Logique propositionnelle

Richard Lassaigne
IMJ/Logique mathématique
CNRS-Université Paris Diderot

Soit $\mathcal{P} = \{p, q, r, ...\}$ l'ensemble des variables propositionnelles
L'ensemble des **formules** du calcul propositionnel construit sur $\mathcal{P}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{F}$ tel que :

- toute variable propositionnelle est dans $\mathcal{F}$,
- si $F \in \mathcal{F}$, alors $\neg F \in \mathcal{F}$,
- si $F, G \in \mathcal{F}$, alors $(F \wedge G) \in \mathcal{F}$, $(F \vee G) \in \mathcal{F}$, $(F \rightarrow G) \in \mathcal{F}$ et $(F \leftrightarrow G) \in \mathcal{F}$.

Autre définition : $\mathcal{F}$ est la réunion des ensembles $\mathcal{F}_n$
où les ensembles $\mathcal{F}_n$ sont définis par **récurrence** :

- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$,
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg F : F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(F \alpha G) : F, G \in \mathcal{F}_n \textit{ et } \alpha \textit{ est } \wedge, \vee, \rightarrow \textit{ ou } \leftrightarrow\}$

La **complexité** d'une formule F est le plus petit entier n tel que

$$F \in \mathcal{F}_n$$

Exemple : la formule $F = (\neg p \wedge ((q \vee r) \rightarrow s))$ est de complexité 3

Soit P une propriété, portant sur les formules, qui satisfait les conditions suivantes :

- toute variable propositionnelle possède la propriété P,
- si G est une formule qui possède la propriété P, alors la formule $\neg G$ la possède aussi,
- si G, H sont des formules qui possèdent la propriété P, alors les formules $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$, $(G \leftrightarrow H)$ la possèdent aussi.

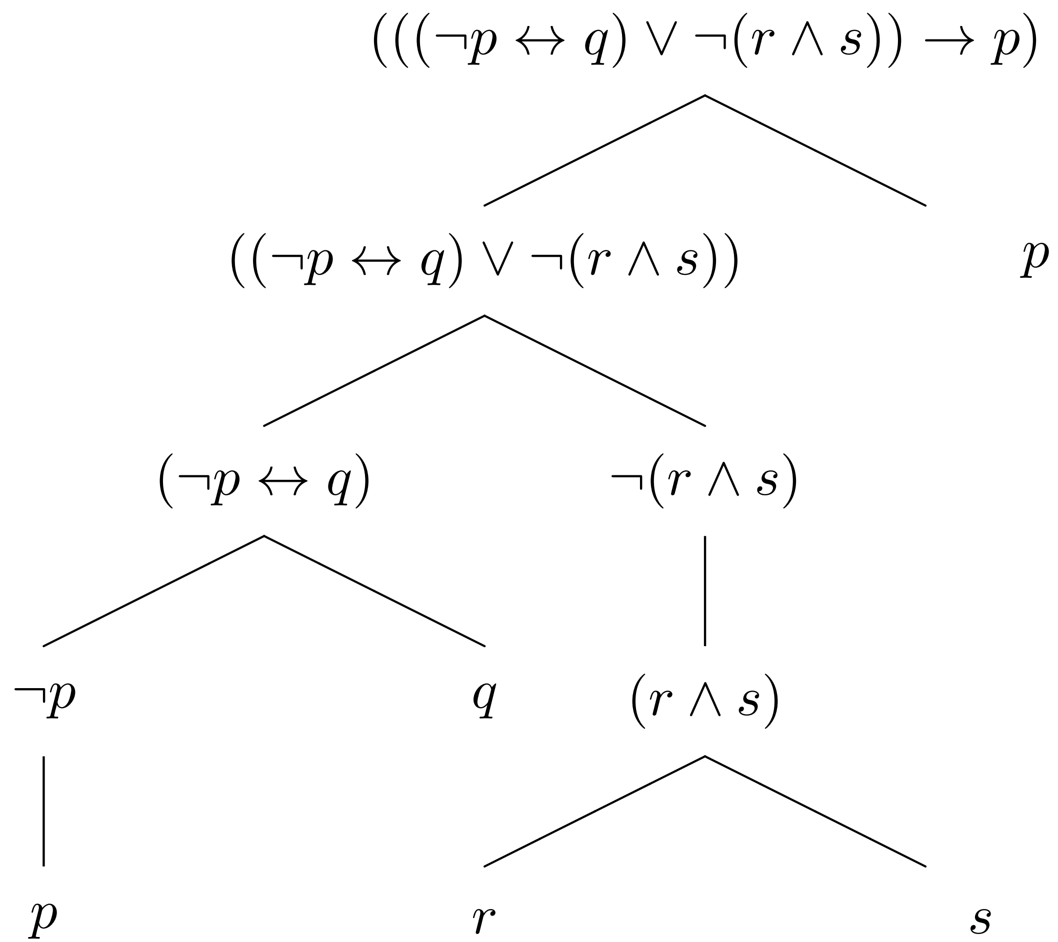
Alors toute formule du calcul propositionnel possède la propriété P.

Exemple : Toute formule possède exactement le même nombre de parenthèses ouvrantes et fermantes.

L'expression suivante est-elle une **formule** ?

$$F = (((\neg p \leftrightarrow q) \vee \neg(r \wedge s)) \rightarrow p)$$

Arbre de décomposition :



Une **valuation** v est une fonction de l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. Etant donné une formule F, une valuation v détermine une **valeur** unique $v(F)$ pour la formule F.

Exemple : La valeur de la formule $((p \to q) \wedge (q \vee r))$ pour la valuation v définie par : $v(p) = v(q) = 0$ et $v(r) = 1$ est 1.

Définition :

- Une formule F est **satisfaite** par une valuation v si $v(F) = 1$.
- Une **tautologie** est une formule qui est satisfaite par toute valuation.
- Deux formules F, G sont dites **équivalentes** si pour toute valuation v, $v(F) = v(G)$.

Les formules suivantes sont des exemples de **tautologies** :

$$(p \to p)$$

$$(p \to (q \to p))$$

$$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$

$$(((\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p))$$

Les couples de formules suivantes sont des exemples de formules **équivalentes** :

$$\neg\neg p \; et \; p$$

$$(p \to q) \; et \; (\neg p \vee q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \; et \; ((p \to q) \wedge (q \to p))$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \; et \; ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

On remarque que deux formules F, G sont **équivalentes** ssi la formule $(F \leftrightarrow G)$ est une **tautologie**. La relation binaire $\equiv$ définie sur l'ensemble des formules par : $F \equiv G$ ssi F, G sont équivalentes, est une relation d'**équivalence** (exercice).

Soient Σ un ensemble de formules et F une formule.

- La formule F est dite **conséquence** de Σ si toute valuation, qui satisfait toutes les formules de Σ à la fois, satisfait aussi la formule F.
- Un ensemble de formules Σ est dit **satisfaisable** s'il existe une valuation qui satisfait toutes les formules de Σ.

Exemple :

- La formule q est conséquence de l'ensemble $\{p, (p \to q)\}$.
- L'ensemble de formules $\{p, (p \to q), \neg q\}$ n'est pas satisfaisable.

Proposition : Une formule F est **conséquence** de l'ensemble de formules Σ si et seulement si l'ensemble $\Sigma \cup \{\neg F\}$ n'est **pas satisfaisable**.

Question : comment peut-on calculer la valeur de vérité d'une formule complexe à partir des valeurs de formules plus simples ?

Une occurrence de la variable p dans une formule F est la donnée de cette variable et d'une place où elle apparaît dans F. Soit G une formule. La formule obtenue par **substitution** de G à p dans F, notée $F(G/p)$ est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de p dans F par la formule G.

Exemple : La substitution de la formule $(q \to r)$ à la variable q dans la formule $((p \to q) \wedge (q \vee r))$ donne :

$$((p \to (q \to r)) \wedge ((q \to r) \vee r))$$

Propriété : pour obtenir la valeur de la formule $F(G/p)$ pour la valuation v, il suffit de calculer en remplaçant $v(p)$ par $v(G)$, en laissant inchangées les valeurs de v sur les autres variables propositionnelles de F

Exemples :

- Quelles que soient les formules F, G, H, les formules suivantes sont des **tautologies** :

$$(F \to F)$$

$$(F \to (G \to F)$$

$$((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))$$

- Quelles que soient les formules F, G, H, les formules suivantes sont **équivalentes** :

$$\neg\neg F \equiv F$$

$$(F \to G) \equiv (\neg F \vee G)$$

$$(F \leftrightarrow G) \equiv ((F \to G) \wedge (G \to F))$$

Le groupe de connecteurs suivant est suffisant pour obtenir le pouvoir d'expression de la logique propositionnelle.

Proposition :
Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule construite avec les seuls connecteurs $\neg, \wedge$.

Un ensemble de connecteurs qui possède la propriété considérée pour le système $\{\neg, \wedge\}$ est appelé un **système complet.**

Il est facile de déduire du résultat précédent que les systèmes de connecteurs $\{\neg, \vee\}$ et $\{\neg, \rightarrow\}$ sont aussi complets.

Une **forme normale conjonctive** est :

- soit une conjonction $(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_k)$, où chaque formule F_i ($i = 1, 2, ..., k$) est de la forme $(G_1 \vee G_2 \vee ... \vee G_l)$, chaque G_j ($j = 1, 2, ..., l$) étant une variable propositionnelle ou une variable propositionnelle précédée d'une négation.
- soit réduite à l'une des formules F_i.

Exemple :Les formules suivantes sont des formes normales conjonctives.

$$((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$$

$$((p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s))$$

$$(\neg p \vee q)$$

Pour définir une **forme normale disjonctive**, il suffit d'échanger les rôles joués par les connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

Proposition : Toute formule est équivalente à une forme normale disjonctive et à une forme normale conjonctive.

En pratique, la méthode consiste à transformer la formule par équivalences successives à l'aide des règles suivantes appliquées dans cet ordre :

- **élimination** des connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ à l'aide des équivalences :

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$$

$$(F \leftrightarrow G) \equiv ((\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G))$$

- entrée des **négations** le plus à l'intérieur possible :

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

- utilisation des **distributivités** de $\wedge$ et $\vee$ l'un par rapport à l'autre :

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$$

Exemple : mettre la formule $\neg(p \leftrightarrow (q \rightarrow r))$ sous formes normales disjonctive et conjonctive.

La formule est transformée par équivalences successives :

$$\neg((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((q \rightarrow r) \rightarrow p))$$

$$\neg((\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg(\neg q \vee r) \vee p))$$

$$(\neg(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee p))$$

$$((p \wedge \neg(\neg q \vee r)) \vee ((\neg q \vee r) \wedge \neg p))$$

$$((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r))$$

qui est une forme normale **disjonctive** ;

$$(((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \vee r)) \wedge ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p))$$

$$((p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r))$$

qui est une forme normale **conjonctive**.

Problème SAT : Etant donné une formule du langage propositionnel à n variables sous forme normale conjonctive, déterminer s'il existe une valuation la satisfaisant.

Ce problème est représentatif des problèmes de la classe de complexité **NP**, pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme efficace, c'est-à-dire en **temps polynomial**. Un tel algorithme pour le problème SAT permettrait de donner une réponse positive au problème **P=NP ?**, central en théorie de la complexité depuis les années 70. L'algorithme évident pour le problème SAT, qui consiste à examiner toutes les valuations possibles, est en **temps exponentiel**. Depuis plus de quarante ans, il existe une recherche très active dans le domaine des **SAT-solveurs**, qui ont donné lieu à de nombreuses méthodes de résolution de ce problème.