Théorie des Jeux
Algorithmes et Complexité

Richard Lassaigne
IMJ/Logique mathématique
CNRS-Université Paris Diderot

- En hommage à **John F. Nash**
  Importance des **équilibres** en théorie des jeux (1950)

- Intérêt pour les rapports entre théorie des jeux et informatique
  Conférences de **C. Papadimitriou** à STOC et ICALP 2001

- Développement d'une nouvelle direction de recherche :
  la théorie **algorithmique** des jeux

- Dans les quinze dernières années, une floraison de résultats
  sur le **calcul et l'approximation** des équilibres,
  ainsi que sur la **complexité** des algorithmes

- Economie (mécanismes de prix, enchères,...)
- Biologie (génétique, dynamique des populations)
- Politique (effet des règles électorales sur les stratégies)
- Trafic dans les réseaux (transport, Internet,...)
- Popularité croissante dans les grands systèmes informatiques distribués depuis les années 90

"Expérience de pensée pour aider à apprendre comment prédire un comportement rationnel en situation de conflits"

Definition (Roger Myerson, "Game Theory, Analysis of Conflicts")
"Game Theory can be defined as the study of mathematical models of conflict and cooperation between intelligent rational decision-makers. Game Theory provides general mathematical techniques for analysing situations in which two or more individuals make decisions that will influence one another's welfare"

- Optimisation simultanée de plusieurs fonctions d'utilité en compétition

- Chaque agent a une seule fonction d'utilité dont la valeur dépend non seulement de ses propres choix mais aussi de ceux des autres agents

Origine

J.V. Neumann

J.F. Nash

- Jeux à 2 joueurs à somme nulle
- Théorème du minimax (1928)
  (preuve par point fixe, non constructive)
- 2e preuve en 1940
  (dualité forte en programmation linéaire)
- "Theory of Games and Economic Behavior"
  Von Neumann et Morgenstern (1944)

- 1928 Naissance en Virginie
- 1948 Entre à Princeton

- 1949-1950 Thèse : "Equilibrium points in N-person games"
- 1951-1958 Carrière mathématique (MIT, Princeton,...)
  Théorèmes de plongement isométrique en géométrie
  Continuité de solutions d'équations aux dérivées partielles

- 1959 Attaque de schizophrénie paranoïde aigue
- 1970-1990 Lent retour à la normale

- 1994 Prix Nobel d'économie pour la théorie des jeux
- 2015 Prix Abel (avec L. Nirenberg).
  Décès accidentel au retour d'Oslo

- Le cadre général de la **théorie des jeux**

- Existence des **équilibres de Nash** ?

  Le **hasard** fait bien les choses

- Les équilibres de Nash sont-ils **calculables** ?

  De manière **efficace** ? Sinon peut-on les **approximer** ?

- Les jeux de **congestion** (réseaux)

  Existence de dynamiques efficaces d'**approximation**

- Mesure de l'**(in)efficacité** des équilibres de Nash

  Le prix de l'**anarchie**

Exemple 1 : Dilemme du prisonnier

Prisonnier A \ Prisonnier B	B collabore	B se tait
A collabore	(1,1)	(3,0)
A se tait	(0,3)	(2,2)

Equilibre de Nash :
aucun joueur n'a intérêt à modifier unilatéralement sa stratégie

Jeu fini (sous forme normale) :

- n joueurs, chacun ayant un ensemble fini d'actions
- n ensembles finis d'actions $S_i(i = 1, 2, \dots, n)$
- Fonctions d'utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

Equilibre de Nash (pur) :

$s^* = (s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ est un équilibre de Nash ssi

$$\forall i \forall s_i \quad u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$$

Dans une forme compacte :

$$\forall i \forall s_i \quad u_i(s_{-i}^*, s_i^*) \geq u_i(s_{-i}^*, s_i)$$

Exemple 2 : Bataille des sexes

Paul \ Virginie	Opéra	Foot
Opéra	(2,1)	(0,0)
Foot	(0,0)	(1,2)

2 **équilibres**

Exemple 3 : Pierre/Papier/Ciseaux

Joueur 1 \ Joueur 2	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Ciseaux	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Pas d'équilibre !

Stratégie mixte :

Une stratégie mixte $\sigma_{\mathbf{i}}$ pour un joueur i est une distribution de probabilités sur l'ensemble S_i des stratégies pures de i

Une stratégie mixte $\sigma_{\mathbf{i}}$ est notée : $\sigma_{\mathbf{i}} = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) s_i$

Les fonctions d'utilité sont étendues multilinéairement :

pour chaque i,

$$u_i(\sigma_{\mathbf{1}}, \dots, \sigma_{\mathbf{n}}) = \sum_s \sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n) u_i(s_1, \dots, s_n)$$

Equilibre de Nash (mixte) :

Profil $\sigma^* = (\sigma_{\mathbf{1}}{}^*, \dots, \sigma_{\mathbf{i}}{}^*, \dots, \sigma_{\mathbf{n}}{}^*)$ de stratégies mixtes t.q.

$$\forall i \forall \sigma_i \quad u_i(\sigma_{\mathbf{1}}{}^*, \dots, \sigma_{\mathbf{i}}^*, \dots, \sigma_{\mathbf{n}}{}^*) \geq u_i(\sigma_{\mathbf{1}}{}^*, \dots, \sigma_{\mathbf{i}}, \dots, \sigma_{\mathbf{n}}{}^*)$$

Théorème (J. Nash, 1950) :

Tout jeu fini à n personnes, non coopératif,

possède au moins un **équilibre en stratégies mixtes**

Jeu **non coopératif** : Chaque joueur prend ses décisions

de manière à (ne) maximiser (que) sa propre utilité

Pour tout joueur i et tout profil de stratégies mixtes σ,

$$u_i(\sigma) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

- Un profil de stratégies σ^* est un **équilibre de Nash** ssi
  aucun joueur n'a de déviation profitable en stratégie pure
  Tout équilibre de Nash en **stratégies pures**
  est un équilibre de Nash en **stratégies mixtes**

- σ^* est un **équilibre de Nash** en **stratégies mixtes** ssi

$$\forall i \forall s_i \in S_i \text{ t.q. } \sigma_i^*(s_i) > 0 \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = \max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$$

- A l'équilibre, chaque joueur est **indifférent** entre les actions
  qu'il joue avec probabilité **strictement positive**

- Pour trouver les équilibres en **stratégies mixtes**,
  il suffit de raisonner suivant le **support** de la stratégie

Exemple 2 : Bataille des sexes

Stratégie mixte σ_1 du joueur 1 :

- 1e ligne avec probabilité p
- 2e ligne avec probabilité $(1-p)$

Stratégie mixte σ_2 du joueur 2 :

- 1e colonne avec probabilité q
- 2e colonne avec probabilité $(1-q)$

A l'équilibre, on doit avoir : $2q = 1-q$ et $p = 2(1-p)$

1 équilibre (**stratégies mixtes**) : $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$

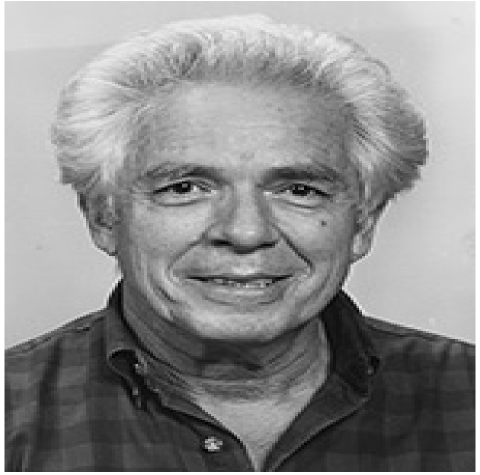
avec $\sigma_1^* = (2/3, 1/3)$ et $\sigma_2^* = (1/3, 2/3)$

Exemple 3 : Pierre/Papier/Ciseaux

1 équilibre (**stratégies mixtes**) : $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$

avec $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$

Christos Papadimitriou



Harold W. Kuhn

- **Equilibre de Nash** : concept central de théorie des jeux
- Peut-on **calculer** les équilibres de Nash ?
  de manière **efficace** ?
- 1er algorithme (H.W. Kuhn, 1954) : temps **exponentiel**
- Trouver un équilibre de Nash est un problème **difficile** (2009)
  (**PPAD-complet** : Daskalakis, Goldberg et Papadimitriou)

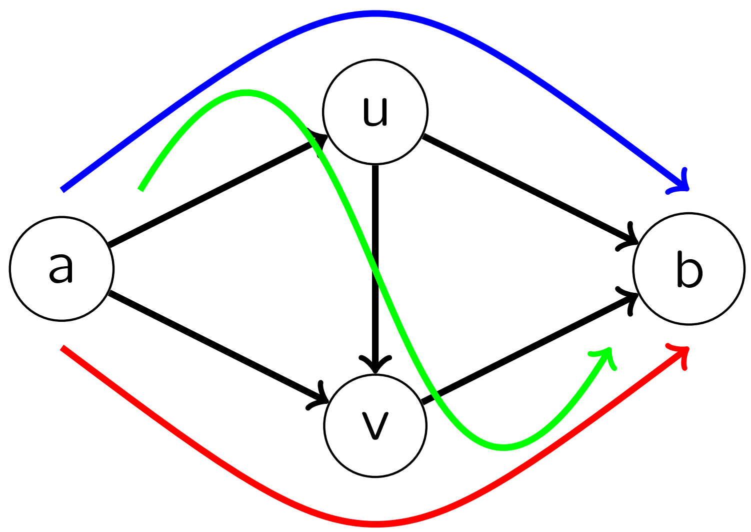
Exemple : jeu de congestion sur **réseau**

Graphe orienté $G = (V, E)$. Origine a, destination b, n joueurs

Stratégie s_i : chemin allant de a à b. Etat $s = (s_1, \ldots, s_n)$

Chaque arête $e \in E$ a une fonction de délai $d_e : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$

Coût du joueur i dans un état s : $c_i(s) = \sum_{e \in s_i} d_e(f_s(e))$ où $f_s(e)$ est le nombre de joueurs j utilisant l'arête e dans la stratégie s_j



- n joueurs, ensembles finis de stratégies $S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$
  Etat s : combinaison de stratégies $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$
  Fonctions de coût $c_i : S_1 \times \cdots \times S_n \longrightarrow \mathbb{N}$

- Les coûts des joueurs sont basés sur l'utilisation
  d'un ensemble E de ressources (arêtes) communes
  Une stratégie s_i pour le joueur i est un sous-ensemble de E
  Ensemble des stratégies S_i : sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$

- Chaque ressource $e \in E$ a une fonction de délai
  associée $d_e : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$
  Dans un état $s = (s_1, \ldots, s_n)$, le coût du joueur i est
  $c_i(s) = \sum_{e \in s_i} d_e(f_s(e))$ où $f_s(e)$ est le nombre de joueurs
  utilisant la ressource e dans l'état s

Tout jeu de congestion possède une fonction potentiel :

$$\Phi(s) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{f_s(e)} d_e(j)$$

Propriété : si le joueur i passe de la stratégie s_i à la stratégie s'_i, le changement dans Φ reflète exactement le changement dans le coût du joueur c.à.d. $\Phi(s) - \Phi(s') = c_i(s) - c_i(s')$

Dynamique de Nash : processus itératif où, à chaque étape, un joueur change de stratégie pour diminuer son coût

La fonction de potentiel Φ va décroître jusqu'à un minimum local, qui sera un équilibre de Nash pur, c.à.d. un état s t.q.

$$\forall i \forall s'_i \quad c_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \leq c_i(s_1, \ldots, s'_i, \ldots, s_n)$$

"The complexity of pure Nash equilibria" (C. Papadimitriou) :
Il existe des jeux de congestion (symétriques) dans lesquels le nombre de mouvements de joueurs nécessaire pour passer d'un état quelconque à un équilibre de Nash pur est exponentiellement grand

- Peut-on **approximer** un équilibre de Nash pur (PNE) en temps **polynomial** ?

- Equilibre **ε-Nash** : état dans lequel aucun joueur ne peut diminuer son coût de plus de ε (relativement), c.à.d. pour tout joueur i, pour toute stratégie $s_i' \in S_i$
$c_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) \geq (1-\varepsilon)c_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$

- **Dynamique** ε-Nash :
un joueur ne peut faire que des **ε-mouvements**, c.à.d. si le joueur i bouge de s_i à s_i', alors
$c_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) < (1-\varepsilon)c_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$

- Lorsque plus aucun ε-mouvement n'est possible, les joueurs ont atteint un équilibre **ε-Nash**

- Une ressource satisfait la condition de **saut borné** pour $\alpha > 1$ si sa fonction de délai d_e satisfait : $(\forall t \geq 1)\ d_e(t+1) \leq \alpha d_e(t)$
  Cette condition autorise des fonctions comme $d_e(t) = \alpha^t$

- Théorème (Chien et Sinclair, 2007) de **convergence rapide** :
  Pour tout jeu de congestion **symétrique** à n joueurs dans lequel les ressources satisfont la condition de **saut borné** pour α, la **dynamique ε-Nash** converge à partir de tout état initial en un nombre d'étapes $\lceil n\alpha\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{log}(nC)\rceil$
  où C est une borne supérieure sur le coût de tout joueur

- Lemme : Dans un tel jeu, si dans la dynamique ε-Nash à partir de l'état s, le mouvement suivant est fait par le joueur i, alors $c_j(s) \leq \alpha c_i(s)$ pour tout joueur j

Idée : à chaque mouvement d'un joueur i, le coût de ce joueur est au moins $1/\alpha$ le coût le plus grand de n'importe quel joueur

Puisque pour tout état s, $\Phi(s) \leq \sum_j c_j(s)$, alors $c_i(s) \geq \frac{1}{\alpha n}\Phi(s)$
Suivant le mouvement du joueur i de l'état s à l'état s',
la **décroissance** de la **fonction potentiel** est :

$$\Phi(s) - \Phi(s') = c_i(s) - c_i(s') > \varepsilon c_i(s) \geq \frac{\varepsilon}{\alpha n}\Phi(s)$$

A chaque mouvement, Φ doit décroître d'un facteur de plus de $\frac{\varepsilon}{\alpha n}$
Comme Φ est une fonction positive, il y a au plus $\lceil n\alpha\frac{1}{\varepsilon}\log(\Phi_{\max})\rceil$ étapes où $\Phi_{\max}$ est la valeur initiale de la fonction potentiel

- Dans les jeux de congestion **symétriques** à délai avec **saut α borné**, on peut atteindre un ε-équilibre dans un nombre **polynomial** d'étapes

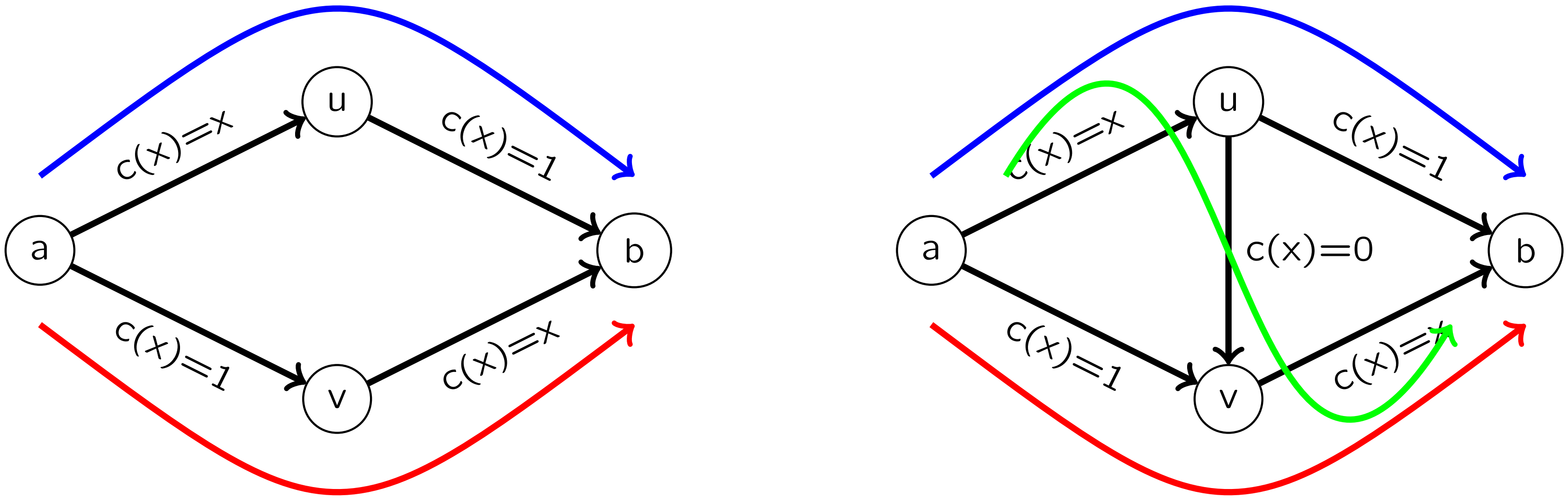
- La classe des jeux de congestion avec saut borné sur les ressources inclut des exemples pour lesquels il est **difficile** de trouver un équilibre **exact** : pour ces jeux, le chemin le plus court jusqu'à un équilibre exact dans la **dynamique** de **Nash** peut être de longueur exponentielle

- Le problème de trouver un équilibre de Nash **exact** dans les jeux de congestion symétriques satisfaisant la condition de saut borné avec $\alpha = 2$ est **PLS-complet**
  Classe PLS : problèmes de **recherche locale**

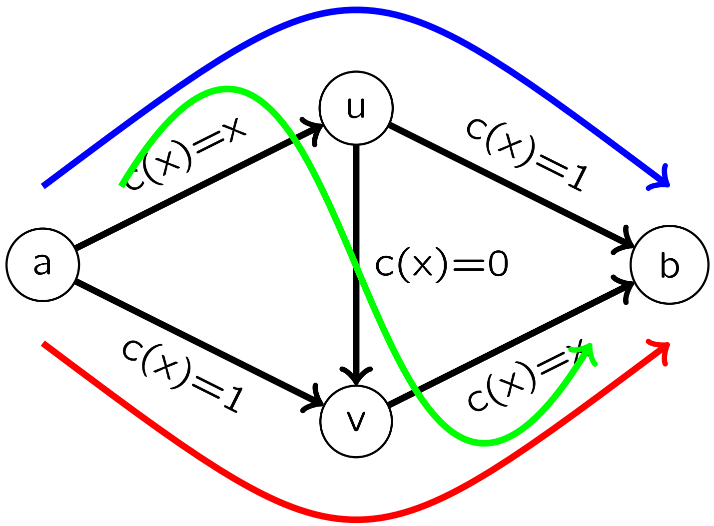
- Problème d'**optimisation** de performance dans les réseaux : étant donné le **taux** de trafic entre chaque paire de noeuds, déterminer une répartition du trafic sur les chemins **minimisant** la somme de tous les temps de trajet
- Il est souvent **difficile** ou même impossible d'imposer des stratégies de routage **optimales** ou presque optimales
  Les utilisateurs sont **libres** d'agir selon leur propre intérêt
  Conséquences de ce manque de régulation ?

- Modèle : agents **indépendants** dans un jeu **non coopératif**
  Chaque agent contrôle une partie négligeable du trafic total
  Dans un état stable, les chemins choisis forment un **équilibre de Nash** (n'optimisant pas l'intérêt général !)
  Comment mesurer cette (in)efficacité ?
- Mesure de la dégradation causée par une absence de régulation : **rapport** (au pire) entre l'intérêt obtenu par équilibre de Nash et un ensemble **optimal** de stratégies

La plupart des travaux sur ce modèle de trafic a été inspiré par un paradoxe découvert par D. Braess (1968)



L'**équilibre de Nash** (1er réseau) coïncide avec le **flot optimal** :
Le trafic se répartit à égalité sur chaque chemin
Chaque agent utilise un chemin de **coût** $3/2$



2e réseau : ajout d'une arête de délai 0

Le **flot optimal** n'est pas affecté par cet ajout

Equilibre de Nash : tout le trafic passe par la nouvelle arête

Chaque agent utilise un chemin de **coût** 2 !

- Mesure de l'**(in)efficacité** des équilibres de Nash :
  rapport entre le coût d'un agent à l'**équilibre**
  et le coût **minimum** possible en moyenne
  Le **prix de l'anarchie** dans un réseau de Braess est $4/3$

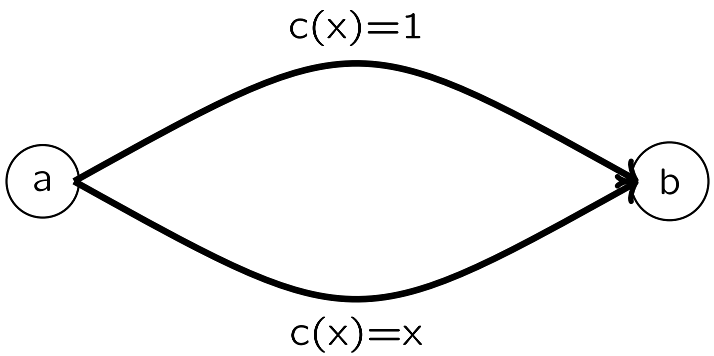
- Objectif : montrer que les réseaux de **congestion**
  avec des fonctions de coût **linéaires** ont un
  prix de l'anarchie **proche de** 1

- Modèle : graphe **orienté** $G = (V, E)$
  avec origine a et destination b
  r **unités** de trafic (flot) allant de a à b
  chaque arête e a une fonction de coût
  décrivant le délai de trajet (par unité de trafic)
  comme fonction de la **quantité** de trafic sur l'arête

- Soit $\mathcal{C}$ une classe de **fonctions de coût**

Exemple : la classe des fonctions affines (à coefficients positifs)

- Théorème (T. Roughgarden, E. Tardos, 2002) :
  Parmi les réseaux avec fonctions de coût dans la classe $\mathcal{C}$ le plus grand **prix de l'anarchie** est atteint dans un réseau du type **Pigou**



- Le principal responsable de l'inefficacité est la **non linéarité** des fonctions de coût, pas la **complexité structurelle** du réseau

- Pour $\mathcal{C}$ la classe des fonctions **affines**,
  le réseau du type Pigou **maximise** le prix de l'anarchie
  Dans ce cas, le prix de l'anarchie est toujours **au plus** $4/3$

- Pour $\mathcal{C}$ la classe des fonctions **polynomiales** de degré d,
  le cas le pire est un réseau du type Pigou **non linéaire**
  Dans ce cas, le prix de l'anarchie est de l'ordre de $\frac{d}{\ln d}$

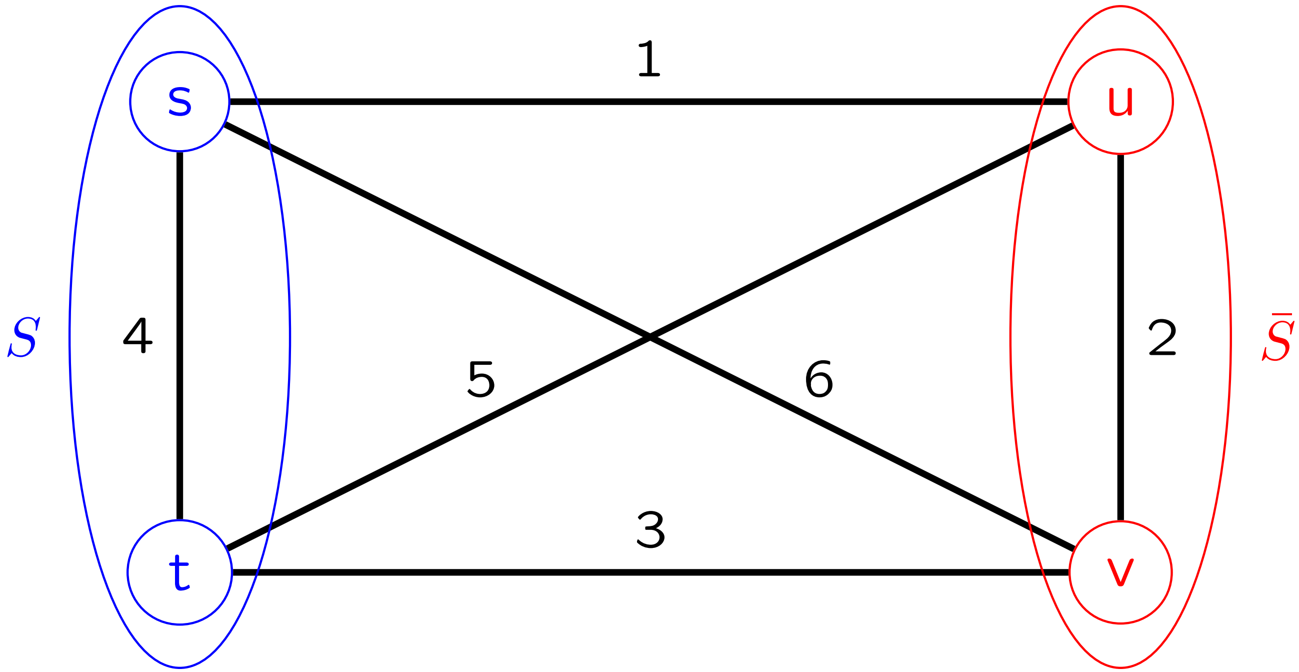
- "Designing Networks for Selfish Users is Hard"
  (Tim Roughgarden, 2004)
  Problème (détection du paradoxe de Braess) :
  étant donné un réseau, quelles arêtes devraient
  être **supprimées** pour obtenir un **flot optimal**
  comme **équilibre de Nash** ?

- Calculer un équilibre de Nash **pur** dans un jeu de congestion est équivalent à calculer un **minimum local** pour la fonction **potentiel** (W.R. Rosenthal, 1973)

- Classe de complexité PLS : problèmes de **recherche locale**
  Définie par Johnson, Papadimitriou et Yannakakis (1988)
  Exemple : problème de **coupure maximum** dans un graphe

- Problème **canonique** de recherche locale (Maxcut)
  Entrée : graphe non orienté $G = (V, E)$ avec
  un **poids** $w_e \geq 0$ sur chaque arête
  Sortie : *coupure* $(S, \bar{S})$ où $(S, \bar{S})$ est une partition de V
  maximisant le poids total des arêtes de coupure

Une instance du problème **Maxcut** avec un **optimum local**



Réduction d'un problème $L_1 \in PLS$ à un problème $L_2 \in PLS$:

2 algorithmes A et B en **temps polynomial** t.q.

- toute instance $x \in L_1$ correspond à une instance $A(x) \in L_2$
- l'algorithme B fait correspondre à tout **optimum local** de $A(x)$ un **optimum local** de x

Un problème $L \in PLS$ est **PLS-complet** si tout problème de PLS se réduit à L

- Le problème de calcul d'un **équilibre de Nash** dans un jeu de congestion est un problème de recherche locale : il y a correspondance entre les **dynamiques** de meilleure réponse et la recherche locale relativement à la **fonction potentiel**

- Le problème de calcul d'un **PNE** dans un jeu de congestion (symétrique) est **PLS-complet**.
  Idée : Bijection entre recherche locale pour **Maxcut**
  et les **dynamiques** de meilleure réponse dans les jeux

- Trouver un PNE exact dans les jeux est **très difficile**
  Les dynamiques peuvent nécessiter un nombre exponentiel d'itérations

- L'**approximation** d'un PNE converge **rapidement**
  pour les jeux de congestion symétriques avec saut borné

- L'**équilibre** est le concept central de la théorie des jeux
- Tout jeu **non coopératif** possède un équilibre de Nash en **stratégies mixtes**
- Les premiers algorithmes n'étaient pas efficaces, mais ce n'est pas très étonnant
- Les **jeux de congestion** ont suscité un intérêt croissant
  Ils possèdent toujours un équilibre de **Nash pur**,
  dont la recherche peut être extrêmement **difficile**
  Sous des hypothèses raisonnables, les dynamiques d'**approximation** convergent rapidement
- Le **prix de l'anarchie** permet de mesurer l'(in)efficacité des équilibres
  Pour les jeux de congestion usuels, il reste **proche de** 1

- Problème de la représentation **succincte** des jeux

- Qu'en est-il des jeux **coopératifs** (Lloyd S. Shapley, 1953) ?

- La conception de **mécanismes** (Vicrey, Myerson,...) :
  Etant donné un objectif (maximiser un intérêt social global)
  concevoir un jeu (stratégies et utilités) de telle manière que
  des joueurs individuels, motivés par leur intérêt propre,
  atteignent l'objectif considéré

- Etant donné un **équilibre** déterminer le **jeu associé**
  Exemple : le protocole de contrôle de congestion TCP/IP
  De quel jeu ce protocole est-il l'équilibre de Nash ?

- Motivation : "Optimization problems in congestion control"
  R. Karp, E. Koutsoupias, C. Papadimitriou, S. Shenker

- S. Chien and Alistair Sinclair. *Convergence to Approximate Nash Equilibria in Congestion Games*. Games and Economic Behavior, 71(2), p.315-327, 2011
- C. Daskalakis, P.W. Goldberg, and C.H. Papadimitriou. *The Complexity of Computing a Nash Equilibrium*. Communications of the ACM 52(2), p.89-97, 2009
- A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou, and K. Talwar. *The Complexity of Pure Nash Equilibria*. Proc. of the 36th ACM Symposium on Theory of Computing, p.604-612, 2004
- D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, and M. Yannakakis . *How easy is local search ?*. Journal of Computer and System Sciences, 37(1), p.79-100, 1988

- E. Koutsoupias and C.H. Papadimitriou. *Worst-case equilibria* Proc. of STACS, Lecture Notes in Computer Science vol. 1563, p.404-413, 1999

- J.F. Nash. *Equilibrium points in N-person games*. Proc. of the National Academy of Sciences, 36(1), p.48-49, 1950

- R.W. Rosenthal. *A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria*. International Journal of Game Theory, 2(1), p.65-67, 1973

- T. Roughgarden. *Algorithmic Game Theory. Lectures 11, 13 and 19*. Dept. of Computer Science, Stanford, 2016

- T. Roughgarden and Eva Tardos. *How Bad is Selfish Routing ?*. Journal of the ACM, 49(2), p.236-259, 2002