phi=\sum_{\ell=0}^n\phi_\ell$. Supposons dorénavant que

$F \in Y_{r,\lambda} \cap ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^+(W_r)$, ce qui implique $\pi_\ell((T_p - \lambda) \cdot \phi) \in ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^{(\ell)}(W_r))$ quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$. Il y a deux cas.

• Si $\lambda \neq 0$, on peut écrire ϕ_n sous la forme

$$\phi_n = -\lambda^{-1}\Big(\pi_n((T_p - \lambda) \cdot \phi) - \pi_n(T_p \cdot \phi)\Big),$$

et le (i) du lemme 4.20 permet d'en déduire l'appartenance de ϕ_n à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^{(n)}(W_r))$, et, grâce à une récurrence descendante immédiate, celle de ϕ à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^+(W_r))$.

• Si $\lambda = 0$, on a $\pi_\ell(T_p \cdot \phi) \in ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^{(\ell)}(W_r))$ quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$. On en déduit, grâce au (i) du lemme 4.20, l'appartenance de

$$\pi_{n-1}(T_p \cdot \phi_n) = \pi_{n-1}(T_p \cdot \phi) - \pi_{n-1}(T_p \cdot \phi_{n-2})$$

à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^{(n-1)}(W_r))$, et donc, grâce au (ii) du lemme 4.20, celles de ϕ_n à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^{(n)}(W_r))$ et de ϕ à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^+(W_r))$.

En conclusion, on a dans tous les cas

$$Y_{r,\lambda} \cap ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot I^+(W_r) = ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot (T_p - \lambda) \cdot I^+(W_r).$$

Comme $(T_p - \lambda) \cdot [1, X^r]$ est un supplémentaire de Y_λ dans $(T_p - \lambda) \cdot I^+(W_r)$, l'espace qui nous intéresse est donc engendré par

$$((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot (T_p - \lambda) \cdot [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), X^r] = (T_p - \lambda) \cdot ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), X^r],$$

et sa dimension est donc 0 ou 1 suivant que $(T_p - \lambda) \cdot ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), X^r]$ appartient ou pas à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot Y_\lambda$.

• Si $r = 0$, on a $(T_p - \lambda) \cdot ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), X^r] = 0$, et cette dimension est nulle.

• Si $r \neq 0$, l'appartenance de $(T_p - \lambda) \cdot ((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), X^r]$ à $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot Y_\lambda$ est équivalente, car $T_p - \lambda$ est injectif, à l'existence de $\phi \in I^+(W)$ tel que $\pi_0(\phi) = [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), P]$, avec $P(\infty) = 0$, et tel que $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot (\phi - [(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), X^r]) = 0$. Ceci est impossible car, en appliquant π_0 à cette relation, on tombe sur la relation $((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1) \cdot (P - X^r) = 0$ dans W_r, et celle-ci implique $P - X^r$ constant, en contradiction avec l'hypothèse $P(\infty) = 0$.

Ceci permet de conclure.

Corollaire 4.22. — *Si $0 \leqslant r \leqslant p-1$ et si $\lambda \in k_L$, alors $\dim_{k_L} I^+(W_r, \Pi(r, \lambda))^{(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})=1} = 2$ engendré par $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \cdot 1$ et $\lambda(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \cdot X^r - \sum_{i=0}^{p-1} (-i)^r (\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \cdot 1 = (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}) \cdot X^r$.*

Démonstration. — La suite exacte

$$0 \to Y_{r,\lambda} \to I^+(W_r) \to I^+(W_r, \Pi(r, \lambda)) \to 0$$

induit, en prenant les invariants et les coinvariants sous l'action de $(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$, la suite exacte

$$0 \to \frac{(I^+(W_r))^{(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})=1}}{Y_{r,\lambda}^{(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})=1}} \to I^+(W_r, \Pi(r, \lambda))^{(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})=1} \to \ker\Big(\frac{Y_{r,\lambda}}{(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1} \to \frac{I^+(W_r)}{(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1}\Big) \to 0.$$

On conclut en utilisant le cor. 4.19 et le lemme 4.21 et l'isomorphisme

$$\ker\Big(\frac{Y_{r,\lambda}}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1}\to\frac{I^+(W_r)}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1}\Big)\cong(Y_{r,\lambda}\cap((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)\cdot I^+(W_r))/((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)\cdot Y_{r,\lambda}).$$

Lemme 4.23. — *Si $0\leqslant r\leqslant p-1$ et $\lambda\in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L}\big(I^+(W_r)/(Y_{r,\lambda}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cdot I^+(W_r))\big)=\begin{cases}1 & si\ \lambda\neq 0,\\ 0 & si\ \lambda=0.\end{cases}$$

Démonstration. — Commençons par traiter le cas $\lambda=0$. Soit $\phi=[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),X^j]$, avec $0\leqslant j\leqslant r$, $n\in\mathbf{N}$ et $0\leqslant i\leqslant p^n-1$. Si $j\leqslant r-1$, il existe Q de degré $j+1\leqslant r$ tel que $Q(X+1)-Q(X)=X^j$. On a alors

$$\big((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1\big)^{p^n}\cdot[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),Q]=\big((\begin{smallmatrix}1&p^n\\0&1\end{smallmatrix})-1\big)\cdot[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),Q]=[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),\big((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1\big)Q]=[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),X^j],$$

ce qui prouve que $[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),X^j]\in Y_{r,0}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)\cdot I^+(W_r))$. Par ailleurs,

$$[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),X^r]=T_p\cdot[(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&pi\\0&1\end{smallmatrix}),X^r]-\pi_{n+2}\big(T_p\cdot[(\begin{smallmatrix}p^{n+1}&pi\\0&1\end{smallmatrix}),X^r]\big),$$

et le lemme 4.20 permet de montrer que $[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),X^r]\in Y_{r,0}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)\cdot I^+(W_r))$. Ceci permet de conclure dans le cas $\lambda=0$.

Supposons maintenant $\lambda\neq 0$. Considérons la forme linéaire sur $I^+(W_r)$ envoyant $[(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}),P]$ sur $\lambda^{-n}P(\infty)$. Un calcul immédiat montre que cette forme linéaire est identiquement nulle sur $Y_{r,\lambda}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)\cdot I^+(W_r)$, et donc $\dim_{k_L}(I^+(W_r)/(Y_{r,\lambda}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cdot I^+(W_r))\geqslant 1$. Par ailleurs, si $\phi\in I^{(n)}(W_r)$ et si $n\geqslant 1$, alors, d'après le (i) du lemme 4.20,

$$\pi_{n+1}(T_p\cdot\phi)=(T_p-\lambda)\cdot\phi-\pi_{n-1}(T_p\cdot\phi)+\lambda\phi\in((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cdot I^{(n+1)}(W_r).$$

On en déduit que, modulo $Y_{r,\lambda}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cdot I^+(W_r)$, on a $\phi=\lambda^{-1}\pi_{n-1}(T_p\cdot\phi)$, ce qui prouve que $I^+(W_r)/(Y_{r,\lambda}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cdot I^+(W_r))$ est un quotient de $k_L\cdot[(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}),X^r]$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 4.24. — *Si $0\leqslant r\leqslant p-1$ et $\lambda\in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L}\big(I^+(W_r,\Pi(r,\lambda))/((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\big)=\begin{cases}1 & si\ \lambda\neq 0,\\ 0 & si\ \lambda=0.\end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le lemme précédent et l'isomorphisme

$$I^+(W_r,\Pi(r,\lambda))/((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cong I^+(W_r)/(Y_{r,\lambda}+((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})-1)^p\cdot I^+(W_r)).$$

4.4. Premières propriétés du foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$

Soient $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ et $W\in\mathscr{W}^{(1)}(\Pi)$. L'application $x\mapsto 1\otimes x$ de $D^\natural_W(\Pi)$ dans $\mathbf{D}(\Pi)$ n'est pas, en général, injective (son noyau est le sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de torsion de $D^\natural_W(\Pi)$), mais on a le résultat suivant.

Lemme 4.25. — *Le noyau de l'application $x\mapsto 1\otimes x$ de $D^\natural_W(\Pi)$ dans $\mathbf{D}(\Pi)$ est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie.*

Démonstration. — Il suit du lemme 4.2 que, si $W \subset W'$, alors $\ker\big(D_W^{\natural}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)\big)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ si et seulement si $\ker\big(D_{W'}^{\natural}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)\big)$ l'est. On en déduit la stabilité de la propriété « $\ker\big(D_W^{\natural}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)\big)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ » par extensions ; le th. 4.14 permet alors de conclure puisqu'il montre que le T-module de torsion de $D_W^{\natural}(\Pi)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, si Π est irréductible.

D'après la prop. 4.6, le $\mathscr{O}_L[B]$-module $\psi^{-\infty}(D_W^{\natural}(\Pi))$ est isomorphe à $\Pi^\vee$. Par ailleurs, on dispose d'une application $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$-équivariante de $D_W^{\natural}(\Pi)$ dans $\mathbf{D}(\Pi)$, à savoir l'application $x \mapsto 1\otimes x$. Ceci nous fournit une application B-équivariante de $\Pi^\vee$ dans $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))$.

On note $J^\vee(\Pi)$ le $\mathscr{O}_L[A]$-module $(\Pi^\vee)^{U^+}$; c'est le dual du module de Jacquet $J(\Pi)$ introduit au § 2.8.

Proposition 4.26. — *(i) Le noyau de* $\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))$ *est* $J^\vee(\Pi)$.

(ii) Si Π *ne contient pas de sous-*$\mathscr{O}_L$*-module de longueur finie stable par* G*, l'image de* $\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))$ *est* $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^{\natural})$ *et l'image de* $D_W^{\natural}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)$ *est* $\mathbf{D}(\Pi)^{\natural}$.

Démonstration. — On a $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))^{\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} = 0$ car $\mathbf{D}(\Pi)$ est sans T-torsion ; on en déduit l'inclusion $J^\vee(\Pi) \subset \ker\big(\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))\big)$.

Par ailleurs, le noyau de $D_W^{\natural}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ d'après le lemme 4.25. Cela implique que

$$\ker\big(\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))\big) = \ker\big(\psi^{-\infty}(D_W^{\natural}(\Pi)) \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)\big) = \psi^{-\infty}\big(\ker\big(D_W^{\natural}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)\big)\big)$$

est, lui-aussi, de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$. Comme il est stable par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, le lemme 2.2 montre que $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement, ce qui démontre le (i).

Passons à la démonstration du (ii). D'après la prop. 4.6, l'image de $\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))$ contient $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^{\natural})$ qui est d'indice fini dans $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)) = \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^{\sharp})$. Soit $M \subset \Pi^\vee$ l'image inverse de $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^{\natural})$; c'est un sous-module d'indice fini de $\Pi^\vee$ stable par B. Le dual $M^\vee$ de M est donc un sous-$\mathscr{O}_L$-module de longueur finie de Π stable par B, et est fixe par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ d'après le lemme 2.2. Par ailleurs, comme $M^\vee$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $M^\vee$ soit fixe par $1+p^n\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$. Comme le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $1+p^n\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ contient $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on en déduit le fait que $M^\vee$ est stable par G, ce qui implique que $M^\vee = 0$ et donc que $M = \Pi^\vee$ et que l'image de $\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))$ est $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^{\natural})$. Finalement, ψ induisant une surjection de $D_W^{\natural}(\Pi)$ sur $D_W^{\natural}(\Pi)$ (lemme 4.5), son image M_0 est un treillis de $\mathbf{D}(\Pi)$ sur lequel ψ est surjectif, et donc contient $\mathbf{D}(\Pi)^{\natural}$ et est contenue dans $\mathbf{D}(\Pi)^{\sharp}$. Comme $\psi^{-\infty}(D_W^{\natural}(\Pi))$ s'envoie dans $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^{\natural})$, d'après ce qui précède, on en déduit l'égalité $M_0 = \mathbf{D}(\Pi)^{\natural}$, ce qui permet de conclure.

Proposition 4.27. — (i) *Si* $\Pi = \delta\circ\det$*, avec* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$*, alors* $J^\vee(\Pi) = \Pi$.

(ii) *Si* $\delta_1,\delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$*, alors* $J^\vee(B(\delta_1,\delta_2)) = k_L\mathrm{Dir}_\infty$*, et, en tant que* $k_L[A]$*-module, on a* $J^\vee(B(\delta_1,\delta_2)) = \delta_2^{-1}\otimes\delta_1^{-1}\omega$.

(iii) *Si* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$*, alors* $J^\vee(\mathrm{St}\otimes\delta) = 0$.

(iv) *Si* Π *est supersingulière, alors* $J^\vee(\Pi) = 0$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Le (ii) et le (iii) suivent de ce qu'une mesure invariante sur $\mathbf{Q}_p$ est identiquement nulle. Le (iv) est une traduction de l'injectivité de $\Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi))$ qui suit de ce que $D_W^\natural(\Pi)$ est sans T-torsion, si on choisit W comme dans le th. 4.14.

Remarque 4.28. — Ce résultat était connu d'Emerton ; c'est lui qui avait permis de vérifier la nullité de certains groupes d'extensions au moment de la conférence de Montréal [**13**].

On note $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ l'orthogonal de $J^\vee(\Pi)$ dans Π, et on note $J(\Pi)$ le quotient de Π par $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$. D'après le lemme 4.25 et le (i) de la prop. 4.26, le $k_L[B]$-module $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est d'indice fini dans Π.

Remarque 4.29. — (i) Comme $J^\vee(\Pi) = (\Pi^\vee)^U$, on peut aussi définir $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ comme le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π engendré par les $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right)\cdot v$, pour $v \in \Pi$ et $b \in \mathbf{Q}_p$. Cette description montre que, si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est exacte, alors $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ contient $\Pi_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et se surjecte sur $\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(ii) Le module $(\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee = \Pi^\vee / J^\vee(\Pi)$ s'identifie à $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^\natural)$ d'après la prop. 4.26.

4.5. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, on note $\mathbf{V}(\Pi)$ la $\mathscr{O}_L$-représentation $\mathbf{V}(\mathbf{D}(\Pi))^\vee(1)$ de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Théorème 4.30. — *Le foncteur $\Pi \to \mathbf{V}(\Pi)$ est un foncteur covariant exact de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Démonstration. — C'est, modulo l'équivalence de catégories entre (φ,Γ)-modules et représentations galoisiennes, une simple traduction du théorème 4.13.

Proposition 4.31. — *(i) Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, alors la suite*

$$0 \to J^\vee(\Pi) \to \Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi))^*$$

de $k_L[B]$-modules est exacte, et si de plus Π n'a pas de sous-objet fini, alors la suite

$$0 \to J^\vee(\Pi) \to \Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi))^* \to 0$$

est exacte.

(ii) Si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ *est une suite exacte d'éléments de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ *sans sous-objets finis, on dispose du diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & J^\vee(\Pi_2) \arrow[r] \arrow[d] & J^\vee(\Pi) \arrow[r] \arrow[d] & J^\vee(\Pi_1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & \Pi_2^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \Pi^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \Pi_1^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi_2)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi_1)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & 0 \\
{} \arrow[r, "\partial"] & H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_2))^\vee \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi))^\vee \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_1))^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

de $k_L[B]$*-modules, dans lequel les colonnes sont exactes, les deuxième et troisième lignes sont exactes, et la suite à* 6 *termes utilisant l'application de connexion* ∂ *est aussi exacte.*

Démonstration. — Le (i) est la conjonction des prop. 1.5 et 4.26. Le (ii) suit du (i), de l'exactitude du foncteur $D \mapsto \psi^{-\infty}(D)$ et du lemme du serpent.

Corollaire 4.32. — *Si* $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ *est une suite exacte d'objets de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ *sans sous-objets finis, et si* $\partial : J^\vee(\Pi_1) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_2))^\vee$ *est identiquement nulle* (en particulier, si $J^\vee(\Pi_1) = 0$)*, alors les suites*

$$0 \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_1)) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_2)) \to 0$$
$$0 \to \psi^{-\infty}\big(D^\natural(\mathbf{V}(\Pi_2)^\vee(1))\big) \to \psi^{-\infty}\big(D^\natural(\mathbf{V}(\Pi)^\vee(1))\big) \to \psi^{-\infty}\big(D^\natural(\mathbf{V}(\Pi_1)^\vee(1))\big) \to 0$$

sont exactes.

Démonstration. — C'est une conséquence du (ii) de la prop. 4.31 et de ce que $\psi^{-\infty}(D^\natural)$ est le noyau de $\psi^{-\infty}(D) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(D)^\vee(1))^\vee$, si D est un (φ, Γ)-module.

Remarque 4.33. — Si la suite $0 \to \mathbf{V}(\Pi_1) \to \mathbf{V}(\Pi) \to \mathbf{V}(\Pi_2) \to 0$ est scindée, il en est de même de la suite

$$0 \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_2))^\vee \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi))^\vee \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi_1))^\vee \to 0.$$

Comme $\psi^{-\infty}(D^\natural) = \ker\big(\psi^{-\infty}(D) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, V^\vee(D)(1))^\vee\big)$ si D est un (φ,Γ)-module, on déduit de la prop. 4.31 l'exactitude des lignes et colonnes du diagramme commutatif de $\mathscr{O}_L[B]$-représentations suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & J^\vee(\Pi_2) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_2^\vee \arrow[r] \arrow[d] & (\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^\vee(\Pi) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi^\vee \arrow[r] \arrow[d] & (\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^\vee(\Pi_1) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_1^\vee \arrow[r] \arrow[d] & (\Pi_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la colonne de droite est scindée sur B.

4.6. Le module $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$

Proposition 4.34. — *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, alors l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L$-modules de $\Pi^\vee$ de longueur finie, stables par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ admet un plus grand élément $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$. De plus, on a la suite exacte*

$$0 \to J^\vee(\Pi) \to \widetilde{J}^\vee(\Pi) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1)) \to 0$$

de $k_L[A]$-modules.

Démonstration. — Soit M un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $\Pi^\vee$ de longueur finie, stable par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On déduit de la suite exacte $0 \to J^\vee(\Pi) \to \Pi^\vee \to \psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^\natural) \to 0$ et du fait qu'un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de $\mathbf{D}(V)$, stable par Γ, est inclus dans $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, V)$ le fait que l'image de M dans $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}(\Pi)^\natural)$ est incluse dans $\psi^{-\infty}(H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1)))$. Comme $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1))$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il en est de même de $\psi^{-\infty}(H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1)))$, ce qui nous fournit la suite exacte

$$0 \to J^\vee(\Pi) \to \widetilde{J}^\vee(\Pi) \to \psi^{-\infty}(H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1))) \to 0,$$

et permet de conclure.

Proposition 4.35. — (i) *Si $\Pi = \delta \circ \det$, avec $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = \Pi$.*

(ii) *Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ et $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, alors $\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1,\delta_2)) = k_L\mathrm{Dir}_0 \oplus k_L\mathrm{Dir}_\infty$, et, en tant que $k_L[\Delta]$-module, on a $\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1,\delta_2)) = \mathrm{Ind}_A^D(\delta_1^{-1}\omega \otimes \delta_2^{-1})$.*

(iii) *Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\widetilde{J}^\vee(\mathrm{St}\otimes\delta) = k_L(\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty)$, et w agit par multiplication par -1 et $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \in A$ par $\delta^{-1}(ad)$.*

(iv) *Si Π est supersingulière, alors $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = 0$.*

Démonstration. — La suite exacte de la proposition 4.34 permet de relier $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ et $J^\vee(\Pi)$. La proposition suit donc de ce que $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}, \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1))$ est nul si Π est de dimension finie ou supersingulière, ou de dimension 1 si Π est de la forme $B(\delta_1,\delta_2)$ ou $\mathrm{St}\otimes\delta$.

Remarque 4.36. — (i) Le module $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ est stable par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, et il contient $(\Pi^\vee)^U = J^\vee(\Pi)$; il contient donc $J^\vee(\Pi) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot J^\vee(\Pi)$.

(ii) Un élément de $J^\vee(\Pi)\cap\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot J^\vee(\Pi)$ est fixe par le sous-groupe de G engendré par $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_p & 1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire par $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si Π n'a pas de quotient de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, cela implique que $J^\vee(\Pi)\cap\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot J^\vee(\Pi) = 0$.

(iii) Les points (i) et (ii) montrent que, si Π n'a pas de quotient de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, alors $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ contient $J^\vee(\Pi)\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot J^\vee(\Pi)$ comme sous-A-module. L'exemple de la steinberg montre que cette inclusion n'est pas toujours une égalité.

Un objet Π de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ est *équilibré* si $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = J^\vee(\Pi)\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot J^\vee(\Pi)$.

On note $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ l'orthogonal de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ dans Π, et on note $\widetilde{J}(\Pi)$ le quotient de Π par $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$. D'après la prop. 4.34, le $k_L[\Delta]$-module $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ est d'indice fini dans Π.

Remarque 4.37. — (i) On peut aussi définir $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ comme le plus petit sous-$\mathscr{O}_L$-module d'indice fini de Π stable par $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. On en déduit que, si $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ est exacte, alors $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ contient $\Pi_1\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ et se surjecte sur $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$.

(ii) Le fait, pour Π, d'être équilibré se traduit par l'exactitude de la suite

$$0\to\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*\to(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)\oplus w\cdot(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)\to\Pi\to 0,$$

l'application $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*\to(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)\oplus w\cdot(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ étant $v\mapsto(v,-w\cdot v)$.

Proposition 4.38. — (i) *Si* $\Pi=\delta\circ\det$, *avec* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*=0$.

(ii) *Si* $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, *alors* $B(\delta_1,\delta_2)\boxtimes\mathbf{Q}_p^*=\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

(iii) *Si* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $(\mathrm{St}\otimes\delta)\boxtimes\mathbf{Q}_p^*=\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

(iv) *Si* Π *est supersingulière, alors* $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*=\Pi$

Démonstration. — C'est immédiat à partir de la prop. 4.35 en prenant les orthogonaux.

Proposition 4.39. — *Si* $v\in\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$, *alors il existe* $n(v)\in\mathbf{N}$ *tel que* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot v\in\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, *si* $v_p(b)\leqslant -n(v)$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier l'énoncé pour v de la forme $\big(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1\end{pmatrix}-1\big)\cdot x$ car ces éléments engendrent $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Maintenant, si $\mu\in\Pi^\vee$ et $x\in\Pi$, on a

$$\langle\mu,\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x\rangle = \langle\mu,\begin{pmatrix} \frac{b+a}{a} & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{b+a} & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x\rangle = \langle\begin{pmatrix} \frac{a}{b+a} & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\mu,\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{b+a} & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x\rangle$$

Par ailleurs, il existe n_1 tel que $\begin{pmatrix} 1+p^{n_1}\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ laisse fixe $\mathbf{Z}_p$. De même, $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ étant de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ et stable par D, il existe n_1 tel que $\begin{pmatrix} 1+p^{n_1}\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ agisse trivialement sur $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$. Si on pose alors $n(v)=v_p(a)-\sup(n_1,n_2)$, on a $v_p(\frac{a}{b+a}-1)\geqslant\sup(n_1,n_2)$, si $v_p(b)\leqslant -n(v)$. On déduit de la formule ci-dessus que $\langle\mu, \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\rangle = 0$, si $\mu\in\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ et $v_p(b)\leqslant -n(v)$, ce qui, compte-tenu de la définition de $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ comme orthogonal de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$, permet de conclure.

5. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Ce § est consacré à la question suivante : combien perd-on d'information en passant de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à son sous-groupe de Borel ? Les résultats obtenus sont abondamment utilisés dans la suite de l'article. Des résultats plus généraux ont été obtenus par Paskunas [**20**].

On note $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}B$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de B localement constantes, admissibles et admettant un caractère central. La restriction à B nous fournit une application naturelle de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ dans $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}B$.

Si $H\in\{B,G\}$, et si Π_1,Π_2 sont deux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}H$, on note $\mathrm{Ext}^1_H(\Pi_2,\Pi_1)$ le groupe des extensions de Π_2 par Π_1 dans $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}H$. Si Π_1,Π_2 sont deux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, la restriction à B nous fournit une application naturelle de $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)$ dans $\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$.

Théorème 5.1. — *Si* Π_1 *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$*, tel que* $\Pi_1^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}=0$*, alors quel que soit* $\Pi_2\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$*, l'application naturelle de* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ *est injective.*

Remarque 5.2. — On montrera en fait un résultat plus précis : si l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ n'est pas injective, alors il existe $\chi\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ tel que $\chi\circ\det$ soit un sous-objet de Π_1 et $\mathrm{St}\otimes(\chi\circ\det)$ soit un sous-quotient de Π_2. Cet énoncé est essentiellement optimal car la suite exacte $0\to\mathbf{1}\to\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p),k_L)\to\mathrm{St}\to 0$ est scindée comme suite de B-représentations puisque $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$ est un supplémentaire des constantes dans $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p),k_L)$ qui est stable par B, mais cette suite n'est pas scindée en tant que suite de G-représentations (cf. [**2**]).

Démonstration. — Nous allons nous placer dans un cadre un peu plus général que nécessaire (avec les notations ci-dessous, traiter le cas de $M=N=\Pi_2$ suffirait), mais cette généralité nous sera utile plus tard (prop. 5.12).

Soit $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$. Soient $M\supset N$ des sous-$\mathscr{O}_L$-modules de Π_2 vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) M est stable par B et il existe un scindage B-équivariant $\iota: M\to\Pi$;

(H2) N est stable par le sous-groupe diédral Δ de G ;

Les hypothèses (H1) et (H2) impliquent l'existence de $\lambda: N\to\Pi_1$ tel que l'on ait $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v) = \iota(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot v)$. Si $\widetilde{M}$ est l'image réciproque de M dans Π, on peut écrire tout élément v de $\widetilde{M}$, de manière unique, sous la forme $v=v_1+\iota(v_2)$, avec $v_1\in\Pi_1$ et $v_2\in N$. Pour simplifier un peu les formules, on notera plus simplement (v_1,v_2) l'élément $v_1+\iota(v_2)$ de $\widetilde{M}$. On a alors $w\cdot(v_1,v_2)=(w\cdot v_1+\lambda(v_2), w\cdot v_2)$, si $v_2\in N$, et $b\cdot(v_1,v_2)=(b\cdot v_1, b\cdot v_2)$, si $(v_1,v_2)\in\widetilde{M}$, et si $b\in B$.

Lemme 5.3. — *(i) Si* $v\in N$*, on a*

$$\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(v)+\lambda(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot v)=0 \quad\text{et}\quad \lambda(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\cdot v)=\left(\begin{smallmatrix}d & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(v).$$

(ii) $\mathrm{Ker}\,\lambda$ *et* $\mathrm{Im}\,\lambda$ *sont stables par* Δ.

Démonstration. — Le (i) est une traduction des identité $w^2 = 1$ et $w\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)w$, qui impliquent

$$\begin{aligned}(0, z) = w^2 \cdot (0, z) =& w \cdot (\lambda(z), w \cdot z) = (w \cdot \lambda(z) + \lambda(w \cdot z), z)\\ (\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \lambda(z), \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)w \cdot z) =& \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot (\lambda(z), w \cdot z) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)w \cdot (0, z)\\ =& w\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot (0, z) = w \cdot (0, \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot z) = (\lambda(\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot z), w\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot z)\end{aligned}$$

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i).

On suppose à partir de maintenant qu'en sus de (H1) et (H2), on a :

(H3) quel que soit $v \in N$, il existe $n_1(v) \in \mathbf{N}$, tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \in N$ si $v_p(x) \leqslant -n_1(v)$.

La propriété (H3) alliée avec le fait que l'action de G est localement constante, implique que, si $v \in N$, il existe $n(v)$ tel que

- $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \in N$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w \cdot v \in N$ si $v_p(x) \leqslant -n(v)$,
- $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v = v$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w \cdot \lambda(v) = w \cdot \lambda(v)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w \cdot v = w \cdot v$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w \cdot \lambda(w \cdot v) = w \cdot \lambda(w \cdot v)$,

si $v_p(x) \geqslant n(v)$.

Lemme 5.4. — *Si $v \in N$, et si $v_p(x) \geqslant n(v)$, alors $\lambda(\left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & -x^{-1} \end{smallmatrix}\right) \cdot v) = 0$.*

Démonstration. — Soient $b = \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & -x^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $u' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Un petit calcul montre que $u = w \cdot u' \cdot w \cdot b \cdot w$. Par ailleurs, si $v_p(x) \geqslant n(z)$, alors $bw \cdot z = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & -x^{-1} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w \cdot z$ et $u'wbw \cdot z = wu \cdot z$ sont éléments de N, ce qui permet d'utiliser, dans le calcul ci-dessous, la formule pour l'action de w donnée plus haut.

$$\begin{aligned}(0, u \cdot z) =& wu'wbw \cdot (0, z) = wu'wb \cdot (\lambda(z), w \cdot z) = wu'w \cdot (b \cdot \lambda(z), bw \cdot z)\\ =& wu' \cdot (wb \cdot \lambda(z) + \lambda(bw \cdot z), wbw \cdot z)\\ =& w \cdot (u'wb \cdot \lambda(z) + u' \cdot \lambda(bw \cdot z), u'wbw \cdot z)\\ =& (wu'wb \cdot \lambda(z) + wu' \cdot \lambda(bw \cdot z) + \lambda(u'wbw \cdot z), wu'wbw \cdot z)\\ =& (uw \cdot \lambda(z) + wu' \cdot \lambda(bw \cdot z) + \lambda(wu \cdot z), u \cdot z).\end{aligned}$$

Comme $uw \cdot \lambda(z) = w \cdot \lambda(z)$ et $u \cdot z = z$, si $v_p(x) \leqslant n(z)$, et comme $w \cdot \lambda(z) + \lambda(w \cdot z) = 0$ d'après le (i), on en déduit la nullité de $wu' \cdot \lambda(bw \cdot z)$. Il suffit alors d'appliquer ce qui précède à $z = w \cdot v$ pour en déduire le résultat.

Si $\ell \in \mathbf{N}$, on note $P^{[\ell]}$ l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $v_p(a) \geqslant v_p(b) + \ell$. Si $v \in \Pi_2$, on note $P^{[\ell]} \cdot v$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π_2 engendré par les $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$, pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P^{[\ell]}$.

Corollaire 5.5. — $\ker \lambda$ *contient $P^{[n(v)]} \cdot v$, quel que soit $v \in N$.*

Démonstration. — Si $v \in \mathbf{N}$, alors $\ker \lambda$ contient $\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 0 & -b^{-1} \end{smallmatrix}\right) \cdot v$, si $v_p(b) \geqslant n(v)$. Comme $\ker \lambda$ est stable par b, il contient aussi $\left(\begin{smallmatrix} ab^{-1} & 0 \\ 0 & -b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 0 & -b^{-1} \end{smallmatrix}\right) \cdot v = \left(\begin{smallmatrix} a & ab^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$ quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et $b \in \mathbf{Q}_p^*$ vérifiant $v_p(b) \geqslant n(v)$. Ceci permet de conclure.

On suppose maintenant, qu'en sus de (H1) (H2) et (H3), on a :

(H4) Il existe une famille finie $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de N telle que, quel que soit $\ell\in\mathbf{N}$, on ait l'inclusion $N\subset\big(\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i\big)+w\cdot\big(\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i\big)$.

Lemme 5.6. — *(i)* $\ker\lambda=N$.
(ii) $\iota(N)$ *est stable par* Δ.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du cor. 5.5, de l'hypothèse (H4) et de la stabilité de $\ker\lambda$ par w. Le (ii) suit du (i), qui se traduit par la stabilité de $\iota(N)$ par w, et du fait que $\iota(N)$ est, par construction, stable par A.

Considérons les propriétés suivantes :

(P1) Il existe un ensemble fini $\{v_i,\ i\in I\}$ d'éléments de Π tels que, quel que soit $\ell\in\mathbf{N}$, on ait l'inclusion $\big(\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i\big)+w\cdot\big(\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i\big)=\Pi$.

(P2) Il existe un ensemble fini $\{v_i,\ i\in I\}$ d'éléments de $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ tels que, quel que soit $\ell\in\mathbf{N}$, on ait l'inclusion $\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i\supset\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$.

Remarque 5.7. — (i) La propriété (P1) peut aussi se traduire par : « $M=N=\Pi$ vérifient (H4) ».

(ii) La propriété (P2), alliée à la prop. 4.39, se traduit par : « $M=\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $N=\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ vérifient (H3) et (H4) ».

Lemme 5.8. — *(i) Si* $\Pi_2\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ *vérifie (P1), alors l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ *est injective quel que soit* $\Pi_1\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$.

(ii) Si $\Pi_2\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ *vérifie (P2), alors l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ *est injective quel que soit* $\Pi_1\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ *vérifiant* $\Pi_1^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}=0$.

Démonstration. — Soit Π une extension de Π_2 par Π_1 qui est scindée sur B. Si Π_2 vérifie (P1), alors $M=N=\Pi_2$ vérifient les propriétés (H1), (H2), (H3) et (H4), et le (i) du lemme 5.6 montre que le scindage B-équivariant $\Pi_2\to\Pi$ est en fait G-équivariant. On en déduit le (i).

Maintenant, si Π_2 satisfait (P2), $M=N=\Pi_2$ vérifient (H1), (H2) et (H3), ce qui nous fournit $\lambda:\Pi_2\to\Pi$ tel que $w\cdot(0,z)=(\lambda(z),w\cdot z)$, et prouve (lemme 5.3) que $\mathrm{Im}\,\lambda$ est stable par Δ. Par ailleurs, $M=\Pi_2$ et $N=\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ vérifient (H1), (H2), (H3) et (H4), ce qui prouve (lemme 5.6) que $\mathrm{Ker}\,\lambda$ contient $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$. Comme $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ est d'indice fini dans Π_2, cela implique que que $\mathrm{Im}\,\lambda$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, et comme $\mathrm{Im}\,\lambda$ est stable par Δ (lemme 5.3), cela implique, d'après le lemme 2.3, que $\mathrm{Im}\,\lambda$ est inclus dans $\Pi_1^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$. On en déduit le (ii).

Lemme 5.9. — *Les propriétés (P1) et (P2) sont stables par extensions.*

Démonstration. — C'est clair pour (P1) : si $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to0$ est exacte, il suffit de prendre pour $\{v_i,\ i\in I\}$ la réunion d'une famille $\{v_i,i\in I_1\}$ (resp. $\{v_i,i\in I_2\}$) d'éléments de Π_1 (resp. de Π relevant une famille d'éléments de Π_2) dont la propriété affirme l'existence.

Passons à la stabilité de (P2) par extensions. D'après la remarque 4.37, si $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to0$ est exacte, alors $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ se surjecte sur $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ et contient $\Pi_1\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$. Soit donc $\{v_i,i\in I\}$ réunion d'une famille $\{v_i,i\in I_1\}$ (resp. $\{v_i,i\in I_2\}$) d'éléments de Π_1 (resp. de Π relevant une famille d'éléments de Π_2) dont la propriété affirme l'existence. Si $\ell\in\mathbf{N}$, soit $\Pi^{[\ell]}=\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i$. D'après la prop. 4.39, $\sum_{i\in I}P^{[\ell]}\cdot v_i\subset\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, si ℓ est assez grand. Par ailleurs, $P^{[\ell]}$ se surjecte sur $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ et contient $\Pi_1\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ quel que soit $\ell\in\mathbf{N}$, et comme $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ et $\Pi_1\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ sont d'indice finis dans Π_2 et Π_1 respectivement, cela implique $\Pi^{[\ell]}$ est d'indice fini dans Π. Finalement, comme $P^{[\ell]}$ est stable par multiplication à gauche par un élément de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et comme $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ est le plus petit sous-$\mathscr{O}_L$-module d'indice fini de Π stable par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, on en déduit que $\Pi^{[\ell]}=\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, si ℓ est assez grand. Ceci permet de conclure.

Lemme 5.10. — (i) *Les* $\chi\circ\det$, *pour* $\chi\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *vérifient (P1) et (P2).*

(ii) *Les supersingulières vérifient (P1) et (P2).*

(iii) *Si* $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *vérifient* $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, *alors* $B(\delta_1,\delta_2)$ *vérifie (P1) et (P2).*

(iv) *La steinberg vérifie (P2).*

(v) *Tout élément de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ *vérifie (P2).*

Démonstration. — • Le (i) est immédiat.

• Soit Π une représentation supersingulière. Il existe alors $r\in\{0,\dots,p-1\}$ et $\chi\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ tels que $\Pi\cong\Pi(r,0,\chi)$. Soit alors $W=W_{r,\chi}\oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r}$. Un élément de W peut se représenter comme un couple (P,Q), avec $P\in k_L[X]$ de degré $\leqslant r$ et $Q\in k_L[Y]$ de degré $\leqslant p-1-r$. D'après la proposition 3.11, $W\in\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ et $R(W,\Pi)$ est engendré par

$$\begin{aligned}R_0&=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})]-[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]\\ \text{et } R_1&=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(X^r,0)]-\alpha[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)],\quad \text{avec } \alpha=(-1)^r\chi(p)^{-2}.\end{aligned}$$

Maintenant, si $P\in k_L[Z]$ est de degré $\leqslant s\leqslant p-1$, on peut écrire P, de manière unique, sous la forme $P=\sum_{i=1}^{s+1}\beta_i(P)(Z+i)^s$. On a alors, si $b\in\mathbf{Z}_p^*$ et $\ell\geqslant 1$, la formule

$$\sum_{i=1}^{r+1}\beta_i(P)\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_1=[\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\right),(P,0)]-\alpha\sum_{i=1}^{r+1}\beta_i(P)[\left(\begin{smallmatrix}p^{\ell+1}&b+p^\ell i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)].$$

On en déduit l'appartenance de $\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(P,0)$ à $P^{[\ell+1]}\cdot W$. De même, en échangeant les rôles de X et Y, de r et $p-1-r$, et de R_0 et R_1, on montre que $\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(0,Q)\in P^{[\ell+1]}\cdot W$, et donc que $P^{[\ell]}\cdot W=P^{[\ell+1]}\cdot W$ si $\ell\geqslant 1$.

Maintenant, si $r\leqslant p-2$, on a $r+1\leqslant p-1$ et, comme ci-dessus,

$$\sum_{i=1}^{r+1}\beta_i(P)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_1=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(P,0)]-\alpha\sum_{i=1}^{r+1}\beta_i(P)[\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)],$$

ce qui prouve que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(P,0)\in P^{[1]}\cdot W$.

Si $r=p-1$, un petit calcul montre (en tenant compte du fait que $p-1-r=0$) que

$$\begin{aligned}&\alpha\beta_p(P)\left(\begin{smallmatrix}p&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_0+\sum_{i=1}^{p}\beta_i(P)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_1\\ &\qquad=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(P,0)]-\alpha\sum_{i=1}^{p-1}\beta_i(P)[\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)]-\alpha\beta_p(P)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot[\left(\begin{smallmatrix}p&1\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)],\end{aligned}$$

ce qui prouve, dans ce cas aussi, que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(P,0)\in P^{[1]}\cdot W$.

On en déduit, comme ci-dessus, que l'on a, dans tous les cas, $P^{[0]}\cdot W=P^{[1]}\cdot W$, et donc $P^{[\ell]}\cdot W=P^{[0]}\cdot W$ quel que soit $\ell\geqslant 0$. Comme $P^{[0]}\cdot W=\Pi=\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$, cela démontre le (ii).

• Si $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$, on peut prendre $\phi_1 = \mathbf{1}_{1+p\mathbf{Z_p}} \in \Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, auquel cas $P^{[\ell]}\cdot v$ contient la fonction $\mathbf{1}_{(b+p^n)+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$ quel que soit $b\in\mathbf{Q}_p^*$ et $n\geqslant v_p(b)+\ell$. L'espace $P^{[\ell]}\cdot W$ contient donc $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L) = \Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, ce qui prouve que Π vérifie (P2). De plus, l'image de $\left(\begin{smallmatrix} p^n & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty$ dans le $k_L[\Delta]$-module $\Pi/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est non nulle quel que soit $n\in\mathbf{N}$; comme ce $k_L[\Delta]$-module est irréductible (cf. rem. 3.9), si $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, cela montre que $(P^{[\ell]}\cdot k_L\phi_1 + k_L\phi_\infty) + w\cdot(P^{[\ell]}\cdot k_L\phi_1+k_L\phi_\infty)) = \Pi$, quel que soit $\ell\in\mathbf{N}$, et donc que Π vérifie (P1). Ceci démontre le (iii).

• Si Π est la steinberg, la même démonstration que dans le cas de $B(\delta_1,\delta_2)$ montre que Π vérifie (P2).

• Les points (i)-(iv) montrent que tout objet irréductible de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ vérifient (P2). Le (v) est donc une conséquence de la stabilité de la propriété (P2) par extensions (lemme 5.9).

Ceci permet de conclure.

Remarque 5.11. — (o) Le th. 5.1 est une conséquence de la conjonction du (v) du lemme 5.10 et du (ii) du lemme 5.8.

(i) La stabilité de la propriété (P1) par extensions montre que si Π_2 n'a pas de sous-quotient isomorphe à $\mathrm{St}\otimes(\chi\circ\det)$, alors Π_2 vérifie (P1) ; par suite, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ est injective, quel que soit $\Pi_1\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$.

(ii) La représentation St ne vérifie par (P1) car, quel que soit $v\in\mathrm{St}$, $P^{[\ell]}\cdot v\subset\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, si ℓ est assez grand, et, de plus, $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est stable par w. En particulier, cela ne permet pas de conclure à l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{St},\Pi_1)$ en général (c'est rassurant vu qu'il y a des contrexemples...). Maintenant, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & \mathbf{Q}_p^*\end{smallmatrix}\right)$ sur le k_L-espace vectoriel $\mathrm{St}/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, de dimension 1, est triviale, alors que $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ agit par -1. En utilisant les formules (i) et (ii) du lemme 5.3, on voit que si E est une extension non triviale de St par Π_1 qui devient trivial quand on la restreint à B, alors Π_1 contient la représentation triviale.

(iii) Les points (i) et (ii) ci-dessus entrainent le raffinement du th. 5.1 donné dans la rem. 5.2.

Proposition 5.12. — *Si Π_2 est équilibrée, alors, quel que soit $\Pi_1\in\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p,\Pi_1)$ *est injective.*

Démonstration. — Soit $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ une extension de Π_2 par Π_1 dont l'image dans $\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p,\Pi_1)$ est nulle. On peut donc identifier $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$ à un sous $k_L[B]$-module de Π. De plus, $M=\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $N=\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ satisfont les propriétés (H1) et (H2) de manière évidente, (H3) et (H4) d'après le (v) de la prop. 5.10 (cf. (i) de la rem. 5.7). Il en résulte, d'après le lemme 5.6 que $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, vu comme sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π, est stable par w.

Par ailleurs, comme Π_2 est équilibrée, la suite

$$0\to\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*\to(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)\oplus w\cdot(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)\to\Pi_2\to 0$$

est exacte, ce qui permet d'identifier Π_2 au sous-$\mathscr{O}_L$-module $(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)+w\cdot(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ de Π, qui est stable par Δ par construction, et notre problème est de prouver que ce module est stable par G.

Pour cela, écrivons un élément de Π sous la forme (v_1,v_2), avec $v_1\in\Pi_1$ et $v_2\in\Pi_2$. Le $k_L[B]$-module $\Pi/\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est une extension de $\Pi_2/\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p = J(\Pi_2)$ par Π_1 et donc nous fournit un 1-cocycle $g\mapsto c_g$ sur B à valeurs dans $\mathrm{Hom}(J(\Pi_2),\Pi_1)$. On note $\overline{v}$ l'image de $v\in\Pi_2$ dans

$J(\Pi_2)$. L'action de $b \in B$ sur (v_1, v_2) est alors $b \cdot (v_1, v_2) = (b \cdot v_1 + c_b(\overline{v}_2), b \cdot v_2)$, tandis que celle de w est donnée par $w \cdot (v_1, v_2) = (w \cdot v_1, w \cdot v_2)$.

Il s'agit de vérifier que $g \mapsto c_g$ est identiquement nul. Comme $J(\Pi_2)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, et comme l'action de B est localement constante, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $c_g = 0$, si $g \in \left(\begin{smallmatrix} 1+p^n\mathbf{Z}_p & p^n\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1+p^n\mathbf{Z}_p \end{smallmatrix}\right)$. De plus, le centre agissant par un caractère, on a $c_g = 0$ si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, avec $a \in \mathbf{Q}_p^*$. Finalement, considérons l'action de $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $v_p(x) \ll 0$ de telle sorte que $u' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agisse trivialement sur $J(\Pi_2)$. En utilisant l'identité $u = wu'wbw$, avec $b = \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & -x^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, on obtient, si $v \in M$,

$$\begin{aligned} u \cdot (0, v) = wu'wbw \cdot (0, v) = wu'wb \cdot (0, w \cdot v) &= wu'w \cdot (c_b(\overline{w \cdot v}), bw \cdot v) \\ &= (wu'w \cdot c_b(\overline{w \cdot v}), wu'w \cdot bw \cdot v), \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de ce que $c_{u'} = 0$ par l'hypothèse selon laquelle u' agit trivialement sur $J(\Pi_2)$. Maintenant, si $v \in \Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p$, on a $u \cdot (0, v) = (0, u \cdot v)$, ce qui implique que $c_b(\overline{w \cdot v}) = 0$ quel que soit $v \in \Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et comme $w \cdot (\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ se surjecte sur $J(\Pi_2)$ car Π_2 est supposée équilibrée, cela implique $c_b = 0$. Pour conclure, il suffit de constater que le sous-groupe engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1+p^n\mathbf{Z}_p & p^n\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1+p^n\mathbf{Z}_p \end{smallmatrix}\right)$, les $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, avec $a \in \mathbf{Q}_p^*$, et les $\left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & -x^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, avec $v_p(x) \ll 0$ n'est autre que B, ce qui prouve que $g \mapsto c_g$ est identiquement nul.

6. Classification des atomes automorphes

Ce § est consacré à la classification des k_L-représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ apparaissant comme réduction modulo p des représentations de la série principale unitaire, et au calcul des (φ, Γ)-modules qui leur sont associés. La situation la plus subtile (parmi celles considérées) est celle où la suite de Jordan-Hölder a trois composantes. Comme expliqué dans l'introduction, son étude a grandement bénéficié de l'aide d'Emerton et Kisin. Le cas où la suite de Jordan-Hölder a quatre composantes (ce qui ne peut se produire que si $p = 2$ ou si $p = 3$) a provisoirement été prudemment ignoré.

6.1. Atomes irréductibles

Proposition 6.1. — *Si $0 \leqslant r \leqslant p-1$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\mathbf{V}(\Pi(r, 0, \delta)) = V(r, \delta)$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par δ^{-1}, on peut supposer $\delta = 1$, ce que nous ferons. Posons alors $\Pi = \Pi(r, 0, 1)$ et $W = W_r$. La démonstration consiste à vérifier que $\mathbf{D}(\Pi)$ est irréductible, et donc que $\mathbf{V}(\Pi)$ est de la forme $V(s, \delta')$. La détermination du couple (s, δ') se fait alors en déterminant l'action de Γ sur $D^\natural(V(s, \delta'))/TD^\natural(V(s, \delta')) = D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi)$. Ceci va demander un peu de préparation.

Lemme 6.2. — *(i) L'image de $D_W^+(\Pi)$ dans $D_W^\natural(\Pi)$ est l'ensemble des $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$ vérifiant $\langle \mu, e \rangle = \langle \mu, f \rangle = 0$, où*

$$e = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1] \quad \text{et} \quad f = \sum_{i=0}^{p-1} i^r [\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1].$$

(ii) $D_W^+(\Pi) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot D_W^\natural(\Pi)$.

Démonstration. — Soit $\mu\in D_W^\natural(\Pi)$. Soit $\tilde\mu$ l'élément de $I(W)^\vee$ coïncidant avec μ sur $I^+(W)$, et identiquement nul sur $I^-(W)$. Pour que μ soit dans l'image de $D_W^+(\Pi)$, il faut et il suffit que $\langle\tilde\mu, gT_p\cdot[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P]\rangle=0$ quels que soient $P\in W$ et $g\in G$. Cette nullité est automatique si le support de $gT_p\cdot[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P]$ est inclus dans $I^+(W)$ ou dans $I^-(W)$; les seuls couples (g,P) (à l'action près de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$) donnant une condition d'annulation non automatique, sont ceux de la forme $g=\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $P\in W$ arbitraire, et $g=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $P=X^r$. Le (i) s'en déduit en explicitant T_p. Quant au (ii), c'est une conséquence du (i) et de ce que, d'après le cor. 4.22, e et f forment une base de $I^+(W,\Pi)^{U(\mathbf{Z}_p)}$.

Si $r\neq p-1$, soit $Q_r\in k_L[X]$ le polynôme de degré $r+1$ vérifiant $Q(X-1)-Q(X)=X^r$. Soient

$$e'=\begin{cases}[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X] & \text{si } r\neq 0,\\ \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} i[\left(\begin{smallmatrix}p^2&pi+j\\0&1\end{smallmatrix}\right),1] & \text{si } r=0,\end{cases}\quad\text{et}\quad f'=\begin{cases}\sum_{i=0}^{p-1}Q_r(i)[\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),1] & \text{si } r\neq p-1,\\ -\sum_{i=0}^{p-1}[\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),X] & \text{si } r=p-1,\end{cases}$$

Lemme 6.3. — *Dans tous les cas, on a* $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot e'=e$ *et* $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot f'=f$ *dans* Π.

Démonstration. — Un calcul immédiat montre que $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot e'=e$, si $r\neq 0$, et $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot f'=f$ si $r\neq p-1$. Si $r=0$, alors

$$\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot e'=-\sum_{i=0}^{p-1}[\left(\begin{smallmatrix}p^2&pi\\0&1\end{smallmatrix}\right),1]=e-T_p\cdot[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),1].$$

Si $r=p-1$, alors

$$\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot f'=[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),1]=T_p\cdot[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),1]-e.$$

Lemme 6.4. — *Si* $\mu\in D_W^+(\Pi)$, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\mu\in TD_W^+(\Pi)$,

(ii) $\langle\mu,e'\rangle=\langle\mu,f'\rangle=0$.

Démonstration. — Si $\mu\in D_W^+(\Pi)$, on a

$$\langle\big(\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot\mu,e'\rangle=\langle\mu,\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot e'\rangle=\langle\mu,e\rangle=0,$$
$$\langle\big(\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot\mu,f'\rangle=\langle\mu,\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot f'\rangle=\langle\mu,f\rangle=0.$$

On en déduit l'implication (i)⇒(ii). L'application réciproque s'en déduit en utilisant le fait que $D_W^+(\Pi)$ est un $k_L[[T]]$-module libre de rang 2, où T agit comme $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1$.

Lemme 6.5. — *La représentation* $\mathbf{V}(\Pi)$ *est irréductible.*

Démonstration. — Si $\mu\in D_W^+(\Pi)$, on a par définition $\langle\varphi^2(\mu),v\rangle=\langle\mu,\left(\begin{smallmatrix}p^{-2}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)v\rangle$. Or il est facile de voir que $\left(\begin{smallmatrix}p^{-2}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)e'\in I^-(W)$ et $\left(\begin{smallmatrix}p^{-2}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)f'\in I^-(W)$ dans tous les cas. Comme μ est, par définition de $D_W^+(\Pi)$, identiquement nul sur $I^-(W)$, on en déduit l'inclusion $\varphi^2(TD_W^\natural(\Pi))\subset T^2D_W^\natural(\Pi)$. D'après la prop. 1.11, cela implique que $\mathbf{V}(\Pi)$ n'est pas de la forme $0\to k_L(\delta_1)\to\mathbf{V}(\Pi)\to k_L(\delta_2)\to 0$, avec $\delta_1\neq\delta_2$.

Par ailleurs, la nullité de $\langle\mu, \sum_{i=0}^{p-1} i^i[\left(\begin{smallmatrix} p^2 & pi \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1], 1]\rangle$ n'est pas une conséquence de l'appartenance de μ à $D_W^\natural(\Pi)$, ce qui implique que $D_W^\natural(\Pi)$ n'est pas stable par φ, et donc que $\mathbf{V}(\Pi)$ n'est pas de la forme $0 \to k_L(\delta) \to \mathbf{V}(\Pi) \to k_L(\delta) \to 0$. Cela permet de conclure.

Lemme 6.6. — *On tant que $k_L[\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-module, on a*

$$D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi) \cong k_L \oplus k_L(\omega^{-r}).$$

Démonstration. — $D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi)$ est le dual de $I^+(W,\Pi)^{U^+(\mathbf{Z}_p)}$. Or d'après le cor. 4.22, on a $I^+(W,\Pi)^{U^+(\mathbf{Z}_p)} = k_L\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot 1 \oplus k_L\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot X^r$. Comme

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot 1 = a^r\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot 1 \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot X^r = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot X^r,$$

si $a \in \mathbf{F}_p$, cela montre que $I^+(W,\Pi)^{U^+(\mathbf{Z}_p)} = k_L \oplus k_L(\omega^r)$ en tant que $k_L[\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-module. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la prop. 6.1. D'après la lemme 6.5, $\mathbf{V}(\Pi)$ est irréductible, donc isomorphe à $V(s,\chi)$, avec $0 \leqslant s \leqslant p-1$ et $\chi \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$. Maintenant, comme $D_W^\natural(\Pi)$ est sans T-torsion, l'application naturelle $D_W^\natural(\Pi) \to D^\natural(\Pi)$ est un isomorphisme d'après le lemme 4.25 et la prop. 4.26. On a donc $D_W^\natural(\Pi) \cong D^\natural(V(s,\chi)^\vee(1))$. Comme $V(s,\chi)^\vee(1) = \big(\mathrm{ind}(\omega_2^{-s-1})\big) \otimes \omega\chi^{-1}$, on déduit du cor. 1.10, que

$$D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi) \cong \big(k_L(\omega) \oplus k_L(\omega^{-s-1})\big) \otimes \omega\chi^{-1},$$

en tant que $k_L[\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-module. Comme on a $D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi) \cong k_L \oplus k_L(\omega^{-r})$, d'après le lemme 6.6, cela implique que $\{1, \omega^{-r}\} = \{\chi^{-1}, \omega^{-s}\chi^{-1}\}$. Il y a alors a priori deux cas : soit $\chi = 1$ et $s = r$, soit $\chi = \omega^r$ et $s = p-1-r$, mais comme $V(r,1) = V(p-1-r, \omega^r)$, cela permet de conclure.

6.2. Atomes de longueur 2

Proposition 6.7. — *Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ vérifiant $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$ et $\delta_3\delta_4^{-1} \neq \omega$. Si $(\delta_1,\delta_2) \notin \{(\delta_3,\delta_4),(\delta_4,\delta_3)\}$, alors $\mathrm{Ext}_G^1(B(\delta_3,\delta_4), B(\delta_1,\delta_2)) = 0$.*

Démonstration. — Soit Π une extension de $B(\delta_3,\delta_4)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$. D'après les prop. 3.6 et 4.31, on dispose du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \delta_4^{-1}\otimes\delta_3^{-1}\omega \arrow[r] \arrow[d] & J^\vee(\Pi) \arrow[r] \arrow[d] & \delta_2^{-1}\otimes\delta_1^{-1}\omega \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & B(\delta_3,\delta_4)^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \Pi^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & B(\delta_1,\delta_2)^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \psi^{-\infty}\big(k_L((T))(\omega\delta_3^{-1})\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \psi^{-\infty}\big(k_L((T))(\omega\delta_1^{-1})\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & 0 \\
{} \arrow[r, "\partial"] & \delta_3^{-1}\otimes\delta_4^{-1}\omega \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}},\mathbf{V}(\Pi))^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \delta_1^{-1}\otimes\delta_2^{-1}\omega \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

de $k_L[B]$-modules. Comme $(\delta_1,\delta_2)\neq(\delta_4,\delta_3)$, l'application de connexion ∂ est nulle, et comme $(\delta_1,\delta_2)\neq(\delta_3,\delta_4)$, la suite exacte $0\to\delta_4^{-1}\otimes\delta_3^{-1}\to J^\vee(\Pi)\to\delta_2^{-1}\otimes\delta_1^{-1}\to 0$ est scindée. Il résulte de la prop. 2.28 que Π admet $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_4\otimes\delta_3\omega^{-1}\oplus\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}) = B(\delta_3,\delta_4)\oplus B(\delta_1,\delta_2)$ comme quotient. Ceci permet de conclure.

Proposition 6.8. — *Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ vérifient $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))$ est un k_L-espace vectoriel de dimension 1, et $\mathbf{V}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_2),k_L(\delta_1))$.*

Démonstration. — Reprenons le diagramme commutatif de $k_L[B]$-modules ci-dessus, avec $(\delta_3,\delta_4)=(\delta_2,\delta_1)$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

(i) la suite $0\to k_L(\delta_1)\to\mathbf{V}(\Pi)\to k_L(\delta_2)\to 0$ est scindée ;

(ii) $\partial=0$;

(iii) $J(\Pi)=\big(\delta_1\otimes\delta_2\omega^{-1}\big)\oplus\big(\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}\big)$.

Comme la dernière propriété implique, d'après la prop. 2.28, que Π admet $B(\delta_2,\delta_1)\oplus B(\delta_1,\delta_2)$ comme quotient, on en déduit que $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),B(\delta_2,\delta_1))$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_2),k_L(\delta_1))$ qui est un k_L-espace vectoriel de dimension 1 sous l'hypothèse $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega\}$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))\neq 0$, si $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$.

Pour cela, on utilise l'existence d'une représentation trianguline irréductible V possédant un réseau V^0 tel que $(k_L\otimes V^0)^{\mathrm{ss}}=\delta_1\oplus\delta_2$. Cette représentation est alors de la forme $V(s)$ pour $s\in\mathscr{S}_*^{\mathrm{irr}}$, et la représentation $\Pi(s)$ est irréductible et, d'après [**7, 8, 4**], admet un réseau $\Pi(s)^0$ tel que $(k_L\otimes\Pi(s)^0)^{\mathrm{ss}}=B(\delta_1,\delta_2)\oplus B(\delta_2,\delta_1)$. En modifiant le réseau $\Pi(s)^0$, on peut donc fabriquer des extensions non triviales de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$ (et de $B(\delta_1,\delta_2)$ par $B(\delta_2,\delta_1)$).

Définition 6.9. — D'après la prop. 6.8, il existe, à isomorphisme près une unique extension non triviale de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$. Cette extension est notée $\Pi(\delta_1,\delta_2)$. Par ailleurs, $\mathbf{V}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),B(\delta_2,\delta_1))$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_2),k_L(\delta_1))$, ce qui prouve que

$$\mathbf{V}(\Pi(\delta_1,\delta_2))=V(\delta_1,\delta_2).$$

Proposition 6.10. — *Si* $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *vérifient* $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$, *et si* Π *est une extension non triviale de* $B(\delta_2,\delta_1)$ *par* $B(\delta_1,\delta_2)$, *alors* $J^\vee(\Pi)=J^\vee(B(\delta_2,\delta_1))$ *et* $\widetilde{J}^\vee(\Pi)=\widetilde{J}^\vee(B(\delta_2,\delta_1))$. *En particulier,* Π *est équilibrée.*

Démonstration. — On a $\mathbf{V}(B(\delta_1,\delta_2))=k_L(\delta_1)$ et $\mathbf{V}(B(\delta_2,\delta_1))=k_L(\delta_2)$. Si l'application de connexion $\partial: J^\vee(B(\delta_1,\delta_2)\to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}},k_L(\delta_2)$ est nulle, la suite $0\to k_L(\delta_1)\to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}},\mathbf{V}(\Pi))\to k_L(\delta_2)\to 0$ est exacte, et comme $\delta_1\neq\delta_2$, cela implique qu'elle est scindée, et que $\mathbf{V}(\Pi)=H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}},\mathbf{V}(\Pi))$ pour des questions de dimension. D'après la prop. 6.8, cela signifie que la suite $0\to B(\delta_1,\delta_2)\to\Pi\to B(\delta_2,\delta_1)\to 0$ est scindée. Comme on a supposé que Π est une extension non triviale de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$, cela implique que ∂ est un isomorphisme, et que $J^\vee(\Pi)=J^\vee(B(\delta_2,\delta_1))$. En particulier, l'image de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)\to\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1,\delta_2))$ ne contient pas $J^\vee(B(\delta_1,\delta_2))$. Comme $\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1,\delta_2))$ est irréductible sous l'action de Δ (prop. 4.35 et rem. 3.9), cela implique $\widetilde{J}^\vee(\Pi)=\widetilde{J}^\vee(B(\delta_2,\delta_1))$, ce qui permet de conclure.

Proposition 6.11. — *(i) Si* $p\neq 2$, *alors* $\Pi\mapsto J(\Pi)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{k_L[G]}(B(\delta,\delta),B(\delta,\delta))\cong\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta\otimes\delta\omega^{-1},\delta\otimes\delta\omega^{-1}).$$

(ii) $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta\otimes\delta\omega^{-1},\delta\otimes\delta\omega^{-1})$ *est naturellement isomorphe à* $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

Démonstration. — Soit Π une extension de $B(\delta,\delta)$ par $B(\delta,\delta)$. La représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ est une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ et donc $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathrm{G}^{\mathrm{ab}}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme Π n'a pas de sous-objets finis, la (ii) de la prop. 4.31 montre que la suite $0\to J(B(\delta,\delta))\to J(\Pi)\to J(B(\delta,\delta))\to 0$ est exacte. Comme, d'après la prop. 2.28, Π admet comme quotient $\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$, et comme Π et $\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$ ont même suite de Jordan-Hölder, cela implique que $\Pi=\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), on peut tordre par $\delta^{-1}\otimes\delta^{-1}\omega$ pour se ramener à montrer que $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(1\otimes 1,1\otimes 1)=\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, ce qui suit de ce que $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}$ s'identifie au groupe des morphismes continus de B dans k_L triviaux sur le centre ; un tel morphisme est de la forme $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto\tau(a^{-1}d)$, pour un unique $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

Remarque 6.12. — (i) Si $p=2$, on a $\omega=1$ et $B(\delta,\delta)$ n'est pas irréductible.

(ii) La démonstration ci-dessus fournit une construction de l'extension $\Pi(\delta,\delta,\tau)$ de $B(\delta,\delta)$ par $B(\delta,\delta)$ correspondant à $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$. Si on note $Y_\tau=k_L\cdot e_1\oplus k_L\cdot e_2$ la k_L-représentation de dimension 2 de B définie par

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot e_1=e_1,\quad\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot e_2=e_2+\tau(a^{-1}d)e_1,$$

alors

$$\Pi(\delta,\delta,\tau)=\mathrm{Ind}_B^G\big(Y_\tau\otimes(\delta\otimes\delta\omega^{-1})\big).$$

Proposition 6.13. — $\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))=V(\delta,\delta,\tau)$.

Démonstration. — On sait a priori que $\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))$ est une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$, et donc que $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\rm ab}}$. Comme $B(\delta,\delta)$ est équilibrée, il en est de même de $\Pi(\delta,\delta,\tau)$, et on a $\widetilde{J}^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau)) = J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau)) \oplus w\cdot J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))$. Par ailleurs, d'après la prop. 4.34, en tant que $k_L[A]$-modules, $\widetilde{J}^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))/J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau)) \cong H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\rm ab}},\mathbf{V}(\Pi)^\vee(1))$, et par construction, $J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau)) \cong w\cdot(Y_\tau\otimes(\delta\otimes\delta\omega^{-1})^\vee$. On en déduit un isomorphisme de $k_L[A]$-modules
$$\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau)) = w\cdot(Y_\tau\otimes(\delta\omega\otimes\delta)) = (w\cdot Y_\tau\otimes(\delta\otimes\delta\omega)),$$
où $w\cdot Y_\tau$ s'obtient à partir de Y_τ en échangeant les rôles de a et d. Pour en déduire l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\rm ab}$ sur $\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))$, il suffit de remarquer que, par définition, celle-ci correspond à l'action du sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ de A, et donc que l'on a $g(e_1)=\delta(g)e_1$ et $g(e_2)=\delta(g)(e_2+\tau(g)e_1)$. Ceci permet de conclure.

La même démonstration que ci-dessus permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 6.14. — *Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ vérifient $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, alors*

(i) $\Pi\mapsto J(\Pi)$ induit un isomorphisme
$$\mathrm{Ext}^1_{k_L[G]}(B(\delta_1,\delta_2),B(\delta_1,\delta_2)) \cong \mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1},\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1});$$
(ii) $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1},\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p,k_L)$;

(iii) le foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),B(\delta_1,\delta_2))$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_1),k_L(\delta_1))$.

Démonstration. — La seule chose qui ne suit pas directement des arguments ci-dessus est le (iii), car on considère Ext^1_G au lieu de $\mathrm{Ext}^1_{k_L[G]}$, mais on a la même suite exacte $0\to\mathrm{Ext}^1_{k_L[H]}(X,X)\to\mathrm{Ext}^1_H(X,X)\to k_L\to 0$, du coté automorphe ($H=G$ et $X=B(\delta_1,\delta_2)$) que du côté galoisien ($H=\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $X=k_L(\delta_1)$), le k_L correspondant à $\mathrm{Hom}_H(X,X)$. (Pour prouver que l'on peut relever X modulo p^2 et démontrer la surjectivité à droite, il suffit de relever δ_1 et δ_2 modulo p^2.)

6.3. Extensions de la représentation triviale par la steinberg

Proposition 6.15. — *(i)* $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{1},\mathrm{St})=0$.

(ii) $\mathrm{Hom}_G(\mathbf{1},\mathrm{St})=0$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le (i), et en passant au dual, il suffit de prouver que si $f:\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,k_L)\to k_L$ est continue et B-équivariant, alors $f=0$. Or, si $\mu\in\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,k_L)$ est à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, on a $\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu\to 0$ dans $\mathrm{St}^\vee$, et la B-invariance de f implique, par passage à la limite, $f(\mu)=0$. Comme les mesures à support compact sont denses dans $\mathrm{St}^\vee$, cela implique que f est identiquement nul, ce qu'on cherchait à démontrer.

Lemme 6.16. — *Soit $A^+=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.*

(i) $(\mathrm{St}^\vee)^{A^+}$ est de dimension 1 engendré par $\delta_0-\delta_\infty$.

(ii) $w\cdot(\delta_0-\delta_\infty)=-(\delta_0-\delta_\infty)$.

Démonstration. — Soit $\mu\in\mathscr{D}_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p),k_L)$ invariante par A^+. En particulier, μ est invariante par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et donc la restriction de μ à $p^n\mathbf{Z}_p^*$ est, quel que soit $n\in\mathbf{Z}$, invariante par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Comme il n'existe pas de distribution de Haar sur $\mathbf{Z}_p^*$, cela implique que la restriction de μ à $p^n\mathbf{Z}_p^*$ est nulle, quel que soit $n\in\mathbf{Z}$, et donc μ a un support concentré en 0 et ∞, et donc est de la forme $a\delta_0 + b\delta_\infty$, avec $a, b \in k_L$. Comme de plus, on doit avoir $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \mu = 0$ si $\mu \in \mathrm{St}^\vee$, cela démontre le (i). Le (ii) étant immédiat, cela permet de conclure.

Soit E une extension de $\mathbf{1}$ par St. Par dualité, cela nous fournit une extension de $\mathbf{1}$ par $\mathrm{St}^\vee$. Maintenant, comme on l'a vu plus haut, l'espace $(\mathrm{St}^\vee)^{A^+}$ est de dimension 1 sur k_L engendré par $\delta_0 - \delta_\infty$. L'image inverse de $k_L \cdot (\delta_0 - \delta_\infty)$ est donc une A^+-extension de $\mathbf{1}$ par $\mathbf{1}$, ce qui nous fournit une application naturelle

$$\mathrm{res}_{A^+} : \mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, \mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_{A^+}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L).$$

Explicitement, si $e \in E^\vee$ est un relèvement de $\delta_0 - \delta_\infty$, alors $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e - e = c(a)$ est un morphisme continu de $\mathbf{Q}_p^*$ dans k_L, et on a $\mathrm{res}_{A^+}(E) = c$.

Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est un homomorphisme continu (et donc localement constant), on note τ_+ la fonction de $\mathbf{Q}_p$ dans k_L définie par

$$\tau_+(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{si } v_p(x) < 0, \\ 0 & \text{si } v_p(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Ceci fait de τ_+ une fonction localement constante sur $\mathbf{Q}_p$ (mais pas à support compact).

Lemme 6.17. — *Si* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$, *alors* $x \mapsto \phi(x) = \tau(cx+d) + \tau_+(\frac{ax+b}{cx+d}) - \tau_+(x)$ *se prolonge par continuité en un élément de* $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), k_L)$.

Démonstration. — Il y a deux cas :

- Si $c = 0$, alors $\phi(x)$ est localement constante sur $\mathbf{Q}_p$ et vaut $\tau(a + \frac{b}{x}) = \tau(a)$ si $v_p(x) \ll 0$.
- Si $c \neq 0$, il faut regarder ce qui se passe en $-\frac{d}{c}$ et ∞. Si x tend vers $-\frac{d}{c}$, alors $\frac{ax+b}{cx+d}$ tend ∞ et donc $\tau_+(\frac{ax+b}{cx+d}) = \tau(\frac{ax+b}{cx+d})$ et $\phi(x) = \tau(ax+b) - \tau_+(x)$ est localement constante dans un voisinage de $-\frac{d}{c}$. Par ailleurs, $\phi(x) = \tau(c + \frac{d}{x}) + \tau_+(\frac{a}{c}) = \tau(c) + \tau_+(\frac{a}{c})$ dans un voisinage de ∞.

Ceci permet de conclure.

Soit $\widetilde{E}_\tau = \mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), k_L) \oplus k_L \tau_+$. Si $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), k_L)$ et $u \in k_L$, on fait agir $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à droite sur $\phi + u\tau_+$ par la formule

$$\Big((\phi + u\tau_+) \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\Big)(x) = \phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big) + u\Big(\tau_+\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big) + \tau(cx+d)\Big).$$

Un calcul immédiat, utilisant le lemme précédent, montre que ceci définit bien une action à droite de G sur $\widetilde{E}_\tau$, mais le centre n'agit pas par un caractère vu que $\tau^+ \star \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \tau^+ + \tau(d)$. (On peut remédier à ce problème en remplaçant $\tau(x)$ par $-\frac{1}{2}\tau(\frac{ad-bc}{cx+d})$, mais cette recette ne marche pas si $p = 2$.)

On définit E_τ comme le quotient de $\widetilde{E}_\tau$ par les constantes, et on munit E_τ de l'action de G à gauche définie, comme d'habitude, par $g \cdot v = v \star g^{-1}$. Comme on a quotienté par les constantes, le centre agit trivialement, et E_τ est bien un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$. L'application $\phi + u\tau_+ \mapsto u$ induit alors la suite exacte $0 \to \mathrm{St} \to E_\tau \to \mathbf{1} \to 0$. En utilisant l'identification de St à $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$, on peut décomposer E_τ sous la forme $E_\tau = \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L) \oplus k_L \cdot \tau_+$. En passant au dual, on en déduit une décomposition $E_\tau^\vee = \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, k_L) \oplus k_L \cdot \lambda_\tau$, où λ_τ est identiquement nulle sur $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$ et prend la valeur 1 sur τ_+. Par ailleurs, si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, alors $\tau_+\star\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)-\tau_+-\tau(a)$ est un élément de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$ prenant la valeur $-\tau(a)$ en 0. On en déduit les formules

$$\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\delta_0=\delta_0-\tau(a)\lambda_\tau\quad\text{et}\quad\mathrm{res}_{A^+}(E_\tau)=-\tau.$$

Théorème 6.18. — *L'application naturelle* res_{A^+} *de* $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},\mathrm{St})$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{A^+}(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — La surjectivité est une conséquence de l'existence de E_τ et de ce que $\mathrm{res}_{A^+}(E_\tau)=-\tau$. D'autre part, l'application de restriction $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},\mathrm{St})\to\mathrm{Ext}^1_B(\mathbf{1},\mathrm{St})$ est injective d'après le th. 5.1, puisque $\mathrm{St}^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}=0$. Il suffit donc, pour terminer la démonstration, de prouver que $\mathrm{res}_{A^+}:\mathrm{Ext}^1_B(\mathbf{1},\mathrm{St})\to\mathrm{Ext}^1_{A^+}(\mathbf{1},\mathbf{1})$ est injective. Ceci va demander un peu de préparation.

Lemme 6.19. — *Si* $\mathrm{res}_{A^+}(E)=0$, *il existe* $e_E\in E^\vee$ *unique, relevant* $\delta_0-\delta_\infty$, *fixe par* A^+, *tel que* $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_E\to 0$ *quand* $x\in\mathbf{Q}_p^*$ *tend vers* ∞.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $\mathrm{res}_{A^+}(E)=0$, alors tout relèvement de $\delta_0-\delta_\infty$ est fixe par A^+. Maintenant, si $x\in\mathbf{Q}_p^*$, on a

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(\delta_0-\delta_\infty)=\delta_x-\delta_\infty=w\cdot(\delta_{x^{-1}}-\delta_0)&=w\cdot\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&x^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(\delta_0-\delta_\infty)-(\delta_0-\delta_\infty)\Big)\\&=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x^{-1}&1\end{smallmatrix}\right)w\cdot(\delta_0-\delta_\infty)+(\delta_0-\delta_\infty).\end{aligned}$$

Ceci implique que, si $e\in E^\vee$ est au-dessus de $\delta_0-\delta_\infty$, alors il existe $u_e(x)\in k_L$ tel que l'on ait

$$\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e=u_e(x)\lambda-\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x^{-1}&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e+e,$$

où $\lambda\in E^\vee$ est une base de $\mathrm{St}^\vee$ et est donc fixe par G. Par ailleurs, comme $\left(\begin{smallmatrix}1&ax\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et comme e est fixe par A^+, on en déduit que $u_e(ax)=u_e(x)$ quels que soient $a,x\in\mathbf{Q}_p^*$. En résumé, il existe $u_e\in k_L$ tel que l'on ait

$$\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e=u_e\lambda-\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x^{-1}&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e+e,\quad\text{quel que soit } x\in\mathbf{Q}_p^*.$$

Quitte à remplacer e par $e-u_e\lambda$, on peut s'arranger pour que $u_e=0$, et comme $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x^{-1}&1\end{smallmatrix}\right)$ tend vers $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ quand x tend vers ∞, on a alors $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e\to 0$ quand $x\to\infty$, ce qui prouve l'existence d'un tel e. L'unicité suit de ce que, si $u\in k_L$, alors $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot(e+u\lambda)=\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e+u\lambda$ tend vers $u\lambda$ quand x tend vers ∞.

Lemme 6.20. — *Si* I *est un système de représentants de* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *dans* $\mathbf{Q}_p$, *et si* $(\mu_i)_{i\in I}$ *est une famille d'éléments de* $k_L[[\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)]]$, *alors* $\mu_i\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_E$ *tend vers* 0 *dans* $E^\vee$ *quand* i *tend vers* ∞.

Démonstration. — Soit $\phi\in E$. Il s'agit de prouver que $\langle\mu_i\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_E,\phi\rangle=0$ sauf pour un nombre fini de $i\in I$. Or on a $\langle\mu_i\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_E,\phi\rangle=\langle\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_E,\mu_i^\iota\cdot\phi\rangle$, où $\mu\mapsto\mu^\iota$ est l'involution de $k_L[[\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)]]$ envoyant $g\in\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur g^{-1}. Maintenant, comme $\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ est compact, les $\mu_i^\iota\cdot\phi$ varient dans un k_L-espace vectoriel V_ϕ de dimension finie, et comme $\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_E$ tend vers 0 dans

$E^\vee$, cela implique que $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e_E$ est identiquement nul sur V_ϕ sauf pour un nombre fini de $i \in I$. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration du th. 6.18. Soit donc E une B-extension de $\mathbf{1}$ par St dont l'image par res_{A^+} est nulle. Soit e_E l'élément de $E^\vee$ dont le lemme 6.19 affirme l'existence, et soit I un système de représentants dans $\mathbf{Q}_p$ de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. On peut écrire tout élément x de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$ de manière unique sous la forme $x = \sum_{i\in I} \mu_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \delta_0$, avec $\mu_i \in k_L[[\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]]$, et on peut relever x en $\tilde{x} = \sum_{i\in I} \mu_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e_E$ dans $E^\vee$ (la convergence de la série est assurée par le lemme 6.20). De plus, comme $\mathbf{Q}_p$ est commutatif, et comme la série converge quel que soit le choix de I, la somme ne dépend pas du choix de I, et on a $g \cdot \tilde{x} = \widetilde{g \cdot x}$ si $g \in U$. Par ailleurs, si $g \in A^+$, on a

$$g \cdot \tilde{x} = \sum_{i\in I} g \cdot \mu_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e_E = \sum_{i\in I} g \cdot \mu_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1} \cdot (g \cdot e_E).$$

Comme $g \cdot e_E = e_E$ par hypothèse, comme g normalise U, et comme $h \cdot \tilde{x} = \widetilde{h \cdot x}$ si $h \in U$, la dernière somme n'est autre que $\widetilde{g \cdot x}$, ce qui prouve que $x \mapsto \tilde{x}$ est un scindage B-equivariant de $E^\vee \to \mathrm{St}^\vee$. Ceci permet de conclure.

Remarque 6.21. — On a fabriqué ci-dessus un scindage B-équivariant de l'application $E^\vee \to \mathrm{St}^\vee$. Comme $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{1}, \mathrm{St}) = 0$, ce scindage est unique, et comme $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, \mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_B(\mathbf{1}, \mathrm{St})$ est injective, ce scindage est en fait G-équivariant, et on a $w \cdot e_E = -e_E$. Ceci peut se vérifier directement en partant de l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ -x & -x^{-1} \end{pmatrix} w.$$

En effet, d'après le lemme 6.19 (ou plutôt d'après sa démonstration), le membre de gauche envoie e_E sur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \Big(e_E - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot e_E\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot e_E - e_E.$$

Par ailleurs, il existe $u \in k_L$ tel que $w \cdot e_E = -e_E + u\lambda$. Le membre de droite envoie donc e_E sur

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ -x & -x^{-1} \end{pmatrix} \cdot (-e_E + u\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-e_E + u\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot e_E - e_E + u\lambda.$$

On a donc $u = 0$, ce qu'on voulait vérifier.

6.4. Atomes de longueur 3

On suppose $p \geqslant 5$ de telle sorte que $\omega \neq \omega^{-1}$.

Proposition 6.22. — $\mathrm{Ext}^1_G(B(1, \omega), \mathrm{St}) = 0$.

Démonstration. — Soit $0 \to \mathrm{St} \to \Pi \to B(1, \omega) \to 0$ une extension de $B(1, \omega)$ par St. On a $J^\vee(\mathrm{St}) = 0$, et donc la suite $0 \to k_L(\omega) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)) \to k_L \to 0$ est exacte d'après le cor. 4.32. On en déduit le fait que l'extension $0 \to k_L(\omega) \to \mathbf{V}(\Pi) \to k_L \to 0$ est scindée. L'image de Π dans $\mathrm{Ext}^1_B(B(1, \omega) \boxtimes \mathbf{Q}_p, \mathrm{St})$ est donc nulle (rem. 4.33). Comme $B(1, \omega)$ est équilibrée, cela implique, d'après la prop. 5.12, que l'extension $0 \to \mathrm{St} \to \Pi \to B(1, \omega) \to 0$ est scindée, ce qui permet de conclure.

Lemme 6.23. — *Si Π est une extension non triviale de $B(1, \omega)$ par E_τ, alors $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = \widetilde{J}^\vee(B(1, \omega))$ et $J^\vee(\Pi) = J^\vee(B(1, \omega)) = \omega^{-1} \otimes \omega$; en particulier, Π est équilibrée.*

Démonstration. — On part du diagramme commutatif suivant de $k_L[B]$-modules.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \omega^{-1}\otimes\omega \arrow[r] \arrow[d] & J^\vee(\Pi) \arrow[r] \arrow[d] & 1\otimes 1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & B(1,\omega)^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \Pi^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & E_\tau^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \psi^{-\infty}\big(k_L((T))(\omega)\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \psi^{-\infty}\big(k_L((T))\big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & 0 \\
{} \arrow[r, "\partial"] & 1\otimes 1 \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi))^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \omega^{-1}\otimes\omega \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si l'application de connexion ∂ est nulle, on a $J^\vee(\Pi) = (1\otimes 1)\oplus(\omega^{-1}\otimes\omega)$ en tant que $k_L[B]$-module. D'après la prop. 2.28, cela implique que Π admet $\mathbf{1}\oplus B(1,\omega)$ comme sous-quotient. On a donc $\Pi/\mathrm{St} = \mathbf{1}\oplus B(1,\omega)$, et comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega),\mathrm{St}) = 0$, cela implique que la suite $0\to E_\tau\to\Pi\to B(1,\omega)\to 0$ est scindée. Comme on a supposé que Π est une extension non triviale de $B(1,\omega)$ par E_τ, cela implique que ∂ est un isomorphisme, et que $J^\vee(\Pi) = \omega^{-1}\otimes\omega$. En particulier, l'image de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)\to\widetilde{J}^\vee(E_\tau)$ ne contient pas $J^\vee(E_\tau)$. Or, l'action de A est unipotente sur $\widetilde{J}^\vee(E_\tau)$ et tout sous-$k_L[A]$-module non nul de $\widetilde{J}^\vee(E_\tau)$ contient $J^\vee(E_\tau)$. On a donc $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = \widetilde{J}^\vee(B(1,\omega))$ et Π est équilibrée.

Proposition 6.24. — *Si Π est une extension non triviale de $B(1,\omega)$ par E_τ, alors $\mathbf{V}(\Pi) = V(\omega,1,\tau^\perp)$*

Démonstration. — Si f est un générateur de $1\otimes 1\subset E_\tau^\vee$, et si $\tilde f\in\Pi^\vee$ a pour image f dans $E_\tau^\vee$, alors $\iota(\tilde f)\in\psi^{-\infty}\big(k_L((T))(\omega)\big)\subset\psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi)\big)$, et $\partial(f) = \mathrm{Res}(\iota(\tilde f))$.

Soit maintenant, $(1)_{n\in\mathbf{N}}\in\psi^{-\infty}\big(k_L((T))\big)$. Comme $\mathrm{Res}(1) = 0$, il existe $e\in E_\tau^\vee$ vérifiant $\iota(e) = (1)_{n\in\mathbf{N}}$. Par construction de E_τ, on peut choisir $f\in 1\otimes 1$ tel que l'on ait $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot e - e = \tau(a)f$ quel que soit $a\in\mathbf{Q}_p^*$. Soient alors $\tilde e\in\Pi^\vee$ relevant e, et soit $\hat e = \iota(\tilde e)$ l'image de $\tilde e$ dans $\psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi)\big)$; c'est un relèvement de e dans $\psi^{-\infty}\big(\mathbf{D}(\Pi)^\natural\big)$, qui est bien déterminé à addition près d'un élément de $\psi^{-\infty}\big(k_L((T))(\omega)\big)$. Si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat e - \hat e\in\psi^{-\infty}\big(k_L((T))(\omega)\big)$, et on a $\mathrm{Res}(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat e - \hat e) = \partial(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot e - e) = \tau(a)\partial(f)$. Une comparaison avec le (iv) de la prop. 1.12 permet de conclure.

Proposition 6.25. — *Si $p\neq 2$, si $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, et si E_τ est l'extension de $\mathbf{1}$ par* St *habituelle, alors $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega),E_\tau)$ est un k_L-espace vectoriel de dimension* 1.

Démonstration. — Soit Π une extension de $B(1,\omega)$ par E_τ. On a $J^\vee(E_\tau) = 1\otimes 1$ comme représentation de B, et $J^\vee(B(1,\omega)) = \omega\otimes\omega^{-1}$. En recopiant la démonstration de la prop. 6.8, on montre que, si $0 \to k_L(\omega) \to \mathbf{V}(\Pi) \to k_L \to 0$ est scindée, alors $J(\Pi) = \omega \otimes \omega^{-1} \oplus 1 \otimes 1$, et donc que Π admet $B(1,\omega) \oplus \mathbf{1}$ comme quotient. Comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), \mathrm{St}) = 0$, cela implique que $B(1,\omega)$ est un sous-objet de Π et donc que Π est scindée. Ceci prouve que $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), E_\tau)$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(1,\omega)$. Par ailleurs, il résulte de la prop. 6.24 que l'image est incluse dans la droite orthogonale à τ. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), E_\tau) \neq 0$.

Pour cela, on utilise l'existence d'une représentation trianguline irréductible V possédant un réseau V^0 tel que $(k_L \otimes V^0)$ soit l'extension de 1 par ω dont la classe dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ soit dans l'orthogonal de τ. Cette représentation est alors de la forme $V(s)$ pour $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{irr}}$, et la représentation $\Pi(s)$ est irréductible et, d'après [**7, 8, 4**], admet un réseau $\Pi(s)^0$ tel que $(k_L \otimes \Pi(s)^0)^{\mathrm{ss}} = \mathbf{1} \oplus \mathrm{St} \oplus B(1,\omega)$. Comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), \mathrm{St}) = 0$, quitte à modifier le réseau $\Pi(s)^0$, on peut se débrouiller pour que $k_L \otimes \Pi(s)^0$ admette $B(1,\omega)$ comme quotient, St comme sous-objet, et que les extensions intermédiaires $0 \to \mathrm{St} \to E_1 \to \mathbf{1} \to 0$ et $0 \to \mathbf{1} \to E_2 \to B(1,\omega) \to 0$ soient non scindées. Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ non nul, tel que $E_1 \cong E_\lambda$. Mais alors $\mathbf{V}(k_L \otimes \Pi(s)^0)$ est l'extension de 1 par ω dont la classe dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ est dans l'orthogonal de λ. Comme $\mathbf{V}(k_L \otimes \Pi(s)^0)$ est un sous-quotient de V, on a $\lambda = \tau$, et on a construit une extension non triviale de $B(1,\omega)$ par E_τ, ce qui termine la démonstration du (ii).

Définition 6.26. — Il résulte de la proposition 6.25 que, si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, il existe, à isomorphisme près, une unique extension de $B(1,\omega)$ par E_τ. On note $\Pi(1,\omega^{-1},\tau)$ cette extension, et si $\delta_1\delta_2^{-1} = \omega$, on note $\Pi(\delta_1,\delta_2,\tau)$ la représentation $\Pi(1,\omega^{-1},\tau) \otimes \delta_1$. D'après la prop. 6.24, on a
$$\mathbf{V}(\Pi(\delta_1,\delta_2,\tau)) = V(\delta_1,\delta_2,\tau^\perp).$$

6.5. Atomes de longueur 4

Il n'y a d'atomes de longueur 4 que si $p = 2$, où on a $\omega = 1$ et si $p = 3$, où on a $\omega = \omega^{-1}$. Leur classification reste à faire... Ce sont des extensions de E_{τ_1} par $E_{\tau_2} \otimes \omega$, avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$.

7. Extensions de d'atomes automorphes

Ce § contient la démonstration de l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1(\Pi,\Pi) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi), \mathbf{V}(\Pi))$ requise pour faire marcher la stratégie de Kisin. Le lecteur y trouvera aussi des calculs de groupes d'extensions de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dont beaucoup étaient déjà connus d'Emerton [**13**].

7.1. Injectivité de $\mathrm{Ext}^1(\Pi,\Pi) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi), \mathbf{V}(\Pi))$

Lemme 7.1. — *Le foncteur* $\mathbf{V}$ *induit une injection de* $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}, B(1,\omega))$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L)$ *et de* $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\mathrm{St})$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L(\omega))$.

Démonstration. — On a $\mathrm{J}^\vee(\mathrm{St}) = 0$ d'après le (iii) de la prop. 4.27. Ceci permet, en utilisant la rem. 4.33, d'en déduire qu'une extension qui est dans le noyau de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}, B(1,\omega)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L)$ (resp. de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L(\omega))$), est aussi dans le noyau de la restriction de G à B. On conclut en utilisant le th. 5.1.

Proposition 7.2. — *Si* $\delta, \delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *et si* $(\delta_1,\delta_2) \neq (\omega\delta, \delta)$, *alors* $\mathrm{Ext}^1_G(\delta, B(\delta_1,\delta_2)) = 0$.

Démonstration. — Soit $0\to B(\delta_1,\delta_2)\to E\to \delta\circ\det\to 0$ une extension de $\delta\circ\det$ par $B(\delta_1,\delta_2)$. Le diagramme commutatif de la prop. 4.31 montre que la suite de $k_L[B]$-modules $0\to J(B(\delta_1,\delta_2))\to J(E)\to\delta\otimes\delta\to 0$ est exacte, et l'hypothèse $(\delta_1,\delta_2)\neq(\omega\delta,\delta)$ implique qu'elle est scindée. Ceci permet d'utiliser la prop. 2.28 pour montrer que E admet un quotient admettant $B(\delta_1,\delta_2)\oplus\delta\circ\det$ comme sous-$k_L[G]$-module, et donc que $E=B(\delta_1,\delta_2)\oplus\delta\circ\det$. Ceci permet de conclure.

Théorème 7.3. — *Si* Π *est un atome automorphe de longueur* $\leqslant 3$*, alors* $\mathbf{V}$ *induit une injection de* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi,\Pi)$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$.

Démonstration. — Soit $0\to\Pi\to E\to\Pi\to 0$ une extension de Π par Π. Il s'agit de montrer que, si $\mathbf{V}(E)=\mathbf{V}(\Pi)\oplus\mathbf{V}(\Pi)$, comme $k_L[\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}]$-module, alors $E=\Pi\oplus\Pi$. La démonstration se fait cas par cas.

• Si Π est irréductible (et donc supersingulière), $J^\vee(\Pi)=0$ d'après le (iv) de la prop. 4.27. On déduit du diagramme commutatif de la rem. 4.33 que que $0\to\Pi^\vee\to E^\vee\to\Pi^\vee\to 0$ est scindée sur B, et donc que $0\to\Pi\to E\to\Pi\to 0$ est scindée sur B. Le th. 5.1 permet d'en déduire que $0\to\Pi\to E\to\Pi\to 0$ est scindée sur G, ce qui permet de conclure dans ce cas.

• Si Π est de longueur 2, alors Π est une extension de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$, avec $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{\omega,\omega^{-1}\}$. L'injectivité de $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi,\Pi)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$, peut donc se déduire, par dévissage, du (iii) de la prop. 6.14, et de la prop. 6.8.

• Si Π est de longueur 3, on peut, quitte à tordre Π par un caractère, supposer que Π est une extension de $B(1,\omega)$ par E_τ, avec $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ non nul. La démonstration va encore se faire par dévissage, mais il faut faire un petit peu attention car $\mathbf{V}$ tue les morceaux de dimension finie. On peut écrire E sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}\mathrm{St} & \tau & c\cup\tau & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ 0 & \mathbf{1} & c & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ 0 & 0 & B(1,\omega) & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{St} & \tau & c\cup\tau\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B(1,\omega)\end{pmatrix}$$

Maintenant, comme $\mathbf{V}(E)$ est scindée, la sous-extension

$$E^{(1)}=\begin{pmatrix}B(1,\omega) & a_{3,1}\\ 0 & \mathrm{St}\end{pmatrix}$$

est scindée d'après le lemme 7.1, puisque l'extension $0\to\mathbf{V}(B(1,\omega))\to\mathbf{V}(E')\to\mathbf{V}(\mathrm{St})\to 0$ est scindée comme sous-extension de $\mathbf{V}(E)$. On peut donc supposer $a_{3,1}=0$. De plus, comme $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},B(1,\omega))=0$ d'après la prop. 7.2, on peut aussi supposer $a_{3,2}=0$. On en déduit que E contient la sous-extension

$$E^{(2)}=\begin{pmatrix}B(1,\omega) & a_{3,3}\\ 0 & B(1,\omega)\end{pmatrix}.$$

En utilisant le (iii) de la prop. 6.14 et les arguments ci-dessus, on en déduit que cette extension est aussi scindée, et donc que l'on peut supposer $a_{3,3}=0$. En résumé, la sous-extension $0\to\Pi/E_\tau\to E/E_\tau\to\Pi\to 0$ est scindée et donc E contient une sous extension $0\to E_\tau\to E^{(3)}\to\Pi\to 0$. Comme la suite $0\to\mathbf{V}(E_\tau)\to\mathbf{V}(E^{(3)})\to\mathbf{V}(\Pi)\to 0$ est scindée, on déduit de la rem. 4.33, que la suite $0\to J^\vee(\Pi)\to J^\vee(E^{(3)})\to J^\vee(E_\tau)\to 0$ est exacte. Comme $J^\vee(\Pi)\cong\omega^{-1}\otimes\omega$ d'après le lemme 6.23, et comme $J^\vee(E_\tau) = 1 \otimes 1$, cette suite est scindée comme suite de $k_L[B]$-modules. On en déduit, en utilisant la prop. 2.28, que $E^{(3)}$ admet $\mathbf{1} \oplus B(1,\omega)$ comme sous-objet d'un quotient. Il en est donc de même de

$$E^{(3)}/\mathrm{St} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & \mathrm{St} & \tau & c \cup \tau \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & 0 & B(1,\omega) \end{pmatrix},$$

et comme τ et c ne sont pas triviaux, cela montre que l'on peut supposer $a_{2,1} = a_{2,2} = a_{2,3} = 0$. Comme $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L(\omega))$ est injective d'après le lemme 7.1, on peut aussi supposer $a_{1,1} = 0$, et comme $\mathrm{Ext}^1(B(1,\omega),\mathrm{St}) = 0$ d'après la prop. 6.22, il ne reste plus qu'à montrer que l'on peut supposer $a_{1,2} = 0$. L'extension $0 \to \mathrm{St} \to E^{(4)} \to \mathbf{1} \to 0$ déterminée par $a_{1,2}$ est, d'après le th. 6.18, de la forme $E_{\tau'}$, avec $\tau' \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$. Or E contient

$$\begin{pmatrix} \mathrm{St} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & B(1,\omega) \end{pmatrix},$$

comme sous-objet. Si $\tau' = 0$, on a gagné. Si $\tau' \neq 0$, alors $\mathbf{V}(E)$ contient, d'après la prop. 6.24, la représentation $V(\omega, 1, (\tau')^\perp)$. Comme $\mathbf{V}(E) = V(\omega,1,\tau^\perp) \oplus V(\omega,1,\tau^\perp)$, cela implique qu'il existe $\alpha \in k_L$ tel que $\tau' = \alpha\tau$. Un changement de base permet donc d'éliminer $a_{1,2}$, ce qui permet de conclure.

7.2. Calculs de groupes d'extensions de représentations de G

Proposition 7.4. — *Soient $r \in \{0,\dots,p-1\}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$.*

(i) Si $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta),\delta')$.

(ii) Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, avec $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, alors

$$\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta), B(\delta_1,\delta_2)) = \mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),\Pi(r,\delta)) = 0.$$

(iii) Si $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}\otimes\delta',\Pi(r,\delta)) = 0$.

Démonstration. — Soit E une extension de Π par $\Pi(r,\delta)$, où Π est de la forme $B(\delta_1,\delta_2)$, avec $\delta_1,\delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ et $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, ou encore $\mathrm{St}\otimes\delta'$, avec $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$. Comme $J^\vee(\Pi(r,\delta)) = 0$ et $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi(r,\delta))) = 0$, il résulte du cor. 4.32 que l'application naturelle $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(E)) \to H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi))$ est un isomorphisme, et donc que l'extension $0 \to \mathbf{V}(\Pi(r,\delta)) \to \mathbf{V}(E) \to \mathbf{V}(\Pi) \to 0$ est scindée puisque $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi)) = \mathbf{V}(\Pi)$.

• Dans le cas, où $\Pi = \mathrm{St}\otimes\delta'$, cela implique que l'exension $0 \to \Pi^\vee \to E^\vee \to \Pi(r,\delta)^\vee \to 0$ est scindée sur B puisque $J^\vee(\mathrm{St}\otimes\delta') = 0$ et $J^\vee(\Pi(r,\delta)) = 0$. Le th. 5.1 montre que E est scindée sur G. On en déduit la trivialité de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}\otimes\delta',\Pi(r,\delta))$.

• Dans le cas $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$, cela implique que l'image de E dans $\mathrm{Ext}^1_B(B(\delta_1,\delta_2)\boxtimes\mathbf{Q}_p, \Pi(r,\delta))$ est nulle (rem. 4.33). Comme $B(\delta_1,\delta_2)$ est équilibrée, cela implique, d'après la prop. 5.12, que E est scindée sur G. On en déduit la trivialité de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),\Pi(r,\delta))$.

Soit maintenant E une extension de $\Pi(r,\delta)$ par δ', avec $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ ou par $B(\delta_1,\delta_2)$, avec $\delta_1\otimes\delta_2^{-1} \neq \omega$. Comme $J^\vee(\Pi(r,\delta)) = 0$ et $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}, \mathbf{V}(\Pi(r,\delta))) = 0$, il résulte du (ii) de la prop. 4.31, que l'on a $J^\vee(E) = J^\vee(\Pi)$. En utilisant la prop. 2.28, cela permet de montrer que E admet δ' [resp. $\mathrm{Ind}_B^G J(B(\delta_1,\delta)) = B(\delta_1,\delta_2)$] comme quotient. L'extension E est donc scindée, ce qui prouve la trivialité de $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta),\delta')$ et $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta),B(\delta_1,\delta_2))$. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Remarque 7.5. — Il est probable que $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta),\mathrm{St}\otimes\delta') = 0$, mais les méthodes ci-dessus ne permettent pas de le démontrer.

Proposition 7.6. — *Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p,k_L)$, l'application naturelle de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},E_\tau)$ dans $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},\mathbf{1})$ est identiquement nulle.*

Démonstration. — Soit Π une extension de $\mathbf{1}$ par E_τ ; on doit montrer que $\Pi/\mathrm{St} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{1}$. Rappelons que $E_\tau = \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)\oplus k_L\cdot\tau_+$. Soit $e\in\Pi$ relevant $1\in\mathbf{1}$. Si $g\in G$, il existe alors $\alpha_g\in k_L$ et $\phi_g\in\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$, uniquement déterminés, tels que $g\cdot e - e = \alpha_g\tau_+ + \phi_g$. Maintenant, comme $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},E_\tau)=0$, on a $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},E_\tau) = H^1(G,E_\tau)$, et il suffit de prouver que $\alpha_g = 0$ quel que soit $g\in G$.

On a

$$\alpha_{gh}\tau_+ + \phi_{gh} = gh\cdot e - e = g\cdot(he-e) + g\cdot e - e = g\cdot(\alpha_h\tau_+ + \phi_h) + \alpha_g\tau_+ + \phi_g.$$

Comme $g\cdot\tau_+ - \tau_+ \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$, cela implique que $\alpha_{gh} = \alpha_g + \alpha_h$ quels que soient $g,h\in G$. On en déduit l'existence de $\alpha\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p,k_L)$ tel que $\alpha_g = \alpha(\det g)$ quel que soit $g\in G$. De plus, le 2-cocycle $(g,h)\mapsto \alpha(\det h)(g\cdot\tau_+ - \tau_+)$ est égal à $\phi_{gh} - g\cdot\phi_h - \phi_g$; c'est donc un 2-cobord, et sa restriction à $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}_p^*\end{smallmatrix}\right)$ est donc, a fortiori, un 2-cobord.

Si $g = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)$, on a

$$(g\cdot\tau_+ - \tau_+)(x) = \tau_+(vx) - \tau_+(x) - \tau(v) = \begin{cases} -\tau(v) & \text{si } x, vx\in\mathbf{Z}_p,\\ \tau(x) & \text{si } x\in\mathbf{Z}_p \text{ et } vx\notin\mathbf{Z}_p,\\ -\tau(vx) & \text{si } x\notin\mathbf{Z}_p \text{ et } vx\in\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } x, vx\notin\mathbf{Z}_p.\end{cases}$$

En évaluant en $x=1$ la formule $\alpha(\det h)(g\cdot\tau_+ - \tau_+) = \phi_{gh} - g\cdot\phi_h - \phi_g$, pour $h = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$, $g = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)$, on obtient, en notant, pour simplifier, ϕ_u la fonction ϕ_k, si $k = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & u\end{smallmatrix}\right)$,

$$\alpha(d)\cdot\begin{cases} -\tau(v) & \text{si } v\in\mathbf{Z}_p\\ \tau(v) & \text{si } v\notin\mathbf{Z}_p\end{cases} = \phi_{dv}(1) - \phi_d(v) - \phi_v(1).$$

Remplaçant v par x, cela nous fournit l'identité

$$\phi_d(x) = \phi_{dx}(1) - \phi_x(1) - \alpha(d)\cdot\begin{cases} -\tau(x) & \text{si } x\in\mathbf{Z}_p\\ \tau(x) & \text{si } x\notin\mathbf{Z}_p\end{cases}.$$

Un petit calcul permet d'en déduire que, si $x, vx\notin\mathbf{Z}_p$, alors

$$\phi_{dv}(x) - \phi_d(vx) - \phi_v(x) = -\alpha(dv)\tau(x) + \alpha(d)\tau(vx) + \alpha(v)\tau(x) = \alpha(d)\tau(v).$$

Le membre de gauche étant à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, on en déduit la nullité de $\alpha(d)\tau(v)$ quels que soient $d,v\in\mathbf{Q}_p^*$, et τ n'étant pas identiquement nul, cela implique $\alpha=0$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] L. Barthel et R. Livné, Irreducible modular representations of $\mathbf{GL}_2$ of a local field, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

[2] L. Barthel et R. Livné, Modular representations of $\mathbf{GL}_2$ of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory **55** (1995), 1–27.

[3] L. Berger, H. Li et J. Zhu, Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations, Math. Ann. **329** (2004), 365-377.

[4] L. Berger, Représentations modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, prépublication, 2006.

[5] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, prépublication I.H.E.S., 2006.

[6] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I, Comp. Math. **138** (2003) 165-188.

[7] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23-58.

[8] C. Breuil et A. Mézard, Représentations semi-stables de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, prépublication I.H.E.S., 2005.

[9] C. Breuil et V. Paskunas, en préparation.

[10] P. Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, preprint 2004.

[11] P. Colmez, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, preprint 2005.

[12] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, preprint 2007.

[13] M. Emerton, communication personnelle.

[14] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[15] J-M. Fontaine et J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. **288** (1979) 367–370.

[16] F. Gouvêa et B. Mazur, On the density of modular representations, Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 127–142, AMS/IP Stud. Adv. Math. **7**, 1998.

[17] L. Herr, Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, Bull. S.M.F. **126** (1998), 563–600.

[18] L. Herr, Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate, Math. Ann. **320** (2001), 307–337.

[19] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[20] V. Paskunas On the restriction of representations of $\mathbf{GL}_2(F)$ to a Borel sugroup, Comp. Math., à paraître.

[21] P. Schneider et U. Stuhler, Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field, J. Reine Angew. Math. **436** (1993), 19–32.

[22] M-F. Vigneras, Cohomology of sheaves on the building and R-representations, Invent. Math. **127** (1997), 349–373.

[23] M-F. Vigneras, A criterion for integral structures and coefficient systems on the tree of $PGL(2, F)$, preprint 2006.

[24] M-F. Vigneras, From finitely presented p-adic torsion representations of $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q}_p)$ to (φ, Γ)-modules, communication personnelle.

[25] J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci. E.N.S. **16** (1983), 59–89.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : `colmez@math.jussieu.fr`