# Analyse vectorielle et intégrales multiples

Frédéric Le Roux et Frédéric Paugam

Module 2M256

Année universitaire 2016-2017

# Table des matières

# I Motivations

Nous commençons ce polycopié en motivant l'introduction des nouvelles notions mathématiques qui seront présentées en expliquant le rôle fondamental qu'elles vont jouer dans la modélisation de situations physiques.

## I.1 Quantités physiques et fonctions

Les quantités physiques peuvent être décrites par des fonctions à une ou plusieurs variables à valeurs réelles mais aussi vectorielles.

**Exemple 1.** *On donne maintenant quelques exemples de quantités physiques, illustrées par des dessins.*

1. *Une chute verticale libre est décrite par la fonction $h(t)$ décrivant la hauteur en fonction du temps.*
2. *La pression dans un tuyau d'air (flute) est décrite par la fonction $p(x)$ donnant la pression en fonction de la position $x$ dans le tube.*
3. *La température à la surface du globe est décrite par une fonction $T(\varphi, \theta)$ donnant la température en fonction de la position déterminée par la longitude $\varphi$ et la lattitude $\theta$.*
4. *La vitesse d'un fluide se déplaçant dans l'espace est décrite par un champ de vecteur $\overrightarrow{V}(x, y, z)$.*

## I.2 Lois de la physique et calcul différentiel

Depuis Newton (la pomme et la gravité), de nombreuses équations décrivant les lois de la physique (gravité, mécanique des fluides, électromagnétisme) sont décrites par des équations différentielles, dont l'objet est de prédire le comportement à long terme d'un objet à partir de son comportement infinitésimal (à très court terme). Un exemple important de ces lois est donné par

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la force et $\overrightarrow{a}$ l'accélération, qui est la dérivée seconde de la position par rapport au temps :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}.$$

Comme les quantités physiques font souvent intervenir des fonctions à valeurs vectorielles, il est nécéssaire de disposer d'un calcul différentiel adapté aussi bien aux quantités scalaires (fonctions à valeurs réelles) que vectorielles (fonctions à valeurs vectorielles).

## I.3 Utilisation des lois et calcul intégral

Pour utiliser les lois décrite par des équations différentielles, on a besoin de les résoudre. Il nous faut donc disposer d'un calcul d'intégrales fonctionnant aussi bien pour les quantités scalaires que vectorielles.

Remarquons aussi l'analogie entre différents types de quantités physiques : l'aire, la masse, le flux, la force de pression et la probabilité d'occurence d'un évènement se calculent tous par des intégrales.

## I.4 Invariance par rapport à l'observateur

Depuis Einstein, et tout au long du siècle dernier, un rôle très important à été joué dans la formulation et la découverte des lois de la physique par le principe "relativiste" suivant : "Les lois de la physique ne doivent pas dépendre de l'observateur". Une autre manière de formuler ce principe est de dire que "les lois de la physique doivent être formulées d'un point de vue qui est invariant par les symétries du système considéré".

En mécanique Newtonienne (par exemple la description du mouvement des astres du système solaire), la symétrie qui intervient est la symétrie linéaire donnée par les rotations de l'espace (transformations linéaires respectant les longueurs).

En mécanique de la relativité retreinte (petites échelles, par exemple, pour les particules), la symétrie est un analogue des rotations qui prend en compte la coordonnée temps : les transformations de Lorentz.

En mécanique de la relativité générale (très grandes échelles, par exemple, l'univers), la symétrie est donnée par les transformations arbitraires lisses (infiniment dérivables) des paramètres (coordonnées de l'espace temps).

Pour formuler les lois de la physique d'un point de vue ne dépendant pas du choix de l'observateur (ou du repère), on a donc besoin d'un calcul différentiel et intégral invariant par changement de coordonnées arbitraires. C'est le langage des formes différentielles.

## I.5 Formule fondamentale

Le lien entre le calcul différentiel et intégral est donné par la formule de Stokes

$$\oint_D d\omega = \oint_{\partial D} \omega.$$

Cette formule est une généralisation de la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral

$$\oint_{[a,b]} df := \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) =: \oint_{\{b+,a-\}} f.$$

## I.6 Nouveaux opérateurs et nouvelles intégrales

Les liens entre champs de vecteurs et formes différentielles vont permettre d'introduire des opérateurs induits par l'opérateur de différentiation des formes $d$ :

1. $f \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ mesure la variation de la fonction $f$ dans l'espace. Par exemple, si $V$ est le potentiel electrique, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ est le champ electrique.
2. $\overrightarrow{V} \mapsto \mathrm{div}(\overrightarrow{V})$ est une fonction qui mesure la contraction ou l'expansion d'un fluide dont le champ des vitesses est le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$. Un fluide dont le champ de vitesse est de divergence nulle est dit incompressible. La divergence est positive si le champ de vecteur "s'écarte du point" et négative si il "s'en rapproche".

3. $\overrightarrow{V} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V})$ est le champ qui dit a quel point le fluide tourne autour du point considéré. Par exemple, si on prend un rond de fumée, on obtient un champ circulaire, centre de l'axe de rotation de la fumée. On peut aussi penser au champ rotationnel du champ de vitesse du vent dans une tornade.

L'intégration des formes différentielles va aussi permettre d'introduire de nouvelles intégrales associées aux champs de vecteurs : le travail d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le long d'une courbe $C$, donné par l'intégrale curviligne de la 1-forme associée à $\overrightarrow{V}$, et le flux d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ à travers une surface $S$, donné par l'intégrale de la 2-forme associée à $\overrightarrow{V}$.

# II Fonctions d'une variable

(2-3 séances)

## II.1 Fonctions et graphes

**Définition.** Une fonction (partiellement définie) $f$ entre deux ensembles $X$ et $Y$ est la donnée d'un sous-ensembles $D_f \subset X$ (ensemble de définition) et pour chaque $x \in D_f$, d'un unique élément de $Y$, noté $f(x)$. Une fonction dont le domaine de définition $D_f$ est $X$ tout entier est appelée une application.

De manière équivalente, une fonction entre deux ensembles $X$ et $Y$ est la donnée d'un sous-ensemble $\Gamma_f \subset X \times Y$ (son graphe) dont la projection $\Gamma_f \to X$ est injective. L'image de cette projection est appelée son domaine de définition et notée $D_f$.

Concrètement, une fonction est souvent donnée par une formule, qui n'a un sens que si son argument est dans le domaine de définition. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/x$ est une fonction (partiellement définie) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. La fonction logarithme ln est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$.

Quand on fait de l'analyse, il peut être utile de s'autoriser à varier le domaine de définition. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, mais sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

## II.2 Limites, continuité

Nous allons maintenant nous restreindre aux fonctions d'une variable réelle.

**Définition.** *Une fonction $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ admet une limite en un point $x_0 \in ]a, b[$ si il existe un nombre réel $\ell$, qu'on notera aussi $\lim_{x \to x_0} f(x)$, vérifiant que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - \ell| - \epsilon$.*

L'expression ci-dessus signifie en français que pour que $f(x)$ soit proche de $\ell$ à $\epsilon$ près, il suffit que $x$ soit proche de $x_0$ à $\eta$ près.

Par exemple, la limite en 0 de la fonction id : $x \mapsto x$ est 0, mais la fonction $x \mapsto 1/x$ n'a pas de limite en 0.

**Proposition 1.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions et si leurs limites existent en $x_0$, on a*

1. $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.
2. $\lim_{x \to x_0} (f.g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$.
3. *Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *on a*
$$\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x).$$

**Définition.** *Une fonction $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ est dite continue en $x_0 \in ]a, b[$ si sa limite en $x_0$ existe et si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

D'un point de vue géométrique, une fonction $f$ (qui est, rappelons-le, donnée par un graphe $\Gamma_f \subset ]a,b[\times\mathbb{R})$ n'est pas continue en $x_0$ si, moralement, son graphe ne peut être tracé sans lever le crayon. Par exemple, la fonction qui vaut $-1$ pour $x < 0$ et $1$ pour $x \geq 0$ n'est pas continue.

**Proposition 2.** *Les sommes, produits et quotients de dénominateur ne s'annulant pas de fonctions continues sont continus.*

**Exemple 2.**

1. *La fonction constante $x \mapsto c$ (pour $c$ fixé) est continue.*
2. *La fonction $x \mapsto ax$ est une fonction linéaire (pour $a$ fixé) définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Les fonctions polynomiales (sommes et produits arbitraires des deux exemples précédents)*
$$x \mapsto P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$
*sont continues sur $\mathbb{R}$.*
4. *Les fractions rationnelles $F = P/Q$ (avec $P$ et $Q$ des polynômes) sont continues en dehors des points où elles ont des pôles (points où $Q$ s'annule).*
5. *Plus généralement, les fonctions analytiques (localement sommes de séries) comme*
$$x \mapsto e^x := \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$
*ou les fonctions trigonométriques*
$$x \mapsto \sin(x) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \cos(x) := \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$
*(ces formules sont obtenues en appliquant la relation $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$) sont continues.*
6. *Plus généralement, les quotients de fonctions analytiques, comme $\tan(x)$, sont continues sur leur domaine de définition (en dehors des points ou le dénominateur s'annule).*

## II.3 Calcul différentiel

### (a) Dérivée, DL à l'ordre 1

On considère une fonction $f$ définie au moins sur un intervalle $]a,b[$. Soit $x$ un nombre dans $]a,b[$.

**Définition.** *On dit que $f$ est dérivable en $x$ s'il existe un nombre, noté $f'(x)$, tel qu'on puisse écrire*
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$
*où $o(h)$ est une quantité négligeable devant $h$, ce qui signifie qu'il existe une fonction $\epsilon(h)$ tendant vers $0$ quand $h$ tend vers $0$ telle que $o(h) = h\epsilon(h)$.*

Cette écriture est alors appelée DL à l'ordre 1. Elle n'est utile que lorsque $h$ tend vers 0 ("infiniment petit" ou "quantité évanescente").

Une manière équivalente de définir la dérivée est la suivante.

**Définition.** *Une fonction $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in ]a, b[$ si la limite de l'expression $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe quand $h$ tend vers $0$. Cette limite est notée $f'(x_0)$ et appelée la dérivée de $f$ en $x_0$.*

**Proposition 3.** *Les dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composition sont données par les formules :*

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2. $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ *si* $g(x_0) \neq 0$,
5. $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

*Démonstration.* Le résultat à propos de la somme et de la multiplication par un scalaire découle de la définition de la dérivée. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} f(x_0) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} f(x_0) \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

La démonstration pour le quotient est donnée par une manipulation similaire. Donnons la démonstration pour la composée de deux fonctions. Posons $k(h) = g(x_0+h)-g(x_0)$. On a $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k} \cdot \frac{k}{h} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{k(h)}{h} \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

□

**Exemple 3.**
1. *On a* $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\ln x)' = 1/x$.
2. *On a* $(e^x)' = e^x$. *Si* $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$ *pour* $x > 0$, *on a* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

On peut définir la dérivée seconde d'une fonction $f$ en $x_0$, notée $f''(x_0)$ comme la dérivée de la dérivée. On fait de même pour les dérivées d'ordres supérieurs.

**Exemple 4.** *Les fonctions de l'exemple 2 sont toutes infiniment continuement dérivables (dérivables à tout les ordres ; on dit aussi lisses) sur leur domaine de définition.*

### (b) Différentielles de Leibniz

**Définition.** *Notons $dx$ à la place de $h$ (ce qui nous rappelle qu'on y pense comme un "petit accroissement de $x$"). L'égalité donnant le développement limité à l'ordre 1 devient*

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + \cdots$$

*On notera $df = f'(x)dx$. Ceci définit $df$ comme une fonction des deux variables $x$ et $dx$, qui est linéaire en $dx$, et qu'on appelle* différentielle de $f$.

Pour se préparer aux notations de la suite du cours, nous allons tout de suite parler du formalisme des formes différentielles, sous-jacent à la manipulation des différentielles de Leibniz, même si celles ci peuvent être vues comme une simple notation très pratique pour les calculs.

**Définition.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$ un domaine. Une fonction*

$$\omega(x, dx) = g(x)dx$$

*de $x \in D$ et de $dx \in \mathbb{R}$ qui est linéaire en $dx$ est appelée une 1-forme différentielle sur $D$. L'ensemble des 1-formes différentielles sur le domaine $D$ est noté $\Omega^1(D)$ et l'ensemble des fonctions (infiniment) dérivables sur $D$ est aussi appelé l'ensemble des 0-formes différentielles et noté $\Omega^0(D)$.*

La différentielle des fonctions est l'application

$$\begin{array}{rccc} d: & \Omega^0(D) & \to & \Omega^1(D) \\ & f(x) & \mapsto & df(x, dx) = f'(x)dx \end{array}$$

qui envoie une fonction $f$ sur la 1-forme différentielle différentielle $df = f'(x)dx$.

Les fonctions peuvent être additionnées et multipliées (car le produit de deux fonctions dérivables est dérivable). On peut aussi multiplier une 1-forme $\omega(x, dx) = g(x)dx$ par une fonction $f(x)$ (à gauche ou à droite) en posant simplement

$$(\omega f)(x, dx) = (f\omega)(x, dx) := f(x)g(x)dx.$$

La multiplication des 1-formes est appelée produit extérieur et notée par le signe $\wedge$ pour bien la différencier de la multiplication des fonctions. En effet, elle donne toujours zéro quand on a une seul variable $x$ :

$$f(x)dx \wedge g(x)dx = f(x)g(x)dx \wedge dx = 0.$$

Nous verrons plus loins une explication de ce phénomène étrange.

#### Règles de calcul sur les différentielles

1. (différentielle et dérivée) $df = f'(x)dx$ (en particulier, $d(1) = 0$),
2. (somme) $d(f+g) = df + dg$,
3. (produit par un scalaire) $d(\lambda f) = \lambda df$,

4. (produit) $d(fg) = fdg + gdf$,
5. (principe de substitution) : si $\omega = g(x)dx$ est une 1-forme, on peut réinterpréter $x$ comme une fonction de $t$ pour définir une 1-forme $x^*\omega$ dépendant de $t$, donnée par

$$x^*\omega = g(x(t))d(x(t)) = g(x(t))x'(t)dt.$$

   On a alors l'égalité $x^*(df) = d(f(x(t)))$, qui correspond au théorème de dérivation des fonctions composées

$$d(f(x(t))) = f'(x(t))x'(t)dt = f(x(t))'dt.$$

**Exemple 5.** *$d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$ (règle 3). On obtient de la même façon l'égalité*

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx,$$

*et donc les différentielles de tous les polynomes.* [1]

---

**Exercice 1.—** (à faire en cours) Calculer de même $dx^3$ en utilisant uniquement la règle 3.

---

**Exemple 6.** *On peut trouver la différentielle de la fonction $1/u$ en dérivant la relation $1/u \cdot u = 1$ et en utilisant la formule pour la différentielle d'un produit : on a*

$$0 = d(1) = d(1/u \cdot u) = d(1/u)u + (1/u)du$$

*donc*

$$d(1/u) = -\frac{du}{u^2},$$

*soit par remplacement*

$$d(1/u(x)) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}dx.$$

**Exemple 7.** *Calculons la différentielle de $u/v$ en dérivant la relation $u = (u/v).v$. On obtient*

$$du = d((u/v).v) = vd(u/v) + (u/v)dv$$

*ce qui implique*

$$vd(u/v) = du - (u/v)dv$$

*donc*

$$d(u/v) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

*soit par remplacement*

$$d(u(x)/v(x)) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}dx.$$

1. Remarquer que la différentielle de la fonction $x$ est $dx$ (heureux pour la cohérence de la notation).

**Exemple 8.** *En utilisant la définition de l'exponentielle* $e^x := \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *en termes de série (on admet que la dérivation commute aux séries normalement convergentes), et la relation* $d(x^n) = nx^{n-1}dx$*, on obtient*

$$d(e^x) = \sum_{n\geq 0} \frac{d(x^n)}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{nx^{n-1}dx}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}dx}{(n-1)!} = e^x.$$

*On retrouve aussi ainsi les dérivées des fonctions* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$*.*

---

**Exercice 2.—** (à faire en cours) Calculer de même la dérivée de $e^u$ où $u$ est une fonction de $x$.

---

**Exemple 9.** *Le logarithme* $\ln(x)$ *est défini comme une fonction inverse à l'exponentielle. On a en particulier* $x = e^{\ln(x)}$*. En différenciant cette relation, on obtient*

$$dx = d(e^{\ln(x)}) = e^{\ln(x)}d(\ln(x)) = xd(\ln(x))$$

*donc*

$$d(\ln(x)) = \frac{dx}{x}.$$

---

**Exercice 3.—** Calculer de même la dérivée de $\ln(u(x))$, celle de $a^x = e^{x\ln(a)}$, celle de $x^\alpha$.

---

**Exemple 10.** *La fonction racine carrée* $\sqrt{x}$ *est définie comme l'inverse de la fonction carré* $u^2$*. On sait en particulier que* $x = (\sqrt{x})^2$*. En différenciant cette relation, on obtient*

$$dx = 2\sqrt{x}d(\sqrt{x})$$

*donc*

$$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

---

**Exercice 4.—** Calculer de même les dérivées de $\sqrt{x^2+a^2}$, $e^{-x^2}$, $x^x$.

---

**Exercice 5.—** Excursion en deux variables... Calculer la différentielle de $x^y$, où $x$ et $y$ sont variables. Retrouver les dérivées de $a^x$, $x^\alpha$, $x^x$.

---

**Justification mathématiques des règles** L'addition et la multiplication viennent directement des règles correspondantes pour la dérivée. La substitution vient de la règle de dérivation d'une composée :

$$d(f(g(x)) = (fg)'(x)dx = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))dg$$

qui est bien l'expression de la différentielle $df$ dans laquelle on a subtitué $g(x)$ à $x$. [2]

2. Justification intuitive des règles : l'addition est presque évidente, la multiplication en interprétant $d(f(x)g(x))$ comme l'accroissement de l'aire d'une rectangle à l'ordre 1.

### (c) Différentielle et dérivée

Le calcul sur les différentielles est complètement équivalent au calcul sur les dérivées ; il est plutôt plus facile à utiliser, parce que la formule de dérivation composée est “codée dans le formalisme”. La règle 1 dit qu'on passe très facilement de la différentielle de $f$ à sa dérivée et réciproquement : d'ailleurs c'est à cause de cette relation que la dérivée se note parfois $df/dx$. Mais il ne faut pas les confondre, ça conduirait à des calculs incohérents. **Les règles de calcul sur les différentielles de Leibniz sont équivalentes aux règles de dérivation des fonctions ; en pratique, pour les calculs, on utilisera les unes ou les autres, au choix.**

### (d) Interprétation géométrique

Considérons l'écriture $d(x^3) = 3x^2dx$. Fixons une valeur de $x$. Alors cette écriture peut s'interpréter comme l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^3$, dans un système de coordonnées centrées sur le point choisi. En effet, le coefficient de $dx$ dans l'expression de la différentielle $df$ est $f'(x)$ qui est le coefficient directeur de la tangente.

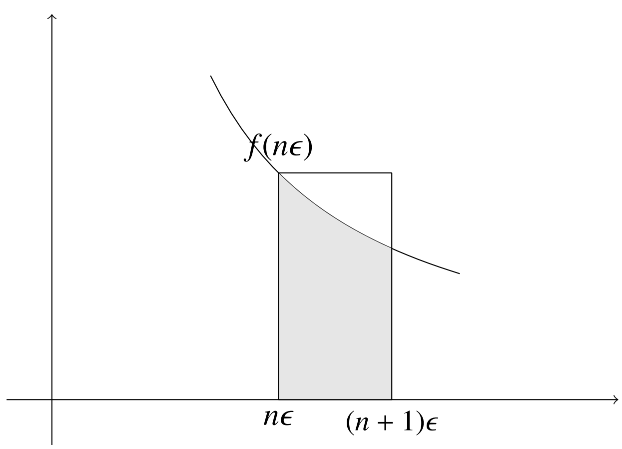
## II.4 Primitives, intégrales

### (a) Introduction

Intégrer, c'est ajouter une infinité de morceaux infiniment petits. L'intégrale d'une fonction à une variable $f(x)$ de domain de définition $D_f$ doit être définie comme la surface (orientée) sous son graphe. Pour donner un sens mathématique à cette définition, on recouvre $\mathbb{R}$ par les intervalles de longueur $\epsilon > 0$ donnés par

$$P_{n,\epsilon} = [n\epsilon, (n+1)\epsilon]$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, et on approche l'aire sous le graphe par la somme des aires de petits rectangles de base $[n\epsilon, (n+1)\epsilon]$ (de longueur $\epsilon$) et dont le sommet de gauche est $f(n\epsilon)$ :




On peut donc approcher l'aire sous le graphe par la somme

$$I_\epsilon = \sum_{n\in\mathbb{Z},\ P_{n,\epsilon}\subset D_f} \epsilon f(n\epsilon).$$

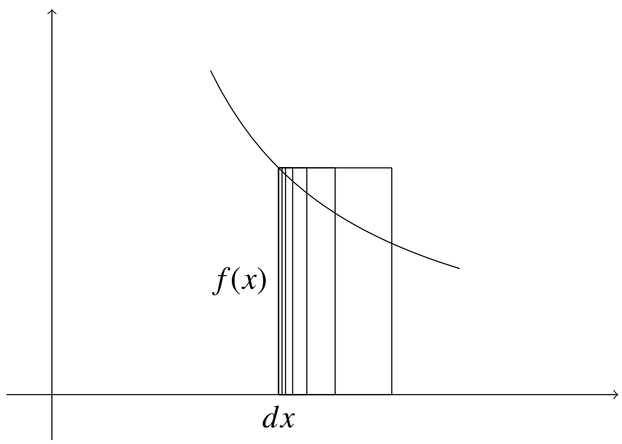
**Définition.** *L'intégrale de $f$ sur $D_f$ est donnée, si elle existe, par la limite*

$$\int_{D_f} f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon.$$

On remarque que la notation pour l'intégrale fait intervenir l'expression $f(x)dx$, qui est aussi la notation pour une 1-forme différentielle

$$\omega(x, dx) = f(x)dx \in \Omega^1(D),$$

dont la variable $dx$ représente la variable $\epsilon$ tendant vers 0 et le produit $f(x)dx$ représente l'aire d'un rectangle dont la base est de longueur "infinitésimale" (i.e., tendant vers 0) $dx$ et de hauteur $f(x)$ :




L'intégrale représente moralement la somme des aires de tous ces rectangles infinitésimaux, pour $x$ variant dans le domaine d'intégration.

**Théorème 1** (de Riemann)**.** *Si $D_f = [a, b]$ et $f$ est continue sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe.*

**Masse et centre de gravité** Supposons maintenant que $f$ représente la densité de masse par unité de longueur, le long d'un barreau situé entre les abscisses $a$ et $b$. Un petit morceau de barreau de longueur $dx$ situé à l'absisse $x$ a donc une masse égale à $f(x)dx$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est alors égale à la masse totale $M$ du barreau.

Dans ce modèle, comment calculer la position du centre de gravité ?

Rappelons que la position du centre de gravité de masses ponctuelles $m_1, ...m_n$ est donnée par la moyenne des coordonnées, pondérée par les masses :

$$x_G = \frac{1}{m_1 + \cdots + m_n}(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n).$$

Pour définir la position du centre de gravité du barreau, on approche, là encore, la distribution de masse continue du barreau par une distribution discrète constituée des $n$ masses ponctuelles $\Delta x f(x_k)$. L'abscisse du centre de gravité des $n$ masses est alors

$$\frac{1}{M}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k).$$

D'après le théorème précédent, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ cette somme converge vers $\frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx$.

---

**Exercice 6.—** Faire le calcul pour un barreau situé entre $x = 0$ et $x = 1$ avec une densité de masse donnée par $\rho(x) = x$.

---

### (b) Intégrale et primitives

La définition de l'intégrale que nous avons donné dans la section précédente est très générale mais peu adaptée au calcul. Nous allons maintenant voir comment calculer concrètement des intégrales, en utilisant le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

**Définition.** *Soit $f$ une fonction sur un intervalle $]a,b[$. On appelle primitive de $f$ toute fonction dérivable $F$ sur $]a,b[$ telle que*

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in ]a,b[.$$

Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur $]a,b[$, la différence $F - G$ est une fonction constante.

**Exemple 11.** *La fonction* $\sin x$ *est une primitive de* $\cos x$ *sur* $\mathbb{R}$ *car* $(\sin x)' = \cos x$*. Les primitives de* $\cos x$ *sont* $\sin x + c$ *où $c$ est une constante. Les primitives de* $\sin x$ *sont* $-\cos x + c$ *; les primitives de $e^x$ sont $e^x + c$ ; celles de $x^n$ sont $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour $n \geq 0$ ; Les primitives de $\frac{1}{x}$ sont* $\ln|x| + c_1$ *sur* $]0,+\infty[$ *ou* $\ln|x| + c_2$ *sur* $]-\infty,0[$.

**Théorème 2** (fondamental du calcul différentiel et intégral)**.** *Si $F$ est une primitive quelconque de $f$, i.e.,*

$$F' = f$$

*alors*

$$\int_a^b dF = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Théorème 3.** *Si $f$ est continue, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de $f$ (dessin).*

**Exemple 12.** *La distance parcourue est une primitive de la vitesse. Dans une voiture, on a deux cadrans, un pour la vitesse et l'autre pour une primitive.*

### (c) Propriétés

**Proposition 4.** *L'intégrale est une opération linéaire en les fonctions : on a*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)$$

*et*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \text{ pour toute constante } \lambda.$$

*L'intégrale est monotone (elle respecte les inégalités) :*

$$\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in [a,b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

*L'intégrale est compatible aux découpages du domaine d'intégration (relation de Chasles) : si on définit par convention $\int_b^a f(t)dt := -\int_a^b f(t)dt$, on a*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

En intégrant les formules de dérivation d'un produit et d'une composée, on obtient deux règles de calcul de primitives.

### (d) Intégration par parties

**Proposition 5.** *Pour $u$ et $v$ dérivables de dérivées continues, on a*

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu,$$

*ou de manière équivalente,*

$$\int_a^b (uv')(x)dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)dx.$$

*Démonstration.* La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral appliquée à $F = uv$ nous donne

$$[uv]_a^b = (uv)(b) - (uv)(a) = \int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

donc

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int vdu.$$

□

On utilise l'intégration par parties quand $vdu$ est "plus simple" que $udv$, comme on va le voir dans l'exemple suivant.

**Exemple 13.** *Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. On a $du = dx$ et $dv = e^x dx$. On a*

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 xe^x dx & = & \int_0^1 udv = [uv]_0^1 - \int_0^1 vdu \\ & = & [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \text{ car } e^x \text{ est une primitive de } e^x \\ & = & (1ep1 - 0e^0) - (e^1 - e^0) = (e - 0) - (e - 1) = 1. \end{array}$$

### (e) Changement de variables

Si $\varphi$ est une fonction dérivable, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\varphi)d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Un moyen simple d'exprimer la même règle de calcul est de dire que la valeur de l'intégrale ne change pas lorsque qu'on ré-interprète $x$ comme une fonction, ou encore que *la notation* $\int f(x)dx$ *de l'intégrale est compatible avec le formalisme des différentielles de Leibniz.*

**Exemple 14.** *Pour calculer* $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ *on pose* $u(t) = \sin(t)$*, on écrit* $du = u'(t)dt = \cos(t)dt$*, ce qui nous dit par quoi il faut remplacer le du dans la formule. On obtient donc*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1+\cos(2t)}{2}dt = \tfrac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

*Rappel :* Les formules suivantes seront utiles dans les calculs d'intégrales :

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}, \qquad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}, \qquad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

**Exemple 15.** *Pour calculer* $\int_1^e \frac{(\ln t)^2}{u}du$*, on pose* $u(t) = e^t$*, donc* $du = e^t dt$*, ce qui donne*

$$\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u}du = \int_0^1 \frac{t^2e^t}{e^t}dt = \int_0^1 t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

### (f) Aire sous un graphe et aires dans le plan

On utilise maintenant les intégrales de fonctions à une variable pour calculer des aires.

**Aire d'une arche de sinusoïde.** Considérons le graphe de la fonction $y = \sin x$ pour $x$ entre 0 et $\pi$. Cette fonction est positive sur cet interval. Calculons l'aire de la surface limitée par le graphe de cette fonction et l'axe $Ox$. Cette aire a pour valeur

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$$

car $-\cos x$ est une primitive de $\sin x$.

**Aire d'une ellipse.** Considérons la surface bordée par la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

où $a$ et $b$ sont strictement positifs. C'est une ellipse. La demie-ellipse supérieure est limitée par l'axe $Ox$ et le graphe de la fonction positive

$$y = f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

qui est définie sur $[-a, a]$. Donc la surface de l'ellipse est donnée par

$$S = 2\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

On effectue le changement de variables

$$x = a\cos t \;\; y = b\sin t \; ; t \in [0, \pi].$$

Il est clair que si $t = \pi$, on a $x = -a$ et si $t = 0$, on a $x = a$. Donc

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)d(a\cos t) = 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt \\ &= -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt = ab\int_{0}^{\pi} 2\sin^2 t dt \\ &= ab\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)dt = ab\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Pour $a = b = r$, on obtient que l'aire d'un disque de rayon $r$ est $\pi r^2$.

**Rappel.** $2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$.

### (g) Bonus : intégrale et probabilités

Mon RER est censé arriver à la station Saint-Michel à 8h05. En pratique, il arrive parfois à 8h07, parfois plus tôt ou plus tard, en gros entre 8h00 et 8h10. En notant chaque jour, pendant une longue période, les heures réelles d'arrivée, on observe un certain nombre de trains arrivés entre 8h00 et 8h01, un autre nombre entre 8h01 et 8h02, etc. On peut modéliser ceci par une certaine fonction $f$ appelée densité de probabilité, en disant que la probabilité qu'un train arrive entre $xh$ et $(x + dx)h$ est donnée par $f(x)dx$. La probabilité que mon RER arrive entre les temps $t_0$ et $t_1$ est alors données par

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt.$$

En pratique (et on peut le justifier théoriquement) il arrive souvent que la densité de probabilité suive une courbe de Gauss, autrement dit que

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_M}{\sigma}\right)^2}$$

où $t_M$ est l'heure moyenne d'arrivée, et $\sigma$ l'écart-type.

## II.5 Courbes paramétrées

Dans ce cours, nous utiliserons deux manières de définir des courbes : l'une par les équations, l'autre par les paramétrisations. Le lien entre ces deux approches est donnée par le théorème des fonctions implicites, que nous verrons plus loin.

Par exemple, le cercle $S^1$ peut être défini par l'équation

$$S^1 = \{(x, y),\; x^2 + y^2 = 1\},$$

qu'on peut voir en physique comme le système de contraintes imposé au mouvement d'un objet qui est attaché à un axe fixe à l'aide d'une barre métallique rigide de longueur 1.

D'autre part, le cercle $S^1$ peut aussi être défini comme l'image de la paramétrisation

$$M(t) = (\cos t, \sin t) \text{ pour } t \in [0, 2\pi],$$

qu'on peut voir en physique comme le mouvement d'un mobile donné par ses coordonnées en fonction du temps.

Remarquons que cette paramétrisation n'est pas la première qui saute aux yeux quand on regarde le cercle défini par son équation. Il est ainsi plus naturel (car généralisable) de paramétrer le cercle en résolvant (localement) l'équation $x^2+y^2 = 1$ en fonction d'une des deux variables, pour décrire, par exemple, le demi-cercle supérieur par la paramétrisation

$$M(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$

pour $x \in [-1, 1]$. Ce type de paramétrisation des solutions d'une equation existe toujours localement dans des situations très générales, grâce au théorème des fonctions implicite, qui donne un lien entre paramétrisations (mouvement d'un mobile en physique) et équations (contraintes sur le mouvement).

Revenons maintenant au point de vue paramétré.

### (a) Définition, exemples

**Définition.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une courbe du plan de paramètres dans $I$ est une fonction*

$$\begin{array}{rccc} M: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

*De même, une courbe paramétrée de l'espace de paramètres dans $I$ est une fonction*

$$\begin{array}{rccc} M: & I & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

**Exemple 16.** *La courbe définie par les fonctions $x(t) = a_1 t + b_1$ et $y(t) = a_2 t + b_2$ avec $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ et $t \in \mathbb{R}$ est une droite dans le plan. Si $a_1 = 0$, c'est la droite verticale $x = b_1$, et si $a_2 = 0$, c'est la droite horizontale $y = b_2$.*

**Exemple 17.** *On peut paramétrer une même courbe $C$ de plusieurs manières différentes. Par exemple, la droite $y = x$ peut être paramétrée par*

$$x(t) = t, \qquad y(t) = t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

*mais aussi par*

$$x(t) = 2t, \qquad y(t) = 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 18.** *La courbe définie par $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$ pour $t \in [0, 2\pi]$ est le cercle de centre $0$ et de rayon $1$.*

**Exemple 19.** *La courbe définie par $x(t) = \cos \ln t$ et $y(t) = \sin \ln t$ pour $t \in [1, e^{2\pi}]$ décrit le même cercle, mais avec une vitesse différente.*

**Exemple 20.** *Le mouvement d'un mobile dans le plan peut être modélisé par une courbe paramétrée du plan.*

### (b) Vecteur vitesse et droite tangente

**Définition.** *Le vecteur vitesse d'une courbe $M(t) = (x(t), y(t))$ du plan (ou d'une courbe $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de l'espace) est le vecteur des dérivées $\overrightarrow{V}(t) = (x'(t), y'(t))$ (ou $\overrightarrow{V}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$) de ses coordonnées par rapport à la variable t des paramètres. Le vecteur accélération est le vecteur vitesse du vecteur vitesse, c'est à dire le vecteur des dérivées secondes des coordonnées de la courbe par rapport au paramètre.*

**Définition.** *Un point d'une courbe paramétrée C est dit stationnaire si le vecteur vitesse de la courbe s'annule en ce point. Il est dit ordinaire sinon. Un paramétrage (resp. une courbe paramétrée) dont tous les points sont ordinaires est dit régulier (resp. régulière). Si $M_0 = M(t_0)$ est un point ordinaire d'une courbe paramétrée, la droite paramétrée par*

$$T(t) = M(t_0) + t \cdot \overrightarrow{V}(t_0)$$

*est appelée tangente de la courbe C en le point $M(t_0)$. Plus précisément, si $M_0 := M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est un point ordinaire d'une courbe paramétrée dans le plan, la droite tangente à la courbe en $M_0$ est paramétrée par*

$$x_T(t) = x(t_0) + x'(t_0)t \qquad y_T(t) = y(t_0) + y'(t_0)t.$$

*De même, si $M_0 := M(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est un point ordinaire d'une courbe paramétrée dans l'espace, la droite tangente à la courbe en $M_0$ est la droite paramétrée par*

$$x_T(t) = x(t_0) + x'(t_0)t \qquad y_T(t) = y(t_0) + y'(t_0)t \qquad z_T(t) = z(t_0) + z'(t_0)t.$$

**Exemple 21.** *Le cercle unité C paramétré par*

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = \sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

*a pour tangente en $M_0 = M(\pi/4) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ la droite tangente définie par*

$$x_T(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y_T(t) = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

*soit*

$$x + y = \sqrt{2}.$$

### (c) Longueur

**Définition.** *La longueur d'une courbe paramétrée C est l'intégrale de la longueur de son vecteur vitesse*

$$\text{longueur}(C) := \int_a^b \|\overrightarrow{V}(t)\| dt.$$

*Dans le cas d'une courbe $M(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ du plan, ceci donne*

$$\text{longueur}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

*Dans le cas d'une courbe $M(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de l'espace, ceci donne*

$$\text{longueur}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

**Proposition 6.** *La longueur d'une courbe régulière ne dépend pas du paramétrage.*

*Démonstration.* Ceci découle de la formule de changement de variable dans l'intégrale : si $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont deux paramétrages réguliers, on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ de dérivée strictement positive. On a alors (par exemple en dimension 2)

$$\begin{aligned}
\int_c^d \sqrt{(x_1'(u))^2 + (y_1'(u))^2} du &= \int_a^b \sqrt{(x_1'(\Phi(t)))^2 + (y_1'(\Phi(t)))^2} \Phi'(t) dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(x_1'(\Phi(t))\Phi'(t)^2 + (y_1'(\Phi(t))\Phi'(t))^2} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(x_2'(t))^2 + (y_2'(t))^2} dt.
\end{aligned}$$

□

**Exemple 22.** *Le cercle paramétré $C(t) = (\cos t, \sin t)$ est de longueur*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2\pi.$$

**Exemple 23.** *Calculer la longueur du segment passant par le point $M(0) = (x_0, y_0)$ et de vecteur vitesse $(u, v)$, dont la paramétrisation est donnée par*

$$M(t) = (x_0, y_0) + t \cdot (u, v).$$

### (d) Exemple d'étude complète d'une courbe paramétrée

Nous allons étudier et tracer la courbe paramétrée

$$M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\cos t, \sin \frac{t}{3}\right).$$

**Période :** Les fonctions $x$ et $y$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Or $\cos t$ est de période $2\pi$ et $\sin(t/3)$ est de période $6\pi$, donc $M(t)$ est de période $6\pi$, i.e.,

$$M(t + 6\pi) = M(t).$$

**Symétries et parité des coordonnées :** On se place sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. L'application $\Phi_1 : t \mapsto -t$ est une bijection entre $[0, 3\pi]$ et $[-3\pi, 0]$, et on a

$$x(-t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -y(t).$$

La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe $Ox$. On l'étudie sur $[0, 3\pi]$ est on complètera par la symétrie $S_1$ par rapport à $Ox$. L'application $\Phi_2 : T \mapsto 3\pi - t$ est une bijection de $[0, 3\pi/2]$ sur $[3\pi/2, 3\pi]$, et on a

$$x(3\pi - t) = -x(t) \text{ et } y(3\pi - t) = y(t).$$

La courbe est symétrique par rapport à $Oy$. On l'étudie sur $[0, 3\pi/2]$ et on complètera par la symétrie $S_2$ par rapport à $Oy$.

**Vecteur vitesse :** On a de manière immédiate

$$x'(t) = -\sin t \text{ et } y'(t) = \frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}.$$

Sur l'intervalle $[0, 3\pi/2]$, $x'$ s'annule en 0 et $\pi$, et $y'$ en $3\pi/2$.

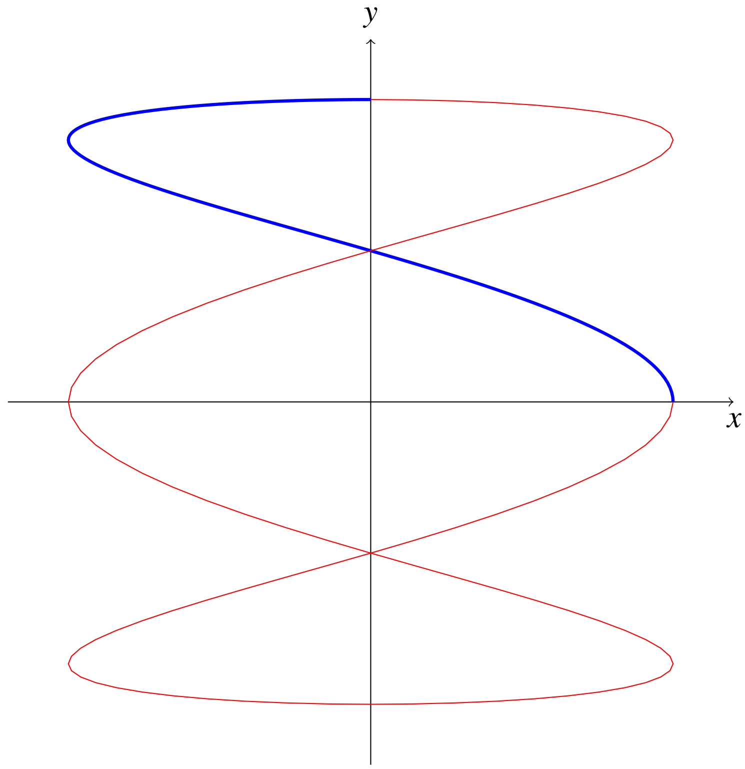
**Tableau de variation :**

| $t$ | $0$ | | $\pi$ | | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{3}/2$ | $\nearrow$ | $1$ |
| $y'(t)$ | | | $+$ | | $0$ |
| (y'/x')(t) | $\infty$ | | $\infty$ | | $0$ |

**Intersection avec $Oy$ :** L'équation $x(t) = 0$ a comme solutions $t = 3\pi/2$ et $t = \pi/2$. Cette deuxième valeur donne, par symétrie, un point double de coordonnées $(0, 1/2)$.

**Tracé de la courbe :**

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque $t$ varie de 0 à $\frac{3\pi}{2}$, et on complète par les symétries par rapport aux axes.



y
x

# III Fonctions de plusieurs variables

(2-3 séances)

## III.1 Calcul vectoriel

**Définition.** *Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) est la donnée de deux points A et B de $\mathbb{R}^n$. On notera $\overrightarrow{AB}$ le vecteur d'origine A et d'extrémité B. Deux vecteurs sont considérés comme égaux si on peut obtenir l'un par l'autre en utilisant une translation.*

**Définition.** *Si $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$ sont les coordonnées de deux points A et B dans le plan, alors les coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ sont appelées les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est définie par*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

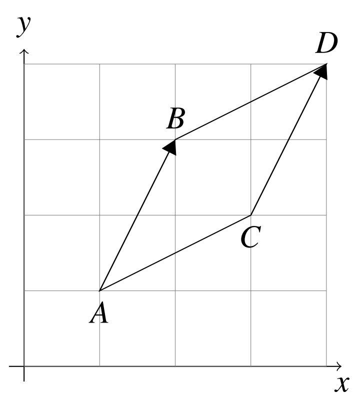
*C'est la longueur du segment joignant A à B. De même, si $(x_A, y_A, z_A)$ et $(x_B, y_B, z_B)$ sont les coordonnées de deux points A et B dans l'espace, alors les cooordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ sont appelées les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est définie par*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

*Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes composantes.*

**Remarque 1.** *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le polygône $(ABDC)$ est un parallèlogramme.*

**Exemple 24.** *Soient $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 2)$ et $D = (4, 4)$.*




*Alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux car ils ont comme composantes $(1, 2)$.*

**Définition.** *Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs du plan de composantes $(a_1, b_1)$ et $(a_2, b_2)$ respectivement. La somme $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ est un vecteur de composantes $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Si $\lambda$ est un nombre réel, on définit $\lambda\overrightarrow{v_1}$ comme un vecteur de composantes $(\lambda a_1, \lambda b_1)$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est le nombre*

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} := a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

*De même, si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs de l'espace de composantes $(a_1, b_1, c_1)$ et $(a_2, b_2, c_2)$ respectivement, la somme $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ est un vecteur de composantes $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$. Si $\lambda$ est un nombre réel, on définit $\lambda\overrightarrow{v_1}$ comme un vecteur de composantes $(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est le nombre*

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} := a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

*Deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont dits orthogonaux si $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$. Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont non nuls, le cosinus de l'angle orienté $\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}$ est le nombre vérifiant l'égalité*

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}}\right).$$

**Proposition 7.** *On a*

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} & = & \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} \\ (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{v_3} & = & \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} \\ (\lambda\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{v_2} & = & \lambda(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) \end{array}$$

*Démonstration.* (première partie) On écrit $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2)$. On a

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = a_1 a_2 + b_1 b_2 = a_2 a_1 + b_2 b_1 = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}.$$

□

On admet que le déterminant de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ est le volume orienté du parallélépipède engendré (signe positif si la base est directe). On peut le calculer par "développement selon la première colonne", et il apparait alors comme le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par un vecteur noté $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

**Définition.** *Le vecteur $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ est appelé produit vectoriel de $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{w}$. C'est l'unique vecteur tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on ait*

$$\det([\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}).$$

*En coordonnées, on a*

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = (b_1 c_2 - b_2 c_1, c_1 a_2 - c_2 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

**Proposition 8.** *Le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{(antisymétrie)} & \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} & = & -\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \\ \textit{(associativité)} & \overrightarrow{v_1} \wedge (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) & = & (\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) \wedge \overrightarrow{v_3} \\ \textit{(bilinéarité)} & (\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}) \wedge \overrightarrow{v_3} & = & \lambda_1\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_3} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3} \end{array}$$

*Démonstration.* L'antisymétrie et la bilinéarité découlent directement des propriétés analogues pour le déterminant (multilinéarité et antisymétrie). L'associativité découle aussi de la définition ou se démontre à partir de la formule. □

Etant donnée l'interprétation en termes de volume, le déterminant est nul si et seulement si les trois vecteurs sont liés, donc

1. si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = 0$.
2. réciproquement, $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.
3. dans le cas contraire, $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est dans le plan engendré par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

On en déduit que $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ est orthogonal au plan engendré par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. D'autre part, si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ de norme 1, le volume du parallelepipède vaut l'aire de la face engendrée par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. On en déduit que la longueur de $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ est l'aire de cette face.

On a donc démontré le résultat suivant :

**Proposition 9.** *Le vecteur $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. La norme $\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\|$ est égale à l'aire du parallèlogramme de côtés $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. On a $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont proportionnels, c'est-à-dire qu'on a $\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2}$ ou $\overrightarrow{v_2} = \lambda\overrightarrow{v_1}$ avec $\lambda$ une constante réelle.*

## III.2 Fonctions et graphes

**Définition.** *Soit $n$ et $k$ deux entiers. Une fonction $f$ de à $n$ variables et $k$ coordonnées est une fonction (partiellement définie) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$, dont le domaine de définition sera noté $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Rappelons que la donnée de $f$ est la donnée de $D_f \subset \mathbb{R}^n$ et d'un sous-ensemble $\Gamma_f \subset D_f \times \mathbb{R}^k$ appelé le graphe de $f$ et vérifiant que la projection $\Gamma_f \to D_f$ est une bijection. Ceci signifie que pour chaque $x \in D_f$, on se donne un unique élément, noté $f(x)$ de $\mathbb{R}^k$, tel que $(x, f(x)) \in \Gamma_f$.*

Par convention, on appelera souvent fonction une fonction à valeur réelle ($k = 1$).

Si $M$ est le point du plan (resp. de l'espace) de coordonnées $(x, y)$ (resp. $(x, y, z)$), on peut noter par $f(M)$ ou par $f(x, y)$ (resp. $f(x, y, z)$) la valeur de $f$ au point $M$.

**Exemples.**

1. La température sur une plaque rectangulaire peut être modélisée par une fonction $T$ définie sur un rectangle du plan à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x, y) = x^2 - 3y$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f$ est dite linéaire si ses accroissements sont proportionnels aux accroissements des variables, autrement dit si elle est du type$f(x, y) = ax + by$ (on parle aussi de forme linéaire = application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

**Dessins** En une variable, le graphe d'une fonction $f$ à valeurs réelles était l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ ; c'est une courbe. Le graphe de la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ de deux variables à valeurs réelles est la partie

$$\{(x, y, f(x, y)) \ (x, y) \in D_f\}$$

de l'espace $\mathbb{R}^3$. On l'appelle aussi surface représentative de $f$ (dessins).

**Remarque 2.** *En physique, il est fréquent de travailler avec des fonctions ayant plus de trois variables. Par exemple, le Boson de Higgs, qui est l'élément donnant leur masse aux particules du modèle standard* *des particules élémentaires, est modélisé par une fonction $\varphi$ des quatres variables $(x, y, z, t)$ de coordonnées l'espace temps. Un autre exemple de fonctions de quatres variables (à valeur vectorielle) jouant un rôle important en physique est donnée par le champ potentiel electromagnétique*

$$\overrightarrow{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4.$$

## III.3 Limites, continuité

**Définition.** *Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction à n variables, définie au voisinage d'un point $M_0 = (y_1, \ldots, y_n)$ sauf peut-être en $M_0$. On dit que $f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ tend vers $\ell$ quand $M$ tend vers $M_0$ si la propriété suivante est satisfaite : quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que*

$$\textit{si pour tout } i = 1, \ldots, n, \ |x_i - y_i| < \alpha, x_i \neq y_i \textit{ alors } |f(x_1, \ldots, x_n) - L| < \epsilon.$$

En dimension $n = 2$, la propriété précédente dit que $f(M)$ appartient à l'intervalle $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ dès que $M$ est dans le carré de centre $M_0$ et de taille $2\alpha \times 2\alpha$ et $M \neq M_0$.

Comme pour les fonctions à une variable, les limites ont de bonnes propriétés de commutation aux opérations standards sur les fonctions.

**Proposition 10.** *Le passage à la limite commute à la somme, au produits par un scalaire, au produit et au quotient (de dénominateur non nul) de fonctions.*

*Démonstration.* On ne va démontrer le résultat que pour la somme, les autres démonstrations étant similaires. Posons

$$L = \lim_{M \to M_0} f(M) \text{ et } H = \lim_{M \to M_0} g(M).$$

Par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ |x_i - y_i| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x_1, \ldots, x_n) - L| < \epsilon/2$$

et

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ |x_i - y_i| < \alpha_1 \Rightarrow |g(x_1, \ldots, x_n) - H| < \epsilon/2.$$

Si on pose $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on a

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ |x_i - y_i| < \alpha \Rightarrow |f(x_1, \ldots, x_n) - L| < \epsilon/2 \text{ et } |g(x_1, \ldots, x_n) - H| < \epsilon/2$$

donc par l'inégalité triangulaire

$$|f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n) - (L + H)| \leq |f(x_1, \ldots, x_n) - L| + |g(x_1, \ldots, x_n) - H|,$$

on obtient

$$\begin{gathered} \forall i = 1, \ldots, n, \ |x_i - y_i| < \alpha \\ \Downarrow \\ |f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n) - (L + H)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{gathered}$$

$\square$

**Définition.** *On dit que $f$ est continue en $M_0$ si*

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

*On dit que $f$ est continue si elle est continue en tout point de son domaine de définition.*

**Corollaire 1.** *Si $f$ et $g$ sont continues en $M_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, $\lambda f$, $fg$ sont continues en $M_0$. Si de plus $g(M_0) \neq 0$, alors $f/g$ continue en $M_0$.*

**Proposition 11.** *Si $f$ est une fonction à $n$ variables continue en $M_0$ et $g$ est une fonction à une variable continue en $f(M_0)$ alors $g \circ f$ est continue en $M_0$.*

*Démonstration.* Comme $f$ est continue en $M_0$, on a

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Comme $g$ continue en $f(M_0)$, on a aussi

$$\lim_{M'\to f(M_0)} g(M') = g(M_0).$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\lim_{M\to M_0} (g\circ f)(M) = (g\circ f)(M_0).$$

□

**Exemple 25.** *La fonction $e^{x^2+y^2}$ est continue en tout point car $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue partout (somme et produits de fonctions continues) et $x \mapsto e^x$ aussi.*

**Exemple 26.** *Soit $f$ la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*Cette fonction est continue en $(0,0)$ sur toute droite passant par l'origine, mais pas continue le long de la parabole $y = x^2$, donc elle n'est pas continue en $(0,0)$.*

**Remarque 3** (changement de variables)**.** *Soient $u(x,y)$ et $v(x,y)$ deux fonctions de deux variables $x$ et $y$, et $f(u,v)$ une fonction de deux variables $u$ et $v$. Si on remplace les variables $u$ et $v$ par les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$, on obtient une fonction des deux variables $(x,y)$ :*

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)).$$

*Si $f$, $u$ et $v$ sont continues, $F$ est aussi continue.*

## III.4 Dérivées partielles, différentielle

### (a) Dérivées partielles d'ordre 1

**Définition.** *Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction à $n$ variables définie au voisinage d'un point $M_0 = (y_1, \dots, y_n)$. On appelle dérivée partielle de $f$ en $M$ relativement à la variable $x_i$ la dérivée (si elle existe) de la fonction*

$$F_i(x) = f(y_1, \dots, \underbrace{x}_{i}, \dots, y_n).$$

*Elle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1, \dots, y_n)$ où encore $f'_{x_i}(y_1, \dots, y_n)$.*

**Exemple 27.** *Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$. On a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + x.$$

**Proposition 12.** *Les dérivées partielles commutent aux sommes et produits par un scalaire. On a aussi les formules*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f\frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad et \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(f/g) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}g - f\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$$

*pour les dérivées partielles d'un produit et d'un quotient (bien défini) de fonctions.*

**Définition.** *Les dérivées partielles d'une fonction à $n$ variables sont des fonctions à $n$ variables qu'on peut à nouveau dériver. En continuant ce processus, on arrive à définir les dérivées partielles d'ordre supérieur*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f.$$

Un des théorèmes fondamentaux sur les dérivées partielles, qui est à la base du formalisme des formes différentielles et de la dérivation extérieure, est le suivant :

**Théorème 4** (de Schwarz)**.** *Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables, et supposons que les dérivées partielles secondes de $f$ existent et soient continues. Alors, le résultat d'une dérivation à l'ordre 2 ne dépend pas du sens de dérivation, i.e., on a l'égalité*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

*Ce résultat se généralise à une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ à $n$ variables : si ses dérivées partielles à l'ordre $k$ existent et sont continues, alors le résultat d'une dérivation partielle à l'ordre $k$ ne dépend pas du sens dans lequel se font les dérivations.*

**Exemple 28.** *Soit $f(x, y) = x^3y^2$. On a*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y^2, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 6x^2, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0.$$

### (b) Développement limité à l'ordre un et 1-formes différentielles

**Théorème 5.** *Soit $f$ une fonction de deux variables dont les dérivées partielles existent et sont continues en $(x, y)$. Alors, il existe une fonction $o(h, k)$ telle que*

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + o(h, k)$$

*et vérifiant* $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

On généralise maintenant ce qu'on a fait en une variable : notons $dx$ et $dy$ pour $h$ et $k$. Le terme

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

s'appelle différentielle de $f$ au point $(x, y)$. C'est une fonction des variables $x, y, dx, dy$ qui est linéaire en $dx$ et $dy$.

**Exemple 29.** *La différentielle de la fonction $f(x, y) = xy^3$ est donnée par*

$$d(xy^3) = y^3dx + 3y^2xdy.$$

Les différentielles de Leibniz peuvent être vue comme une simple notation qui permet de faciliter les calculs, mais il sera utile pour la suite du cours de bien comprendre leur formalisation mathématique précise, qui est donné par les 1-formes différentielles. On adapte ici la définition des 1-formes différentielles en dimension 1 à la dimension supérieure.

**Définition.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine. Une fonction*

$$\omega(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$

*du point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ et du vecteur $\overrightarrow{dx} = [dx_1, \ldots, dx_n] \in \mathbb{R}^n$, qui est linéaire en $\overrightarrow{dx}$ est appelée une 1-forme différentielle sur $D$. L'ensemble des 1-formes différentielles sur le domaine $D$ est noté $\Omega^1(D)$ et l'ensemble des fonctions (infiniment) dérivables sur $D$ est aussi appelé l'ensemble des 0-formes différentielles et noté $\Omega^0(D)$.*

La différentielle des fonctions est l'application

$$\begin{array}{rccc} d: & \Omega^0(D) & \to & \Omega^1(D) \\ & f(x) & \mapsto & df(x, \overrightarrow{dx}) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)dx_n \end{array}$$

qui envoie une fonction $f$ sur la 1-forme différentielle différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Calculer la différentielle d'une fonction revient donc tout simplement à calculer ses dérivées partielles au premier ordre.

**Exemple 30.** *Voyons quelques exemples de formes différentielles définies sur $D = \mathbb{R}^2$.*

1. *La* $1$*-forme différentielle* $\omega = 2xdx + 2ydy$ *est la différentielle de la fonction* $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. *La* $1$*-forme différentielle* $\omega = ydx + xdy$ *est la différentielle de la fonction* $f(x, y) = xy$.
3. *On verra plus tard que la* $1$*-forme différentielle* $\omega = ydx - xdy$ *n'est pas la différentielle d'une fonction* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$*, mais il nous faudra pour cela étendre la différentielle aux* $1$*-formes pour obtenir des* $2$*-formes différentielles.*

Les fonctions peuvent être additionnées et multipliées (car le produit de deux fonctions dérivables est dérivable). On peut aussi multiplier une 1-forme $\omega(x, \overrightarrow{dx}) = f_1 dx_1 + \cdots f_n dx_n$ par une fonction $g$ (à gauche ou à droite) en posant simplement

$$(\omega g)(x, \overrightarrow{dx}) = (g\omega)(x, \overrightarrow{dx}) := g f_1 dx_1 + \cdots g f_n dx_n.$$

La multiplication des 1-formes est appelée produit extérieur et notée $\wedge$. C'est une opération ayant notamment la propriété d'anticommutativité

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

et en particulier

$$dx_i \wedge dx_i = 0.$$

Nous verrons plus tard comment manipuler les formes différentielles générales, obtenues par produits de 1-formes.

**Règles de calcul sur les différentielles** Les règles de calcul en une variable restent valables en plusieurs variables, et c'est ce qui rend la notation des différentielles de Leibniz et des 1-formes différentielles agréable.

**Théorème.** *Les règles sur les différentielles en une variables restent valables en deux variables ou plus (on développe la substitution plus loin) :*

1. *(différentielle et dérivées partielles)* $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ *(en particulier,* $d(1) = 0$*),*
2. *(somme)* $d(f + g) = df + dg$*,*
3. *(produit par un scalaire)* $d(\lambda f) = \lambda df$*,*
4. *(produit)* $d(fg) = fdg + gdf$*,*
5. *(principe de substitution ou composition) dans l'égalité* $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$*, on peut réinterpréter* $x$ *comme une fonction.*

Remarquons que la relation $d(xy) = xdy + ydx$ a maintenant deux interprétations : (1) $x$ et $y$ sont des variables, (2) $x$ et $y$ sont des fonctions, et on retrouve alors la règle de différentiation d'un produit.

### (c) Composition

La règle de substitution donne l'effet d'une composition sur les dérivées partielles :

**1 – Composition d'une courbe paramétrée et d'une fonction de deux variables** (par exemple la température au point $M(t)$) Calcul de la différentielle de $f(x(t), y(t))$ : On écrit la différentielle de la fonction $f(x, y)$,

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

et dans cette expression on interprète $x$ et $y$ comme des fonctions, avec $dx = x'(t)dt$ et $dy = y'(t)dt$, ce qui donne

$$df(x(t), y(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)\right)dt.$$

Le terme devant le $dt$ doit donc être la dérivée de la fonction composée $t \mapsto f(x(t), y(t))$ :

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

---

**Exercice 7.—**(vitesse et accélération en polaires) Soit $M(t)$ un point mobile donné par ses coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$. **1.** Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{M}'(t) = (x'(t), y'(t))$ à l'aide des fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$. **2.** Exprimer de même le vecteur accélération.

---

**2 – Changement de variables** On trouve de même la formule pour les dérivées partielles de $f(u(x, y), v(x, y))$.

On a $df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$, donc la règle de substitution nous donne

$$\begin{array}{rcl} df(u(x,y), v(x,y)) & = & \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy\right] \\ & + & \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\left[\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy\right] \\ & = & \left[\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right]dx \\ & + & \left[\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)]\right]dy. \end{array}$$

Pour démontrer que cette règle de substitution reste valide, on compose les développements limités à l'ordre 1 ; la difficulté consiste à montrer que les restes des développements limités se comportent comme il faut.

### (d) Différentielle et plan tangent

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

est l'équation du plan tangent au graphe de $f$, dans les coordonnées $(df, dx, dy)$ dont l'origine est au point $M = (x, y, f(x, y))$.

### (e) Différentielle d'un changement de variables

Considérons l'application $\Phi : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (et qui interviendra souvent par la suite comme un changement de variables). Sa différentielle est une fonction des quatre variables $x, y, dx, dy$ qui a deux composantes $(du, dv)$, c'est-à-dire qu'elle arrive à nouveau dans $\mathbb{R}^2$. Lorsqu'on fixe les valeurs de $x$ et $y$, on obtient une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dy \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)dy \end{pmatrix} = J. \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

où $J$ est la *matrice jacobienne* de $\Phi$. (Cette application est appelée application différentielle de $\Phi$ au point $(x, y)$ et notée $D\Phi(x, y)$.)

Si maintenant $(x(t), y(t))$ est une courbe paramétrée dans le plan, l'image de cette courbe est la courbe $(u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)))$. Les formules de composition permettent donc de calculer la vitesse de la courbe image à l'aide de $du, dv$ et du vecteur vitesse $\overrightarrow{M}'(t) = (x'(t), y'(t))$ de la courbe initiale il s'agit exactement du vecteur $J.\overrightarrow{M}'(t)$. En résumé, *la différentielle de $\Phi$ en un point $x, y$ fixé donne l'effet de $\Phi$ sur le vecteur vitesse d'une courbe passant par ce point.*

Image d'un petit rectangle. Considérons le rectangle de sommets $(x, y), (x+dx, y), (x, y+dy), (x+dx, y+dy)$. Lorsque $dx$ et $dy$ sont très petits, on a (d'après le développement limité à l'ordre 1)

$$\Phi(x + dx, y) \simeq \Phi(x, y) + J. \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x, y + dy) \simeq \Phi(x, y) + J. \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x + dx, y + dy) \simeq \Phi(x, y) + J. \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \Phi(x, y) + J. \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} + J. \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix}$$

Les quatre points images sont donc les sommets d'un petit parallélogramme... (suite dans la formule de changement de variables dans les intégrales multiples).

**Exemple 31.** *Considérons le changement de variables donné par les coordonnées polaires*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

*La différentielle de $\Phi$ en $(r, \theta)$ vaut*

$$D\Phi(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

### (f) Principe de substitution pour les 1-formes différentielles

Du principe de substitution pour les différentielles de fonctions, on tire un principe de substitution plus général pour les 1-formes différentielles que nous formulons maintenant car il sera utile par la suite. Ce principe de substitution très général peut être pensé d'un point de vue physique en disant que le formalisme des 1-formes différentielles est invariante par des transformations quelconques du domaine. On peut penser à ce type d'invariance du domaine comme à l'invariance présente dans le formalisme de la relativité générale d'Einstein.

**Théorème.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et $\omega \in \Omega^1(D)$ une 1-forme différentielle donnée par*

$$\omega(x, \overrightarrow{dx}) = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

*Supposons que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soit une fonction*

$$x(u_1, \ldots, u_k) : \Delta \to D$$

*de variables $(u_1, \ldots, u_k)$ dans un domaine $\Delta$ de $\mathbb{R}^k$, dont les coordonnées sont des fonctions $x_i(u_1, \ldots, u_k)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors, on peut définir une 1-forme $x^*\omega$ sur $\Delta$ en replaçant $x_i$ par $x_i(u_1, \ldots, u_k)$ et $dx_i$ par*

$$dx_i(u_1, \ldots, u_k) = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial u_k} du_k$$

*dans l'expression*

$$\omega = f_1(x_1, \ldots, x_n) dx_1 + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n) dx_n.$$

*Cette 1-forme $x^*\omega$ est la différentielle de la fonction composée*

$$f(x(u_1, \ldots, u_k)) : \Delta \to \mathbb{R}$$

*lorsque $\omega = df$ est la différentielle d'une fonction $f \in \Omega^0(D)$.*

**Exemple 32.** *Prenons la 1-forme $\omega$ définie sur $D = \mathbb{R}^2$ par*

$$\omega = y dx - x dy.$$

*Les coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$ (changement de variable) sont données par deux fonctions*

$$x(r, \theta) = r\cos(\theta) \text{ et } y(r, \theta) = r\sin(\theta)$$

*sur $\Delta = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$. Elles définissent une application $M : \Delta \to D$. Leur différentielle est donnée par*

$$dx(r, \theta) = \frac{\partial x}{dr} dr + \frac{\partial x}{d\theta} d\theta = \cos(\theta) dr - r\sin(\theta) d\theta$$

*et*

$$dy(r, \theta) = \frac{\partial y}{dr} dr + \frac{\partial y}{d\theta} d\theta = \sin(\theta) + r\cos(\theta) d\theta.$$

*Le principe de substitution nous fournit donc une 1-forme différentielle $M^*\omega$ sur $\Delta = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ donnée par*

$$\begin{array}{rcc} M^*\omega & := & r\sin(\theta)[\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta] - r\cos(\theta)[\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta] \\ & = & r[\sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta)]dr + r[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]d\theta \\ & = & r d\theta \end{array}$$

**Exemple 33.** *Si on souhaite se restreindre aux coordonnées polaires $M : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sur le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ (courbe paramétrée), données par*

$$x(\theta) = \cos(\theta) \text{ et } y(\theta) = \sin(\theta),$$

*on obtient (en posant $r = 1$ et $dr = 0$ dans les calculs précédents)*

$$M^*\omega = d\theta.$$

*Ceci signifie que sur le cercle de rayon 1 en coordonnées polaires, la forme différentielle $\omega = y dx - x dy$ correspond simplement à la forme coordonnée $d\theta$, dérivée de l'angle $\theta$.*

## III.5 Allure des lignes de niveau

On peut aussi représenter une fonction $f$ par ses lignes de niveau.

**Définition.** *Soit $f$ une fonction à 2 variables. La ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$ est l'ensemble $L_c = \{M, f(M) = c\}$ des points $M$ en lesquels $f$ prend la valeur $c$. Plus généralement, si $f$ est une fonction à $n$ variables, l'hypersurface de niveau $c \in \mathbb{R}$ est l'ensemble $L_c = \{M, f(M) = c\}$ des points $M$ en lesquels $f$ prend la valeur $c$. Pour $n = 2$, on parle simplement de la surface de niveau $c$.*

**Exemple 34.** *La ligne de niveau $c$ est, de manière générique, une courbe, mais pas généralement. Par exemple, si $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $c > 0$, la ligne de niveau $L_c$ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$, mais la ligne de niveau $L_0$ est simplement le point $(0, 0)$, et la ligne de niveau $c < 0$ est l'ensemble vide.*

La notion de ligne de niveau joue un rôle important en physique.

**Exemple 35.** *Sur une carte topographique, les lignes de crête sont tout simplement les lignes de niveau de la fonction altitude $h(x, y)$ en fonction des coordonnées $(x, y)$ sur la carte.*

**Exemple 36.** *Quand on étudie le mouvement d'un solide dans l'espace, la loi de conservation de l'énergie peut se formuler en disant que le système évolue sur une ligne de niveau de la fonction énergie $E$.*

**Exemple 37.** *La surface de niveau $c > 0$ de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ est la sphère de rayon $\sqrt{c}$, mais la surface de niveau $c = 0$ est le point $(0, 0, 0)$ et la surface de niveau $c < 0$ est l'ensemble vide.*

## III.6 Champs de vecteurs et gradient

**Définition.** *Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ sur $D$ est une fonction*

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{V}: & D & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (V_1(x_1, \dots, x_n), \dots, V_n(x_1, \dots, x_n)) \end{array}$$

*On note $\mathfrak{X}(D)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur $D$.*

Les champs de vecteurs peuvent être multipliés par des fonctions (on multiplie simplement leur coordonnées), et additionnés.

**Exemple 38.** *Un champ de vecteur du plan est une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ du plan et à valeurs dans l'ensemble de vecteurs du plan*

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{V}: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & M = (x, y) & \mapsto & \overrightarrow{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \end{array}.$$

*Un champ de vecteur de l'espace est une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ de l'espace et à valeurs dans l'ensemble des vecteurs de l'espace*

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{V}: & D & \to & \mathbb{R}^3 \\ & M = (x, y, z) & \mapsto & \overrightarrow{V}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \end{array}.$$

**Exemple 39.** *Champ du flot de chaleur ; champ des vitesses d'un corp solide en rotation, d'un liquide (est-ce que tout champ de vecteurs peut être le champ des vitesses d'un liquide ?...).*

Il y a un lien fondamental et indépendant du choix de coordonnées entre champs de vecteurs et 1-formes différentielles : ils sont en dualité.

**Proposition 13.** *Il existe un accouplement naturel*

$$\begin{array}{rccc} \iota : & \mathfrak{X}(D) \times \Omega^1(D) & \to & \Omega^0(D) \\ & (\overrightarrow{V}, \omega(x, \overrightarrow{dx})) & \mapsto & \iota_{\overrightarrow{V}}\omega := \omega(x, \overrightarrow{V}(x)) \end{array}$$

*En coordonnées, si* $\overrightarrow{V}(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$ *et* $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$*, on aura*

$$\iota_{\overrightarrow{V}}\omega = f_1 \cdot V_1 + \cdots + f_n \cdot V_n.$$

Comme on a choisit un système de coordonnées $D \subset \mathbb{R}^n$ pour $D$, on obtient un résultat plus fin qui saute aux yeux : se donner un champ de vecteur revient à se donner une 1-forme différentielle, i.e., se donner leurs $n$ fonctions coordonnées.

**Proposition 14.** *Champs de vecteurs et* 1*-formes différentielles sur D sont en bijection par l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(D) & \to & \Omega^1(D) \\ \overrightarrow{V} = (V_1, \ldots, V_n) & \mapsto & \omega_{\overrightarrow{V}} := \overrightarrow{V} \cdot (dx_1, \ldots, dx_n) = V_1 dx_1 + \cdots + V_n dx_n \end{array}$$

**Définition.** *Par la bijection entre champs de vecteurs et formes différentielles, on obtient l'opérateur gradient sur les champs de vecteurs, donné par*

$$df = \omega_{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)},$$

*ou encore en coordonnées*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

*pour $f$ une fonction de $n$ variables.*

**Exemple 40.** *Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et ayant des dérivées partielles sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, son champ de gradient est le champ de vecteurs défini sur D donné par*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

*Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et ayant des dérivées partielles sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$, son champ de gradient est le champ de vecteurs défini sur D donné par*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

**Remarque 4.** *Le champ de gradient est orthogonal aux lignes de niveau. Il mesure la direction et l'intensité de variation de la fonction considérée. Par exemple, quand on fait du ski, on a tout intérêt à suivre la direction donnée par le champ de gradient à la fonction altitude $h(x, y)$ relativement aux coordonnées $(x, y)$ sur la carte.*

## III.7 Intégrale curviligne

Nous allons utiliser le principe de substitution pour les 1-formes pour définir leur intégrale le long d'une courbe paramétrée, appelée l'intégrale curviligne.

Si $M(t) = (x(t), y(t)) : \Delta = [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée $C$ du plan et $\omega = gdx + hdy \in \Omega^1(D)$ est une 1-forme définie sur $D = \mathbb{R}^2$, on obtient la 1-forme $M^*\omega \in \Omega^1([a, b])$ par remplacement

$$M^*\omega = g(x(t), y(t))d(x(t)) + h(x(t), y(t))d(y(t)) = g(x(t), y(t))x'(t)dt + h(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Si $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ est la différentielle d'une fonction $f(x, y)$, on retrouve bien la formule pour la différentielle $d(f(x(t), y(t)))$ de la fonction à une variable obtenue en composant $f : D \to \mathbb{R}$ avec $M : [a, b] \to D$. L'intégrale curviligne $\oint_C \omega$ est définie comme l'intégrale de Riemann à une variable de la 1-forme $M^*\omega \in \Omega^1([a, b])$ donnée par la formule

$$\oint_C \omega := \int_a^b M^*\omega = \int_a^b \left[g(x(t), y(t))x'(t) + h(x(t), y(t))y'(t)\right] dt.$$

Plus généralement, on a la définition suivante.

**Définition.** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^n$, et soit $M = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) : [a, b] \to D \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée $C$ de $D$, et $\omega = fdx_1 + \cdots + fdx_n$ une forme différentielle définie sur $D$. L'intégrale curviligne de $\omega$ le long de $C$ est définie comme l'intégrale de Riemann classique*

$$\oint_C \omega = \int_a^b M^*\omega := \int_a^b [f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t))x_1'(t) + \cdots + f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t))x_n'(t)]dt.$$

En pratique, en dimension 3, si $C$ est définie par la paramétrisation $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et $\omega = fdx + gdy + hdz$, on obtient

$$\oint_C \omega = \int_a^b [f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt.$$

**Théorème.** *Si $\omega = df$ est la différentielle d'une fonction et $C$ est une courbe paramétrée par $M : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, alors*

$$\oint_C \omega = f(M(b)) - f(M(a)).$$

*En particulier, si $M(a) = M(b)$, i.e., si la courbe est fermée, alors l'intégrale curviligne est nulle :*

$$\oint_C \omega = 0.$$

**Exemple 41.** *On va montrer que la forme $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ n'admet pas de fonction primitive $f$ (telle que $\omega = df$) en montrant qu'elle a une intégrale non nulle sur le cercle. Soit $M(\theta) =$*

$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la paramétrisation standard du cercle* $S^1$*. Sur* $S^1$*, on a* $x^2 + y^2 = 1$*. On a alors*

$$\begin{array}{rcl} \oint_{S^1} \omega & = & \oint_{[0,2\pi]} M^*\omega \\ & = & \oint_{[0,2\pi]} x(\theta)d(y(\theta)) + y(\theta)dx(\theta) \\ & = & \int_0^{2\pi} x(\theta)y'(\theta)d\theta + y(\theta)x'(\theta)d\theta \\ & = & \int_0^{2\pi} [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]d\theta \\ & = & 2\pi. \end{array}$$

*Donc* $\omega$ *n'est pas exacte, i.e., n'a pas de fonction primitive* $f$*, car sinon, on aurait (par la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral)*

$$\begin{array}{rcl} \oint_{S^1} df & = & f(1,0) - f(1,0) \\ & = & 0 \end{array}$$

*ce qui n'est pas le cas car* $0 \neq 2\pi$*.*

## III.8 Surfaces paramétrées

**Définition.** *Soit* $\Delta$ *un domaine de* $\mathbb{R}^2$*. Une surface paramétrée* $S$ *de l'espace, de paramètres dans* $\Delta$*, est la donnée d'une fonction*

$$\begin{array}{rccl} M : & \Delta & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & M(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

**Définition.** *Les dérivées partielles de la paramétrisation* $M : \Delta \to \mathbb{R}^3$ *sont les vecteurs de composantes*

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) \qquad et \qquad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$$

*et d'origine* $M(u,v)$*. Le vecteur orthogonal à la surface* $S$ *paramétrée par* $M(u,v)$ *est le vecteur*

$$\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}.$$

*On dit que la surface est régulière si ce vecteur est partout non nul. Le plan tangent à la surface régulière* $S$ *paramétrée par* $M(u,v)$ *en* $M(u_0, v_0)$ *est le plan paramétré*

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & T(u,v) := M(u_0,v_0) + u\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0,v_0) + v\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0,v_0). \end{array}$$

*Le vecteur normal à la surface régulière* $S$ *est le vecteur*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{m}}{||\overrightarrow{m}||}.$$

Une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ est munie d'une orientation naturelle, donnée par son vecteur normal. Plus généralement, on appelera orientation d'une surface (par exemple, donnée par une équation) de $\mathbb{R}^3$ la donnée d'un champ de vecteur normal (orthogonal et de norme 1) à la surface.

**Exemple 42.** *Un ruban de mobius ne peut être orienté, alors qu'un ruban sans twist (cylindre) admet pour orientation, soit la normale extérieure, soit la normale intérieure.*

**Proposition 15.** *Soit $M_0 = M(u_0, v_0)$ un point de $S$ correspondant au point $(u_0, v_0)$. Soit $\overrightarrow{m_0}$ le vecteur orthogonal à $S$ en $M_0$. Alors le plan tangent à $S$ en $M_0$ admet pour équation*

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overrightarrow{m_0} = 0.$$

*Démonstration.* Le plan défini par l'équation précédente est orthogonal à $\overrightarrow{m_0}$. En particulier, il contient les deux vecteurs tangent à la surface en $M_0$. On a supposé que $\overrightarrow{m_0}$ n'est pas nul, ce qui signifie que les deux vecteurs tangents sont linéairement indépendants. Le plan considéré est donc le plan tangent à la surface en $M_0$. □

## III.9 Théorème des fonctions implicites

Il existe un lien entre équations et paramétrisations donné par le théorème des fonctions implicites, qui permet de montrer l'existence de solutions aux équations. Nous allons le formuler en montrant comment paramétrer les lignes de niveau d'une fonction sur $\mathbb{R}^2$ et les surfaces de niveau d'une fonction sur $\mathbb{R}^3$.

**Théorème 6** (Fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$)**.** *Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables telle que $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons que $f$ admette des dérivées partielles d'ordre 1 et qu'elles soient continues au voisinage de $(x_0, y_0)$. Supposons aussi que*

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy \neq 0.$$

*Alors soit $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ et il existe un voisinage $I$ de $x_0$ et une fonction $y = \varphi(x)$ définie sur ce voisinage tels que*

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in I,$$

*soit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ et il existe un voisinage $I$ de $y_0$ et une fonction $x = \varphi(y)$ définie sur ce voisinage tels que*

$$\varphi(y_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad f(\varphi(y), y) = 0 \text{ pour tout } y \in I.$$

*Dans les deux cas, la fonction $\varphi$ satisfaisant à ces conditions est unique.*

**Définition.** *La fonction $\varphi$ du théorème 6 s'appelle la fonction implicite définie par l'équation $f(x, y) = 0$ et la condition initiale $y_0 = \varphi(x_0)$ ou $x_0 = \varphi(y_0)$.*

**Proposition 16.** *Sous l'hypothèse du théorème 6, la fonction $\varphi$ est dérivable et dans le cas $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, on a*

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

*Démonstration.* Il suffit de différencier la relation $f(x, \varphi(x)) = 0$ en utilisant la loi de dérivation des fonctions composées. Cela donne

$$d(f(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx = 0$$

ce qui implique le résultat souhaité. □

**Corollaire 2.** *Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables telle que $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons que $f$ admette des dérivées partielles continues au voisinage de $(x_0, y_0)$. Supposons aussi $df \neq 0$. Alors la droite tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ en $(x_0, y_0)$ admet comme équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

*Démonstration.* On considère le cas où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, l'autre étant traité de la même manière. Au voisinage de $(x_0, y_0)$, la courbe $f(x, y) = 0$ est le graphe de la fonction $y = \varphi(x)$. Sa droite tangente en $(x_0, y_0)$ admet comme équation

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

D'après la proposition 16, la dernière équation est équivalente à

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

où encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

□

**Théorème 7** (Fonctions implicites dans $\mathbb{R}^3$)**.** *Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables telle que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Supposons que $f$ admette des dérivées partielles d'ordre 1 et qu'elles soient continues au voisinage de $(x_0, y_0, z_0)$. Supposons aussi que*

$$df(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

*Alors, localement au voisinage de $(x_0, y_0, z_0)$ l'équation $f(x, y, z) = 0$ peut être résolue par une fonction implicite de deux des coordonnées $(x, y, z)$. En particulier, si $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, il existe $\varphi(x, y)$ vérifiant*

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0 \qquad \textit{et} \qquad f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

*pour tout $(x, y)$ au voisinage de $(x_0, y_0)$.*

**Définition.** *La fonction $\varphi$ du théorème 7 s'appelle la fonction implicite définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$ et la condition initiale $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$.*

**Proposition 17.** *Les dérivées partielles de la fonction implicite $\varphi(x, y)$ sont données par les formules*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

*Démonstration.* Il suffit de différencier la relation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$. □

**Corollaire 3.** *Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables telle que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Supposons que $f$ admette des dérivées partielles d'ordre $1$ continues au voisinage de $(x_0, y_0, z_0)$. Supposons aussi que $df \neq 0$. Alors, le plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ en $(x_0, y_0, z_0)$ admet comme équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

**Exemple 43.** *Le plan tangent à la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

*en $(1/3, 2/3, 2/3)$ est d'équation*

$$2/3(x - 1/3) + 4/3(y - 2/3) + 4/3(z - 2/3) = 0$$

*soit*

$$x + 2y + 2z = 3.$$

---

**Exercice 8.—** (cf Pham, p206) Tangente à la courbe $x^2 + 2xy + \frac{}{2}y^2 - y = 1$ au point $(1, 0)$.

1) En explicitant $y$ fonction de $x$ et en dérivant.

2) En différentiant la relation. On différencie la relation, ce qui donne une relation différentielle, qu'on interprète comme une égalite valable entre toutes fonctions $x$ et $y$ vérifiant la relation. En particulier pour $x = x$ et $y = g(x)$ fonction implicite de $x$.

---

*Idée de preuve pour le théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$.* On a une fonction $f(x, y)$, et un point $(x_0, y_0)$ en lequel la deuxième dérivée partielle est non nulle. Pour fixer les idées, on la suppose strictement positive (la preuve serait complètement analogue dans le cas contraire) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0.$$

D'autre part, l'hypothèse du théorème nous dit aussi que les dérivées partielles sont des fonctions continues : il existe donc un petit carré $C$, centré sur le point $(x_0, y_0)$, tel qu'on ait aussi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$$

pour tous les points $(x, y)$ de $C$. Dans la suite, on considère seulement les points de $C$. On note $C = I \times J$ où $I$ est un petit intervalle pour la variable $x$ et $J$ un petit intervalle pour la variable $y$.

La valeur de $x_0$ étant fixé, on considère la fonction (d'une seule variable !)

$$f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y).$$

Par définition des dérivée partielle, cette fonction est dérivable et sa dérivée est la dérivée partielle par rapport à $y$, qui est strictement positive sur $J$ : cette fonction d'une variable est donc strictement croissante sur $J$. Comme elle s'annule pour la valeur $y = y_0$, elle est strictement négative au début de $J$ et strictement positive à la fin : en notant $J = [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$, on a

$$f(x_0, y_0 - \beta) < 0 \text{ et } f(x_0, y_0 + \beta) > 0.$$

On utilise maintenant la continuité de $f$ : il existe un petit intervalle autour de $x_0$ tel qu'on ait encore

$$f(x, y_0 - \beta) < 0 \text{ et } f(x, y_0 + \beta) > 0.$$

pour tout $x$ dans ce petit intervalle. (Pour ne pas multiplier les notations, on va encore noter $I$ cet intervalle, bien qu'a priori il soit plus petit que l'intervalle $I$ que nous avions choisi ; ceci ne devrait pas être un problème puisque ce petit intervalle a toutes les propriétés de $I$).

Fixons maintenant un $x$ dans $I$, et considérons la fonction

$$f_x : y \mapsto f(x, y).$$

(auparavant on a considéré cette fonction mais seulement pour la valeur $x = x_0$ ; maintenant on prend n'importe quel $x$ dans $I$, qui est un petit intervalle autour de $x_0$). Cette fonction d'une variable vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $f_x(y_0 - \beta) < 0$,
2. $f_x(y_0 + \beta) > 0$,
3. la dérivée de cette fonction est strictement positive sur l'intervalle $J$.

On en déduit qu'il existe un unique $y$ dans $J$ tel que $f_x(y) = 0$. On a donc montré que pour tout $x$ dans un petit intervalle autour de $x_0$, il existe un unique $y$ dans un petit intervalle autour de $y_0$ tel que $f(x, y) = 0$. Ceci permet de définir la fonction $\varphi$ recherchée en posant $y = \varphi(x)$. □

# IV Intégrales multiples

(2 séances)

## IV.1 Définition, propriétés

Si $n = 1, 2, 3$ et $P \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, on peut tenter d'approximer $P$ en utilisant un découpage de $\mathbb{R}^n$ en pavés (intervalles, carrés, cubes) de taille $\epsilon$. En dimension 1, on recouvre la droite réelle $\mathbb{R}$ par les petits intervalles

$$P_{k,\epsilon} := [k\epsilon, (k+1)\epsilon]$$

pour $k$ entier. En dimension 2, on recouvre le plan réel $\mathbb{R}^2$ par les petits carrés

$$P_{kl,\epsilon} := [k\epsilon, (k+1)\epsilon] \times [l\epsilon, (l+1)\epsilon]$$

pour $k$ et $l$ entiers. En dimension 3, on recouvre l'espace réel $\mathbb{R}^3$ par les petits cubes

$$P_{klm,\epsilon} := [k\epsilon, (k+1)\epsilon] \times [l\epsilon, (l+1)\epsilon] \times [m\epsilon, (m+1)\epsilon]$$

pour $k$, $l$ et $m$ entiers.

Pour bien visualiser la situation, on dessinera le graphe d'une fonction positive à deux variables et un exemple de pavé approchant le volume sous ce graphe.

Etant donnée une fonction $f : P \to \mathbb{R}$ avec $P \subset \mathbb{R}^n$ borné, on peut approcher son intégrale en faisant la somme de ses valeurs aux sommets inférieurs des pavés de taille $\epsilon$ contenus dans $P$, pondérée par la "taille" du pavé (i.e., sa longueur, sa surface, ou son volume). Plus précisément, on approche l'intégrale, en dimension 1, par la somme

$$I_\epsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}, P_{k,\epsilon} \subset P} \epsilon f(k\epsilon),$$

en dimension 2, par la somme

$$I_\epsilon = \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2, P_{kl,\epsilon} \subset P} \epsilon^2 f(k\epsilon, l\epsilon)$$

et en dimension 3, par la somme

$$I_\epsilon = \sum_{(k,l,m) \in \mathbb{Z}^3, P_{klm,\epsilon} \subset P} \epsilon^3 f(k\epsilon, l\epsilon, m\epsilon).$$

**Définition.** *L'intégrale de la fonction $f$ sur le domaine $P$ de $\mathbb{R}^n$, est donnée par la limite (si elle existe)*

$$\int_P f(M) dM := \lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon.$$

On notera l'intégrale par

$$\begin{array}{ll} \int_P f(x)dx := \int_P f(M)dM & \text{en dimension 1,} \\ \iint_P f(x,y)dxdy := \int_P f(M)dM & \text{en dimension 2,} \\ \iiint_P f(x,y,z)dxdydz := \int_P f(M)dM & \text{en dimension 3.} \end{array}$$

**Théorème 8.** *Soit $f$ une fonction continue définie sur un domaine fermé (i.e. pouvant être défini par une équation $g = 0$) et borné (i.e., inclus dans un grand pavé $[-M, M]^n$) $P$ de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$. L'intégrale $\int_P f(M)dM$ existe.*

**Remarque 5.** *Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est défini par un nombre fini d'équations $f_1 = \cdots = f_n = 0$ alors il est défini par une seule équation $g = f_1^2 + \cdots + f_n^2 = 0$.*

**Proposition 18.** *L'intégrale vérifie les propriétés suivantes :*

1. *(linéarité) Si $\lambda$ est une constante et $f$ et $g$ sont des fonctions, on a*

$$\int_P (\lambda f + g)(M)dM = \lambda \int_P f(M)dM + \int_P g(M)dM.$$

2. *(additivité ensembliste) Si $P = P_1 \cup P_2$ est une union de domaines suffisamment réguliers obtenus en recollant le long des bords. Alors*

$$\int_P f(M)dM = \int_{P_1} f(M)dM + \int_{P_2} f(M)dM.$$

## IV.2 Intégrale et mesures

Une manière de voir l'intégrale est de la penser comme un moyen de calculer des longueurs, aires et volumes. Le calcul intégral permet aussi de calculer la masse totale d'un domaine à densité variable, un centre de gravité, où une probabilité (intégrale d'une densité de probabilité).

Rappelons la définition de la longueur d'une courbe paramétrée donnée dans la Section II.5 (c).

**Définition.** *La longueur d'une courbe paramétrée $C$ du plan ou de l'espace est donnée par l'intégrale de la longueur de son vecteur vitesse*

$$\text{longueur}(C) := \int_a^b \|\overrightarrow{V}(t)\|dt.$$

**Définition.** *Si $S$ est une surface paramétrée par $M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ avec $(u, v) \in \Delta$, son aire est donnée par*

$$\text{aire}(S) := \iint_\Delta \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\| dudv = \iint_\Delta \|\overrightarrow{m}\|dudv.$$

**Exemple 44.** *Supposons que la surface $S$ soit le graphe d'une fonction $z(x, y)$ au-dessus d'un domaine $\Delta$ de $\mathbb{R}^2$, i.e., que $S$ soit paramétrée par*

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = z(x, y) \qquad (x, y) \in \Delta.$$

*L'aire de la surface $S$ vaut*

$$\text{aire}(S) = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

*En effet, on a*

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

*donc*

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

*ce qui donne le résultat, par définition de l'aire dans le cas général d'une surface paramétrée.*

**Définition.** *Le volume d'un domaine $D$ de $\mathbb{R}^3$ est l'intégrale*

$$\text{volume}(D) = \iiint_D dxdydz.$$

## IV.3 Première méthode de calcul : théorème de Fubini

**Théorème 9.** *Supposons que le domaine $P \subset \mathbb{R}^2$ soit un domaine délimité par les graphes de deux fonctions $\varphi_0(y)$ et $\varphi_1(y)$ définies sur un intervalle $[a, b]$. Alors l'intégrale double se calcule à l'aide de deux intégrales simples :*

$$\iint_P f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)dx\right) dy.$$

*Démonstration.* (idée) Il s'agit de décomposer la somme de Riemann

$$I_\epsilon = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2, P_{kl,\epsilon}\subset P} \epsilon^2 f(k\epsilon, l\epsilon)$$

sous la forme d'une double somme

$$I_\epsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}, \exists P_{kl,\epsilon}\subset P} \epsilon \sum_{l\in\mathbb{Z}, P_{kl,\epsilon}\subset P} \epsilon f(k\epsilon, l\epsilon).$$

La somme intérieure tend vers $\int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)dx$ et la somme extérieure tend vers $\int_a^b \left(\int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)dx\right) dy$. □

**Théorème 10.** *Supposons que le domaine $P \subset \mathbb{R}^3$ soit un domaine délimité par les graphes de deux fonctions $\varphi_0(y, z)$ et $\varphi_1(y, z)$ définies sur un domaine $\Delta$ du plan des coordonnées $(y, z)$. Alors l'intégrale triple se calcule à l'aide d'une intégrale double et d'une intégrale simple :*

$$\iiint_P f(x, y, z)dxdydz = \iint_\Delta \left(\int_{\varphi_0(y,z)}^{\varphi_1(y,z)} f(x, y, z)dx\right) dydz.$$

*Démonstration.* (idée) Il s'agit de décomposer la somme de Riemann

$$I_\epsilon = \sum_{(k,l,m)\in\mathbb{Z}^3, P_{klm,\epsilon}\subset P} \epsilon^3 f(k\epsilon, l\epsilon, m\epsilon)$$

sous la forme d'une double somme

$$I_\epsilon = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2, \exists P_{klm,\epsilon}\subset P} \epsilon^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}, P_{klm,\epsilon}\subset P} \epsilon f(k\epsilon, l\epsilon, m\epsilon).$$

La somme intérieure tend vers $\int_{\varphi_0(y,z)}^{\varphi_1(y,z)} f(x,y,z)dx$ et la somme extérieure tend vers $\iint_\Delta \left(\int_{\varphi_0(y,z)}^{\varphi_1(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dydz.$ □

**Exemple 45.** *Soit* $P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$ *et* $f(x,y) = x^2$*. L'intégrale de* $f$ *vaut par Fubini*

$$\int_P f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y x^2 dx\right)dy = \frac{1}{12}.$$

**Théorème 11.** *Supposons que pour* $(x,y,z)\in P\subset\mathbb{R}^3$*,* $z$ *varie sur un intervalle fixe* $[z_0,z_1]$*, et que pour* $z$ *fixé,* $(x,y)$ *varie dans un domaine* $\Delta(z)$ *qui dépend de* $z$*. Alors l'intégrale triple se calcule à l'aide d'une intégrale simple et d'une intégrale double :*

$$\iiint_P f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_0}^{z_1}\left(\iint_{\Delta(z)} f(x,y,z)dxdy\right)dz.$$

*Démonstration.* (idée) Il s'agit de décomposer la somme de Riemann

$$I_\epsilon = \sum_{(k,l,m)\in\mathbb{Z}^3, P_{klm,\epsilon}\subset P} \epsilon^3 f(k\epsilon, l\epsilon, m\epsilon)$$

sous la forme d'une double somme

$$I_\epsilon = \sum_{(k)\in\mathbb{Z}, \exists P_{klm,\epsilon}\subset P} \epsilon \sum_{(l,m)\in\mathbb{Z}^2, P_{klm,\epsilon}\subset P} \epsilon^2 f(k\epsilon, l\epsilon, m\epsilon).$$

La somme intérieure tend vers $\iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy$ et la somme extérieure tend vers $\int_{z_0}^{z_1}\left(\iint_{\Delta(z)} f(x,y,z)dxdy\right)dz.$ □

'

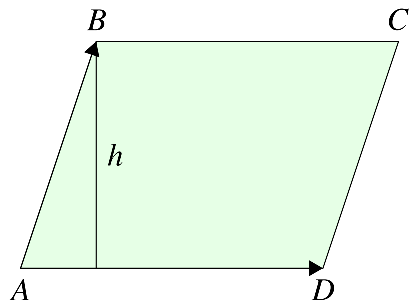
**Exemple 46.** *Soit* $P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 0\le z\le 1,\ 0\le y\le z,\ 0\le x\le y\}$ *et* $f(x,y) = 2xyz$*. L'intégrale de* $f$ *vaut par Fubini*

$$\int_P f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1\left(\int_0^z\left(\int_0^y 2xyzdx\right)dy\right)dz = \frac{1}{24}.$$

## IV.4 Deuxième méthode de calcul : changement de variables

### (a) Aire d'un parallélogramme et déterminant

Considérons le parallélogramme $(ABCD)$ dessiné ci-dessous :




L'aire du parallélogramme $(ABCD)$ est égale au produit de la longueur de la base $[AD]$ par la hauteur $h$, car elle est égale à celle du rectangle ayant ces dimensions (il suffit de découper le triangle de gauche de la figure et de le recoller à droite de la figure). Si on note $\theta$ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, on sait que la hauteur est égale à

$$h = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \sin(\theta).$$

On obtient donc

$$\text{aire}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \sin(\theta).$$

Par la définition géométrique du sinus de l'angle $\theta$, cette expression est exactement égale au déterminant

$$\text{aire}(ABCD) = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$

de la matrice dont les colonnes sont les deux vecteurs donnés.

Maintenant, si on se donne une application linéaire $T$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, l'aire de l'image du carré $C = [0,1]^2$ par $T$ est l'aire du parallélogramme $T([0,1]^2)$, qui vaut

$$\text{aire}(T([0,1])^2) = |\det(T)|.$$

De manière plus générale, si on considère le carré $[0,\epsilon]^2$, alors l'aire de son image par $T$ est

$$\text{aire}(T([0,\epsilon]^2)) = \epsilon^2 |\det(T)|.$$

### (b) Aire de l'image d'un carré élémentaire par un changement de variable

Considérons maintenant une application de changement de variable

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & P & \to & \Delta \\ & (x,y) & \mapsto & \Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$

d'un domaine $P \subset \mathbb{R}^2$ dans un domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ qu'on suppose bijective, dérivable et de dérivée continue, telle que la matrice jacobienne

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

soit inversible en tout point $(x, y)$.

Supposons que le petit carré $P_{nl,\epsilon}$ de sommet $(n\epsilon, l\epsilon)$ pour $(n, l) \in \mathbb{Z}^2$ donné et de coté $\epsilon$ soit inclus dans $P$. Par définition, l'application $\Phi$ est bien approchée au premier ordre par l'application linéaire donnée par sa matrice différentielle. Plus précisément, on a

$$\Phi(x + h_1, y + h_2) = \Phi(x, y) + D\Phi(x, y) \cdot (h_1, h_2) + o(h_1, h_2).$$

L'image par $\Phi$ du petit carré $P_{nl,\epsilon}$ (dont l'aire était $\epsilon^2$) a donc pour aire

$$\text{aire}(\Phi(P_{nl,\epsilon})) = |\det(D\Phi(x, y))|\epsilon^2 + o(\epsilon, \epsilon).$$

### (c) Changement de variable en dimension 2

**Théorème 12.** *Soit $\Phi : P \to \Delta$ un changement de variable entre deux domaines $P$ et $\Delta$ de $\mathbb{R}^2$, comme dans la section précédente, et $f$ une fonction sur $\Delta$. On a alors l'égalité*

$$\iint_\Delta f(x, y)dxdy = \iint_P f(\Phi(u, v))|\det(D\Phi(u, v))|dudv.$$

*Le déterminant qui apparaît dans la formule est appelé déterminant jacobien.*

*Démonstration.* (idée) Par définition, l'intégrale de droite est approchée par la somme

$$I_\epsilon = \sum_{P_{nl,\epsilon} \subset P} f(\Phi(n\epsilon, l\epsilon))|\det(D\Phi(n\epsilon, l\epsilon))|\epsilon^2,$$

qui correspond à approcher le volume sous le graphe de la fonction $(f \circ \Phi) \cdot \det(D\Phi)$ par de petits pavés dont les bases sont des carrés de taille $\epsilon$ et de sommet $(n\epsilon, l\epsilon)$ pour $(n, l) \in \mathbb{Z}^2$. On utilise alors le calcul de la section précédente qui nous dit que

$$\text{aire}(\Phi(P_{nl})) = |\det(D\Phi(x, y))|\epsilon^2 + o(\epsilon, \epsilon).$$

Il est raisonnable de considérer (comme $\Phi$ est continuement différentiable inversible, recouvrir $P$ par les petits carrés $P_{nl,\epsilon}$ qu'il contient revient à recouvrir $\Delta$ par leurs images $\Phi(P_{nl,\epsilon})$, qui sont des versions déformées de ces petits carrés) que l'intégrale de $f$ sur $\Delta$ peut être calculée comme limite des sommes

$$\sum_{(n,l) \in \mathbb{Z}^2, \Phi(P_n l) \subset \Delta} \text{aire}(\Phi(P_{nl})) \cdot f(\Phi(n\epsilon, l\epsilon)).$$

Par passage à la limite et utilisation de l'estimation ci-dessus pour l'aire de $\Phi(P_{nl,\epsilon})$, on obtient le résultat voulu. □

**Exemple 47** (Calcul en coordonnées polaires)**.** *On souhaite calculer l'intégrale double*

$$I = \iint_{\Delta} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy,$$

*où* $\Delta$ *est le disque de rayon* 1*, i.e.,* $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$*. On utilise le changement de variable donné par les coordonnées polaires*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & P = [0,1] \times [0, 2\pi] & \to & \Delta \\ & (r, \Theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

*Le déterminant jacobien vaut*

$$\det(D\Phi(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

*En termes abrégés, on écrit souvent* $dxdy = rdrd\theta$*. Par ce changement de variables, l'intégrale qu'on souhaite calculer devient*

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{1 + r^2} rdrd\theta.$$

*En utilisant le théorème de Fubini, on obtient*

$$I = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \frac{rdr}{1 + r^2} \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{rdr}{1 + r^2}.$$

*On applique ensuite le changement de variable* $u = r^2$ *en utilisant* $du = 2rdr$ *pour conclure que*

$$I = \pi \int_0^1 \frac{d(r^2)}{1 + r^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{1 + u} = \pi[\ln(1 + u)|_0^1 = \pi \ln(2).$$

### (d) Changement de variable en dimension 3

Un raisonnement similaire à celui fait dans la sous-section (c), basé sur l'approximation au premier ordre

$$\Phi\left((x, y, z) + \overrightarrow{h}\right) = f(x, y, z) + D\Phi(x, y, z) \cdot \overrightarrow{h} + o\left(\overrightarrow{h}\right)$$

d'un changement de variable par sa différentielle, permet d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 13.** *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & P & \to & \Delta \\ & (u, v, w) & \mapsto & (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{array}$$

*un changement de variable entre deux domaines* $P$ *et* $\Delta$ *de* $\mathbb{R}^3$*, i.e., une application bijective dérivable et de dérivées partielles continues telle que la différentielle*

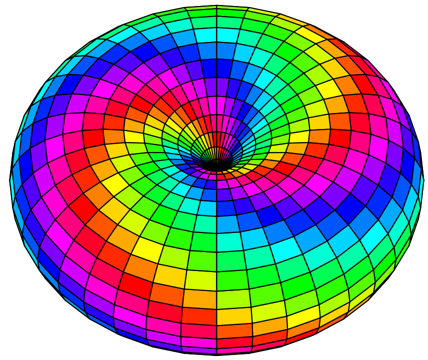
$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

*soit une matrice inversible (i.e. de déterminant non nul) en tout point de $P$. Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors on a*

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)dxdydz = \iiint_P f(\Phi(u,v,w))|D\Phi(u,v,w)|dudvdw,$$

*où $|D\Phi(u,v,w)|$ désigne la valeur absolue du déterminant jacobien.*

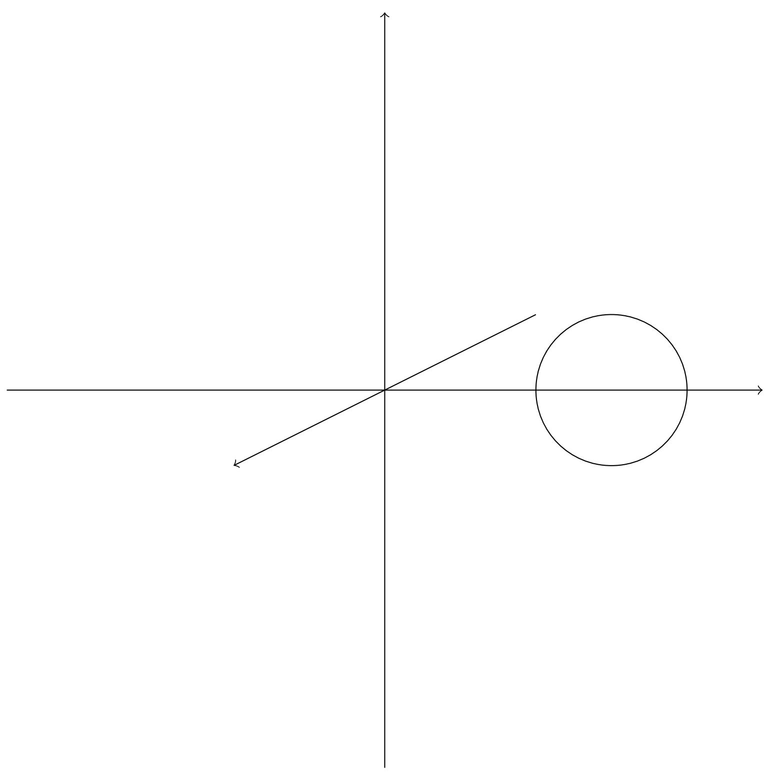
**Exemple 48** (Calcul du volume d'un tore de révolution)**.** *On souhaite calculer le volume d'une roue de vélo $R$,*



*qui est le domaine de l'espace décrit par*

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x^2+y^2-a)^2+z^2 \leq R^2\}$$

*avec $a > R > 0$ des constantes données. Il s'agit donc du domaine engendré par la rotation autour de l'axe $Oz$ d'un cercle du plan $Oxz$ de centre $(a,0)$ et de rayon $R$.*



*On désire calculer*

$$I = \text{volume}(R) = \iiint_R dxdydz.$$

*On utilise le changement de variables en coordonnées polaires en $(x,y)$, ce qui donne par le théorème de Fubini*

$$I = \iiint_{D_R(a)\times[0,2\pi]} rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi}\left(\iint_{D_R(a)} drdz\right)d\theta = 2\pi J(a,R)$$

*avec*

$$J(a,R) := \iint_{D_R(a)} rdrdz$$

*et $D_R(a)$ le disque de centre $(a,0)$ et de rayon $R$, c'est à dire*

$$D_R(a) := \{(r,z) \in \mathbb{R}^2,\ (r-a)^2 + z^2 \le R^2\}.$$

*On remarque ensuite que $D_R(a)$ est symétrique par rapport à la verticale passant par $(a,0)$ et $r-a$ est impaire, ce qui implique*

$$\iint_{D_R(a)} (r-a)drdz = 0.$$

*On a donc*

$$J(a,R) = a\iint_{D_R(a)} drdz = a\pi R^2.$$

*Le volume de la roue de vélo est donc*

$$\text{volume}(R) = 2\pi^2 aR^2.$$

# V Formes différentielles générales

(3-4 séances)

## V.1 Motivations pour passer aux formes différentielles

**Définition intuitive :** Les formes différentielles sont les objets naturels qu'on peut intégrer sur des domaines non plats (courbes, surfaces, volumes).

**But de leur introduction :** Développer un système de notation permettant au calcul vectoriel et intégral d'être invariant par changement de repère (formule du changement de variable automatique). Cette invariance par rapport au repère est fondamentale dans la formulation mathématique des lois de la physique.

**Intérêt :** Simplifier les calculs, et donner une formule d'intégration (formule de stokes) générale

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega,$$

qui implique toutes les formules intégrales utilisées en mécanique des fluides et en électromagnétisme et généralise la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral

$$\int_{[a,b]} df := \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) =: \int_{\{b+,a-\}} f = \int_{\partial[a,b]} f$$

au cas d'une surface $D = S$ bordée par une courbe $\partial D = C$, et à celui d'un volume $D = V$ bordé par une surface $\partial D = S$.

**Précautions :** Toutes les fonctions utilisées dans ce texte sont supposées infiniment continument dérivables sur leur domaine de définition.

## V.2 Formes différentielles : généralités

On va commencer par une définition un peu abstraite, mais qui permet de vraiment comprendre le lien profond entre formes différentielles et intégrales, pour ensuite décrire plus concrètement les choses en dimension 1, 2 et 3.

Afin d'être complet, on donne la définition (difficile à comprendre) des $k$-formes différentielles, qui sont des objets qu'on va intégrer sur des domaines de dimension $k$.

**Définition.** *Une $k$-forme différentielle sur $D \subset \mathbb{R}^n$ est une application*

$$\begin{array}{rccc} \omega : & D \times (\mathbb{R}^n)^k & \to & \mathbb{R} \\ & (x, \overrightarrow{dx}^1, \ldots, \overrightarrow{dx}^k) & \mapsto & \omega(x, \overrightarrow{dx}^1, \ldots, \overrightarrow{dx}^k) \end{array}$$

*qui est linéaire en chacun des composantes* $\overrightarrow{dx}^i = [dx_1^i, \ldots, dx_n^i]$ *et alternée, i.e., qui change de signe quand on échange* $\overrightarrow{dx}^i$ *avec* $\overrightarrow{dx}^j$ *pour* $i \neq j$ *:*

$$\omega(x, \ldots, \overrightarrow{dx}^i, \ldots, \overrightarrow{dx}^j, \ldots) = -\omega(x, \ldots, \overrightarrow{dx}^j, \ldots, \overrightarrow{dx}^i, \ldots).$$

*Une forme différentielle générale est une somme de formes différentielles de degrés éventuellement différents.*

Plus concrètement, une $k$-forme est une somme finie de la forme

$$\omega = \sum f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

où le produit extérieur $\wedge$ est une multiplication qui vérifie des propriétés similaires à celles du produit vectoriel :

$$\begin{array}{lrcl} \text{(antisymétrie)} & dx_i \wedge dx_j & = & -dx_j \wedge dx_i, \\ \text{(associativité)} & \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) & = & (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3, \\ \text{(bilinéarité)} & (f_1\omega_1 + f_2\omega_2) \wedge \omega_3 & = & f_1.\omega_1 \wedge \omega_3 + f_2.\omega_2 \wedge \omega_3. \end{array}$$

De la première règle, on déduit $dx_i \wedge dx_i = 0$. Si $f \in \Omega^0$ est une fonction et $\omega$ est une forme, leur produit extérieur sera

$$f \wedge \omega = f \cdot \omega = \omega \cdot f = \omega \wedge f$$

(on dit que les fonctions, i.e., les 0-formes, commutent à toutes les autres formes pour le produit extérieur).

**Exemple 49.** *La forme différentielle* $\omega = dx$ *sur* $\mathbb{R}$ *est définie par*

$$\omega((x), [dx^1]) := dx^1.$$

*Elle donne la longueur (orientée) du vecteur* $\overrightarrow{dx}^1 = [dx^1]$ *de* $\mathbb{R}$. *La forme différentielle* $\omega = dx \wedge dy$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *est définie par*

$$\omega((x, y), [dx^1, dy^1], [dx^2, dy^2]) = dx^1 dy^2 - dy^1 dx^2.$$

*Elle est donc simplement donnée par le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les deux vecteurs* $\overrightarrow{dx}^1 = [dx^1, dy^1]$ *et* $\overrightarrow{dx}^2 = [dx^2, dy^2]$. *Elle donne donc exactement la surface du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs. Plus généralement, tous les produits extérieurs de formes coordonnées sont donnés par des sous-déterminants de matrices de la forme* $[\overrightarrow{dx}^1, \cdots, \overrightarrow{dx}^k]$, *et les formes différentielles générales sont des sommes de telles expressions donc les coefficients sont des fonctions de* $x$. *Le lien entre le changement de variable dans les intégrales et le déterminant est ce qui explique l'origine conceptuelle du formalisme des formes différentielles.*

**Définition.** *On définit la différentielle extérieure* $d : \Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ *par les règles suivantes :*

1. *La différentielle* $df \in \Omega^1$ *d'une* $0$*-forme (fonction)* $f$ *est la* $1$*-forme différentielle définie par les dérivées partielles de la fonction :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

2. *Si $f$ est une fonction et $\omega$ est une forme différentielle produit extérieur des formes coordonnées $dx_i$, (par exemple $\omega = dx_1$, $\omega = dx_1 \wedge dx_2$) alors*

$$d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega.$$

3. *La différentielle est linéaire par rapport aux contantes : pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$d(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2$$

**Exemple 50.** *La forme différentielle $\omega = xydx + x^2z^3dx \wedge dy$ sur $\mathbb{R}^3$ a pour différentielle*

$$\begin{array}{rcc} d\omega & = & d(xy) \wedge dx + d(x^2z^3) \wedge dx \wedge dy \\ & = & [ydx + xdy] \wedge dx + [2xz^3dx + 3z^2x^2dz] \wedge dx \wedge dy \\ & = & ydx \wedge dx + xdy \wedge dx + 2xz^3dx \wedge dx \wedge dy + 3z^2x^2dz \wedge dx \wedge dy \\ & = & xdy \wedge dx + 2x^2z^2dz \wedge dx \wedge dy \\ & = & -xdx \wedge dy + 2x^2z^2dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

**Remarque 6.** *On peut montrer à partir des règles de calculs les propriétés suivantes de la différentielle extérieure :*

1. *La différentielle du produit d'une fonction $f \in \Omega^0$ et d'une k-forme $\omega \in \Omega^k$ est donnée par*

$$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega.$$

2. *Plus généralement, la différentielle du produit de $\omega \in \Omega^k$ et $\eta \in \Omega^l$ vérifie la règle de dérivation graduée*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. *On a $d^2 = d \circ d = 0$, i.e., $d(d\omega) = 0$.*

*La dernière relation $d(d(\omega)) = 0$ découle du théorème de Schwarz (théorème 4) et n'est valide que quand les fonctions coefficients sont deux fois continuement dérivables en les paramètres.*

Regardons pourquoi $d^2 = 0$ sur un exemple.

**Exemple 51.** *Soit $f(x, y)$ une fonction sur $\mathbb{R}^2$ qu'on suppose deux fois continuement dérivable. La différentielle de sa différentielle est*

$$\begin{array}{rcc} d(df) & = & d[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy] \\ & = & d(\frac{\partial f}{\partial x}) \wedge dx + d(\frac{\partial f}{\partial y}) \wedge dy \\ & = & [\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy] \wedge dx + [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}dy] \wedge dy \\ & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx \wedge dy \\ & = & [\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}]dx \wedge dy \\ & = & 0 \end{array}$$

*à cause du théorème de Schwarz qui dit que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

**Définition.** *Une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(D)$ est dite fermée si*

$$d\omega = 0,$$

*et exacte si elle admet une primitive, i.e., si il existe $\eta \in \Omega^{k-1}(D)$ telle que*

$$d\eta = \omega.$$

La relation $d(d\omega) = 0$ implique que toute forme exacte est aussi fermée. Le résultat suivant est une réciproque partielle.

**Théorème 14** (Lemme de Poincaré)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine sans trou. Toute forme fermée sur D est aussi exacte.*

**Exemple 52.** *La forme différentielle du plan $\omega = 2xydx + x^2dy$ a pour différentielle*

$$\begin{array}{rcl} d\omega & = & d(2xy) \wedge dy + d(x^2) \wedge dy \\ & = & 2ydx \wedge dx + 2xdy \wedge dy + 2xdx \wedge dy + 0dy \wedge dy \\ & = & [-2x + 2y]dx \wedge dy \\ & = & 0 \end{array}$$

*donc elle est fermée sur $\mathbb{R}^2$. Le lemme de Poincaré nous dit qu'elle est exacte, i.e., qu'il existe $f$ telle que $df = \omega$. En résolvant le système*

$$df = 2xydx + x^2dy,$$

*on trouve $f(x, y) = x^2y + c$ avec $c$ une constante réelle.*

**Exemple 53.** *La forme différentielle du plan $\omega = 2ydx + 3xdy$ n'est pas fermée car*

$$d\omega = 2dy \wedge dx + 3dx \wedge dy = dx \wedge dy.$$

**Remarque 7.** *Attention, sur un domaine à trou, comme par exemple le plan privé de l'origine $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, il existe des formes fermées qui ne sont pas exactes. Par exemple, la forme $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ est bien définie sur D, et elle y est fermée car*

$$\begin{array}{rcc} d\omega & = & d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx \\ & = & \frac{1.(x^2+y^2)-x.(2x)}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy - \frac{1.(x^2+y^2)-y.(2y)}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx \\ & = & \frac{1}{(x^2+y^2)^2}[-x^2 + y^2 + x^2 - y^2]dx \wedge dy \\ & = & 0 \end{array}$$

*On a vu qu'elle ne peut être exacte car son intégrale le long du cercle unité est non nulle.*

Pour définir l'intégrale, on aura besoin de tirer les formes différentielles le long d'applications différentiables.

**Définition.** *Soit $f : X \to Y$ une application différentiable entre un domaine de $\mathbb{R}^n$ et un domaine de $\mathbb{R}^m$ et $\omega \in \Omega^k(Y)$. On définit le tiré en arrière $f^*\omega \in \Omega^k(X)$ en utilisant les règles de calcul suivantes :*

1. *On a*
$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).$$
2. *Si* $g \in \Omega^0$ *est une fonction, on pose* $f^*(g) = f \circ g$.
3. *On a*
$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$
4. *On a*
$$f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta.$$

Sur les 1-formes coordonnées, le tiré en arrière correspond à la règle de remplacement

$$d(x(t)) = x'(t)dt$$

pour les différentielles de Leibniz, utile pour calculer la différentielle d'une fonction composée.

**Exemple 54.** *Soit* $M : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$*, avec* $M(t) = (x(t), y(t))$ *une courbe paramétrée et* $\omega = f dx + g dy$ *une* 1*-forme de* $\mathbb{R}^2$ *définie sur la courbe. Alors en utilisant les règles de calcul successivement, on obtient*

$$\begin{array}{rcl} M^*(\omega) & = & M^*(f) \wedge M^*(dx) + M^*(g) \wedge M^*(dy) \\ & = & f \circ M \wedge d(M^*x) + g \circ f \wedge d(M^*y) \\ & = & f(x(t), y(t))d(x(t)) + g(x(t), y(t))d(y(t)) \\ & = & f(x(t), y(t))x'(t)dt + g(x(t), y(t))y'(t)dt. \end{array}$$

On définit d'abord très facilement l'intégrale des $k$-formes différentielles sur un domaine $\Delta$ de dimension $k$ de $\mathbb{R}^k$, en utilisant l'intégrale de Riemann.

**Définition.** *Soit* $\Delta$ *un domaine de dimension* $k$ *de* $\mathbb{R}^k$*, dont les coordonnées sont notées (dans l'ordre, et cela a une importance)* $(x_1, \ldots, x_k)$*, et* $\omega \in \Omega^k(\Delta)$ *une* $k$*-forme définie sur* $\Delta$*, qu'on écrit sous sa forme standard (toujours dans l'ordre)*
$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$
*L'intégrale de* $\omega$ *sur* $\Delta$ *est définie comme l'intégrale de Riemann de la fonction* $f$ *:*

$$\oint_\Delta \omega := \int_\Delta f(x_1, \ldots, x_k)dx_1 \ldots dx_k.$$

On définit maintenant les paramétrisations, qui permettent de définir l'intégrale des $k$-formes différentielles sur des domaines de dimension $k$ de $\mathbb{R}^n$.

**Définition.** *Un domaine paramétré de dimension* $k$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *est une application*

$$M : \Delta \to \mathbb{R}^n,$$

*dont l'image est notée* $D$*, avec* $\Delta \subset \mathbb{R}^k$*, qui est deux fois continuement différentiable et vérifie*

1. $M$ *est injective,*

2. *la différentielle* $DM(x) = [\frac{\partial M_i}{\partial x_j}](x)$ *de* $M$ *est une matrice injective (i.e., de noyau nul) en tout point* $x \in \Delta$.

*Si* $M : \Delta \to D$ *est un domaine paramétré de dimension* $k$ *et* $\omega \in \Omega^k(D)$ *est une* $k$*-forme, l'intégrale correspondante est définie par*

$$\oint_{D,M} \omega := \oint_{\Delta} M^* \omega.$$

La justification de la notation $\oint_D \omega$ pour l'intégrale d'une forme différentielle, vient essentiellement du fait suivant :

on peut "oublier" la paramétrisation $M$ dans la notation $\oint_{D,M} \omega$ si on se souvient de l'orientation correspondante.

Ce fait, et l'intérêt du formalisme des formes différentielles, résident dans le résultat suivant, qui dit que ce formalisme ne dépend pas du choix des coordonnées, ou encore qu'il donne des résultats qui sont invariants par les symétries données par les changements de variables préservant l'orientation.

**Théorème 15.** *L'intégrale d'une* $k$*-forme sur un domaine paramétré* $M : \Delta \to D$ *ne dépend pas de la paramétrisation de l'image* $D = M(\Delta)$*. Plus précisément, si* $M' : \Delta' \to D$ *est une autre paramétrisation, et qu'on suppose que le changement de variables* $\Phi = M^{-1} \circ M' : \Delta' \to \Delta$ *entre le deux paramétrisation vérifie* $\det(D\Phi) > 0$ *en tout point (on dit qu'il préserve l'orientation), alors, puisque* $M' = M \circ \Phi$*, on a*

$$\oint_{D,M} \omega = \oint_{D,M'} \omega.$$

*Démonstration.* Ceci découle de la formule du changement de variable dans l'intégrale de Riemann pour le changement de variable $\Phi : \Delta' \to \Delta$. En effet, si $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ est la $k$-forme volume sur $\Delta$ et $du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ est la $k$-forme volume sur $\Delta'$, la relation $\Phi(u_1, \ldots, u_k) = (x_1, \ldots, x_k)$ donne (calcul qu'on fera en dimension 2 et 3)

$$\Phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \det(D\Phi) \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

Donc si on écrit en coordonnées

$$M^* \omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

on obtient

$$M'^* \omega = \det(D\Phi) \cdot f(\Phi(u_1, \ldots, u_k)) \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

En utilisant ce calcul explicite et le théorème de changement de variable sur un domaine de $\mathbb{R}^k$ (valable puisque le déterminant du changement de variables est positif), on obtient

$$\oint_{\Delta} M^* \omega = \oint_{\Phi(\Delta)} M^*(\Phi^*(\omega)) = \oint_{\Delta'} M'^* \omega.$$

□

## V.3 Questions d'orientations

On termine cette section en s'intéressant de plus près aux questions d'orientations sur des domaines définis par des équations. En effet, les domaines définis par des contraintes en physique, sur lesquels on souhaite intégrer, sont souvent définis par des équations/inéquations. D'un point de vue pratique, on les paramètre en appliquant le théorème des fonctions implicites, mais la théorie ne doit pas vraiment dépendre de la paramétrisation : seule l'orientation, i.e., le sens possible de parcours de la paramétrisation, doit jouer un rôle : celui de déterminer le signe de l'intégrale.

Une orientation sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ défini par une famille d'équations est donnée par le choix d'un signe pour le déterminant d'une base de l'espace tangent $T_xP$ au domaine, en chaque point $x$, et variant continuement par rapport au point. On va voir concrètement comment définir une telle orientation sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ des zéros d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Les généralités abordées ici sont difficiles d'accès, et le lecteur pourra s'en passer, puisqu'on verra plus concrètement ce qu'elles signifient dans le cas simple d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ ou d'une surface dans $\mathbb{R}^3$.

**Définition.** *Une sous-variété $D = Z(f)$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble défini comme l'ensemble des zéros d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, i.e., $D = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$. L'espace tangent en $x \in D$ est le noyau $T_xD$ de la différentielle en $x$, i.e.,*

$$T_xD := \mathrm{Ker}(Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p).$$

*On dit que la sous-variété est lisse si la différentielle $Df(x)$ est une application linéaire surjective en tout point $x$ de $D$. Ceci revient à dire (théorème du rang) que $T_xD$ est de dimension $n - p$ en tout point $x$ de $D$ (il n'y a pas de saut dans la dimension de l'espace tangent).*

**Exemple 55.** *Voici deux exemple de sous-variétés de dimension 1 (courbes) de $\mathbb{R}^2$.*

1. *Le cercle $S^1 := \{(x, y),\ x^2 + y^2 = 1\}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ (on dit plutôt courbe lisse). En effet, la différentielle de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ vaut*

$$df = 2xdx + 2ydy$$

   *et ceci ne s'annule jamais sur $S^1$ car le seul point $(0, 0)$ d'annulation n'est pas dans le cercle.*

2. *La courbe $C := \{(x, y),\ y^2 = x^3\}$ n'est pas lisse en $(0, 0)$ car la dimension de son espace tangent est 2 en ce point : si on pose $f(x, y) = y^2 - x^3$, on a*

$$df = 2ydy - 3x^2dx$$

   *et $df(0, 0) = 0$ donc la différentielle n'est pas surjective en ce point, puisqu'elle est nulle. Lorsqu'on dessine la courbe, on peut voir qu'elle est "pointue" en $(0, 0)$. Ceci s'explique aussi par le calcul qui dit que l'espace tangent en ce point est de dimension 2 (alors que sur une courbe lisse, i.e., bien arrondie, la dimension de l'espace tangent est toujours 1 : la tangente est une droite).*

**Proposition 19.** *Si $D = Z(f)$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$, elle est canoniquement munie d'une orientation définie de la manière suivante : si $\{e_1, \ldots, e_{n-p}\}$ est une base de l'espace tangent $T_xD$ en $x \in D$, on dit qu'elle est directe si, quand on la complète en une base directe (de déterminant positif) de $\mathbb{R}^n$, son image par la différentielle $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est directe (de déterminant positif).*

**Définition.** *Soit $M : \Delta \to D$ une paramétrisation d'une sous-variété lisse $D = Z(f)$ de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k$, avec $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ (par exemple définie localement à l'aide du théorème des fonctions implicites). On dit que la paramétrisation $M$ respecte l'orientation naturelle de $D$ si l'image d'une base directe de $\mathbb{R}^k$ par la différentielle $DM(x) : \mathbb{R}^k \to T_{M(x)}P$ en $x \in \Delta$ est une base directe de $T_xP$.*

**Remarque 8.** *Une paramétrisation $M : \Delta \to D = Z(f)$ respecte l'orientation naturelle de $Z(f)$ si et seulement si pour tout $x \in \Delta$, la réunion ordonnée (placée dans l'ordre) de l'image de la base naturelle de $\mathbb{R}^k$ par $DM(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ et l'image inverse de la base naturelle de $\mathbb{R}^p$ ($p + k = n$) par $D(f)(M(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ forme une base directe (de déterminant positif) de $\mathbb{R}^n$.*

Maintenant qu'on a parlé de la notion d'orientation, on peut écrire les intégrales de formes différentielles en utilisant une notation qui ne dépend pas du choix de la paramétrisation du domaine d'intégration, mais seulement de son orientation.

**Définition.** *Soit $D = Z(f) \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension $k$ de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega^k(D)$. Supposons qu'il existe une paramétrisation $M : \Delta \to D$ de $D$ respectant l'orientation naturelle de $D$. L'intégrale de $\omega$ sur $D$ est définie par*

$$\oint_D \omega := \oint_{D,M} \omega := \oint_\Delta M^*\omega.$$

## V.4 Formes différentielles en dimension 1, 2 et 3

On décrit maintenant plus concrètement les formes différentielles de degré $k = 0, 1, 2, 3$ sur $D \subset \mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$.

**Proposition 20.**

1. *Une 0-forme différentielle $\omega \in \Omega^0(D)$ est une fonction $f$ des coordonnées.*
2. *Une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1(D)$ est une expression de la forme*

$$\begin{array}{ll} \omega = f dx & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}) \\ \omega = f dx + g dy & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}^2) \\ \omega = f dx + g dy + h dz & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}^3) \end{array}$$

   *avec $f$, $g$ et $h$ des fonctions des coordonnées.*
3. *Une 2-forme différentielle $\omega \in \Omega^2(D)$ est une expression de la forme*

$$\begin{array}{ll} \omega = f dx \wedge dy & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}^2) \\ \omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}^3) \end{array}$$

   *avec $f$, $g$ et $h$ des fonctions des coordonnées.*
4. *Une 3-forme différentielle $\omega \in \Omega^3(D)$ est une expression de la forme*

$$\omega = f dx \wedge dy \wedge dz.$$

**Définition.** *On définit la différentielle extérieure $d : \Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ par les règles suivantes :*

1. *La différentielle* $df \in \Omega^1$ *d'une* 0*-forme (fonction)* $f$ *est la* 1*-forme différentielle définie par les dérivées partielles de la fonction :*

$$\begin{array}{ll} df = f'dx & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}) \\ df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}^2) \\ df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz & (\text{sur } D \subset \mathbb{R}^3) \end{array}$$

2. *Si* $f$ *est une fonction et* $\omega$ *est une forme différentielle produit extérieur des formes coordonnées* $dx$*,* $dy$*,* $dz$ *(par exemple* $\omega = dx$*,* $\omega = dz \wedge dx$ *ou* $\omega = dy \wedge dx \wedge dz$*) alors*

$$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega.$$

3. *La différentielle est additive :* $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$*.*

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, si $\omega = f dx$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par

$$d\omega = df \wedge dx + f \wedge d^2x = f'(x)dx \wedge dx + 0 = 0.$$

De même sur $\mathbb{R}^2$, si $\omega = f dx + g dy$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par

$$\begin{array}{rcl} d\omega & = & df \wedge dx + dg \wedge dy \\ & = & (\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy) \wedge dx + (\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy) \wedge dy \\ & = & \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy \\ & = & (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy. \end{array}$$

De même sur $\mathbb{R}^3$, si $\omega = f dx + g dy + h dz$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par

$$\begin{array}{rcl} d\omega & = & df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ & = & (\frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx) + (\frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge dy) + (\frac{\partial h}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y}dy \wedge dz) \\ & = & (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy \end{array}$$

## V.5 Opérateurs différentiels et différentielle extérieure

On montre maintenant que du point de vue des formes différentielles, les opérateurs différentiels classiques sur les champs de vecteurs (gradient, rotationnel, divergence) s'identifient à la différentielle extérieure.

On note $\mathcal{V}$ l'espace des champs de vecteurs, qui sont des fonctions $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour $n = 2, 3$, qu'on peut écrire en coordonnées

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{V}(x,y) & = & (f(x,y), g(x,y)) & (\text{sur } \mathbb{R}^2) \\ \overrightarrow{V}(x,y,z) & = & (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)) & (\text{sur } \mathbb{R}^3). \end{array}$$

On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions $f$ des coordonnées.

On va symboliser le lien entre les opérateurs du calcul vectoriel et la différentielle extérieure par des diagrammes d'applications et d'équivalences. Ce lien permet de retrouver toutes les formules différentielles et intégrales pour ces opérateurs.

**Définition.** *Sur $\mathbb{R}^2$, si $\overrightarrow{V} = (f, g)$ est un champ de vecteurs, la $1$-forme associée à $\overrightarrow{V}$ est la $1$-forme*

$$\omega_{\overrightarrow{V}} = f dx + g dy.$$

*Le rotationnel de $\overrightarrow{V}$ est la fonction*

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) := \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \overrightarrow{V} \arrow[d, phantom, "\parallel" description] & \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{grad}}"] \arrow[dd, equal] & \underset{}{\overset{(f,g)}{\mathcal{V}}} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[dd, equal] & \overset{f}{\mathcal{F}} \arrow[dd, equal] \\
 & & \\
\Omega^0 \arrow[r, "d"] & \underset{f dx + g dy}{\Omega^1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\parallel" description] & \underset{f dx \wedge dy}{\Omega^2} \\
 & \omega_{\overrightarrow{V}} &
\end{tikzcd}$$

On a déjà vu par un calcul dans la section précédente que

$$d(f dx + g dy) = \mathrm{rot}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy.$$

**Définition.** *Sur $\mathbb{R}^3$, si $\overrightarrow{V} = (f, g, h)$ est un vecteur, la $1$-forme associée à $\overrightarrow{V}$ est la $1$-forme*

$$\omega_{\overrightarrow{V}} := f dx + g dy + h dz,$$

*et la $2$-forme (dite forme de flux) associée à $\overrightarrow{V}$ est la $2$-forme*

$$\xi_{\overrightarrow{V}} = * \omega_{\overrightarrow{V}} := f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy.$$

*Le rotationnel de $\overrightarrow{V}$ est le champ de vecteurs*

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) & = & (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \wedge (f, g, h) \\ & := & (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}). \end{array} .$$

*La divergence de $\overrightarrow{V}$ est la fonction*

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (f, g, h) := \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Remarquons que la 2-forme de flux $*\omega_{\overrightarrow{V}}$ est obtenue à partir de la 1-forme $\omega_{\overrightarrow{V}}$ par le remplacement suivant, appelé opérateur étoile de Hodge :

$$\begin{array}{rcl} dx & \longmapsto & *dx := dy \wedge dz \\ dy & \longmapsto & *dy := dz \wedge dx \\ dz & \longmapsto & *dz := dx \wedge dy \end{array}$$

On peut maintenant expliquer la relation entre la notation $\wedge$ pour le produit vectoriel des vecteurs et la notation $\wedge$ pour le produit extérieur des formes différentielles.

**Proposition 21.** *Soit $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ deux champs de vecteurs. On a alors l'égalité*

$$\omega_{\overrightarrow{V}} \wedge \omega_{\overrightarrow{W}} = *\,\omega_{\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{W}},$$

*i.e., la 2-forme de flux associée au produit vectoriel des deux vecteurs est égale au produit extérieur des 1-formes de travail correspondantes.*

*Démonstration.* On a

$$\begin{array}{c} (V_x dx + V_y dy + V_z dz) \wedge (W_x dx + W_y dy + W_z dz) \\ \| \\ V_x W_y dx \wedge dy + V_x W_z dx \wedge dz + V_y W_x dy \wedge dx + V_y W_z dy \wedge dz + V_z W_x dz \wedge dx + V_z W_y dz \wedge dy \\ \| \\ (V_y W_z - V_z W_y) dy \wedge dz + (V_z W_x - V_x W_z) dz \wedge dz + (V_x W_y - V_y W_x) dx \wedge dy \\ \| \\ *\,\omega_{\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{W}} \end{array}$$

□

Il existe une autre manière d'associer une 2-forme à un champ de vecteur : si on note la 3-forme volume $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$, on peut associer à $\overrightarrow{V} = (f, g, h)$ une 2-forme $\iota_{\overrightarrow{V}}\eta$ appelée produit intérieur de $\overrightarrow{V}$ avec $\eta$. Le produit intérieur est défini très simplement de la manière suivante pour $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z)$ : on pose

$$\iota_{\overrightarrow{V}}(du) = V_u \text{ pour } u = x, y, z,$$

et

$$\iota_{\overrightarrow{V}}(du \wedge \omega) = \iota_{\overrightarrow{V}}(du) \wedge \omega - du \wedge \iota_{\overrightarrow{V}}\,\omega.$$

**Attention :** On utilise la règle de dérivation de Leibniz par rapport au produit extérieur, mais avec un signe négatif.

On peut ainsi calculer pour $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$, la 2-forme associée au champ de vecteur $V = (f, g, h)$ pour obtenir

$$\begin{array}{rcl} \iota_{\overrightarrow{V}}(dx \wedge dy \wedge dz) & = & \iota_{\overrightarrow{V}}(dx) \wedge dy \wedge dz - dx \wedge \iota_{\overrightarrow{V}}(dy \wedge dz) \\ & = & f dy \wedge dz - dx \wedge [\iota_{\overrightarrow{V}}(dy) \wedge dz - dy \wedge \iota_{\overrightarrow{V}}(dz)] \\ & = & f dy \wedge dz - dx \wedge g \wedge dz + dx \wedge dy \wedge h \\ & = & f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \end{array}$$

ce qui permet d'obtenir l'identification

$$\iota_{\overrightarrow{V}}(dx \wedge dy \wedge dz) = *\omega_{\overrightarrow{V}}.$$

L'avantage de l'utilisation du produit intérieur est qu'il se généralise aux formes différentielles de degré quelconque et en dimension quelconque. Ceci permet d'obtenir une version vectorielle de la formule de Stokes en dimension quelconque (utile en physique).

On a alors le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & \overrightarrow{V} & \overrightarrow{V} & \\
 & (f,g,h) \arrow[u, equal] & (f,g,h) \arrow[u, equal] & f \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{grad}}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{V} \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{rot}}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{V} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F} \arrow[d, equal] \\
\Omega^0 \arrow[r, "d"] & \Omega^1 \arrow[r, "d"] & \Omega^2 \arrow[r, "d"] & \Omega^3 \\
 & f dx+g dy+h dz \arrow[d, equal] & f dy\wedge dz+g dz\wedge dx+h dx\wedge dy \arrow[d, equal] & f dx\wedge dy\wedge dz \\
 & \omega_{\overrightarrow{V}} & *\,\omega_{\overrightarrow{V}} &
\end{tikzcd}
$$

Vérifions que la divergence en dimension 3 s'identifie à la différentielle en utilisant les règles $du \wedge du = 0$ et $du \wedge dv = -dv \wedge du$ pour annuler des termes. On a

$$
\begin{aligned}
d(*\,\omega_{\overrightarrow{V}}) &= d(f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy) \\
&= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy \\
&= \tfrac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \tfrac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \tfrac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= (\tfrac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{\partial g}{\partial y} + \tfrac{\partial h}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz \\
&= \mathrm{div}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

Vérifions de même que le rotationnel en dimension 3 s'identifie à la différentielle. On a

$$
\begin{aligned}
d(\omega_{\overrightarrow{V}}) &= d(f dx + g dy + h dz) \\
&= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\
&= (\tfrac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \tfrac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx) + (\tfrac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \tfrac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy) + (\tfrac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz + \tfrac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dz) \\
&= (\tfrac{\partial h}{\partial y} - \tfrac{\partial g}{\partial z}) dy \wedge dz + (\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial h}{\partial x}) dz \wedge dx + (\tfrac{\partial g}{\partial x} - \tfrac{\partial f}{\partial y}) dx \wedge dy \\
&= *\,\omega_{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V})}
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) &:= (\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}) \wedge (f, g, h) \\
&= (\tfrac{\partial h}{\partial y} - \tfrac{\partial g}{\partial z}, \tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial h}{\partial x}, \tfrac{\partial g}{\partial x} - \tfrac{\partial f}{\partial y}).
\end{aligned}
$$

La règle de calcul $d \circ d = 0$ implique les règles

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \circ \overrightarrow{\mathrm{grad}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div} \circ \overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0.$$

Rappelons le résultat suivant :

**Théorème 16** (Lemme de Poincaré)**.** *Soit $\omega$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$. On a l'équivalence*

$$d\omega = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \eta, \qquad \omega = d\eta.$$

En utilisant le dictionnaire avec le calcul vectoriel en dimension 2 et 3, on obtient les résultats suivants.

**Corollaire 4.** *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. On a l'équivalence*

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = 0 \iff \exists f,\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \overrightarrow{V}.$$

*Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. On a les équivalences*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) = 0 \iff \exists f,\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \overrightarrow{V}$$

*et*

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = 0 \iff \exists \overrightarrow{W},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{V}.$$

## V.6 Intégration des formes différentielles

On va négliger les questions d'orientation, en supposant que tous les domaines sont orientés positivement dans les conventions usuelles et que les paramétrisations respectent ces orientations.

On commence par définir l'intégrale des formes différentielles sur des domaines de pavés (produits d'intervalles). Ceci est fait en utilisant l'intégrale de Riemann.

**Définition.** *L'intégrale d'une $1$-forme différentielle $f dt$ (resp. $2$-forme différentielle $f ds \wedge dt$, resp. $3$-forme différentielle $f ds \wedge dt \wedge du$) sur un domaine borné de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$) est définie comme la valeur de l'intégrale de Riemann de $f$ sur le même domaine (attention a bien prendre les coordonnées dans leur ordre habituel).*

Rappelons que si $f$ est continue et $P$ est un domaine suffisamment régulier, l'intégrale de $f$ sur $P$ existe.

**Remarque 9.** *D'après les règles de calculs qu'on a fixé pour les formes différentielles, qui donnent $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, on aura par définition, en cas d'échange des variables d'intégration, par exemple*

$$\oiint_P f dt \wedge ds = -\oiint_P f ds \wedge dt.$$

**Définition.** *Soit $P$ un domaine suffisamment régulier de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$. Une* paramétrisation d'un domaine de $\mathbb{R}^m$ de paramètres dans *$P$ est la donnée d'une application injective*

$$\sigma : P \to \mathbb{R}^m$$

*continuement différentiable par morceaux et dont la différentielle (matrice des dérivées partielles) est injective (i.e., de noyau nul) en tout point. L'image $D = \sigma(P)$ est le* domaine paramétré *et la source $P$ est le* domaine des paramètres.

Par exemple, une courbe paramétrée $C$ (dimension 1) dans $\mathbb{R}^2$ de paramètres dans un pavé est une application

$$\sigma = (x(t), y(t)) : P = [a, b] \to C \subset \mathbb{R}^2$$

dont le vecteur dérivé n'est jamais nul. Une surface paramétrée $S$ (dimension 2) dans $\mathbb{R}^3$ de paramètres dans un pavé est une application

$$\sigma = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) : P = [a, b] \times [c, d] \to S \subset \mathbb{R}^3$$

dont le vecteur normal n'est jamais nul. Un volume paramétré $V$ (dimension 3) dans $\mathbb{R}^3$ de paramètres dans un pavé est une application

$$\sigma = (x(s, t, u), y(s, t, u), z(s, t, u)) : P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \to V \subset \mathbb{R}^3$$

dont la différentielle (matrice jacobienne) est une application linéaire injective (i.e., de noyau nul).

**Exemple 56.** *On donne ici plusieurs exemples de domaines paramétrés.*

1. *Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ orienté dans le sens direct est la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ donnée par*
$$\sigma = (\cos(t), \sin(t)) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2.$$
2. *On peut aussi décrire le cercle comme l'union de deux demi-cercles. Le demi-cercle supérieur a pour paramétrisation*
$$\sigma = (-x, \sqrt{1 - x^2}) : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,$$
*et le cercle inférieur a pour paramétrisation*
$$\sigma = (x, -\sqrt{1 - x^2}) : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,$$
3. *Les paramétrisations du demi-cercle supérieur données par*
$$\sigma = (\cos(t), \sin(t)) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$$
*et*
$$\sigma = (x, \sqrt{1 - x^2}) : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$$
*ne sont pas orientées dans le même sens.*
4. *La sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est la surface paramétrée orientée (coordonnées sphériques) de $\mathbb{R}^3$ donnée par*
$$\sigma = (\sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)) : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3.$$
5. *Le cylindre plein d'équation $x^2 + y^2 \leq R$, $z \in [0, 1]$ est le volume paramétré (coordonnées cylindriques) de $\mathbb{R}^3$ donné par*
$$\sigma = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3.$$

6. *La boule pleine d'équation $x^2 + y^2 + x^2 \leq R$ est le volume paramétré (coordonnées sphériques) de $\mathbb{R}^3$ donné par*

$$\sigma = (r \sin(\varphi)\cos(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)) : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^3.$$

L'intégrale d'une forme différentielle sur un domaine paramétré général se ramène à celle de son tiré en arrière sur le domaine des paramètres.

**Définition.** *Notons $\sigma : P \to D$ une domaine paramétré de dimension $k$. L'intégrale d'une $k$-forme différentielle $\omega \in \Omega^k$ sur $D$ est définie par*

$$\oint_D \omega := \oint_P \sigma^* \omega.$$

Pour que la définition ci-dessus prenne sens, il faut définir le tiré en arrière $\sigma^*\omega$ d'une forme différentielle le long d'une paramétrisation $\sigma : P \to D$. Ceci peut se faire de la manière implicite suivante, qu'on va expliciter sur les exemples.

**Définition.** *Si $\sigma : P \to D$ est un domaine paramétré de dimension $k$, et $\omega \wedge \eta$ est un produit de formes différentielles, on pose*

$$\sigma^*(\omega \wedge \eta) = \sigma^*(\omega) \wedge \sigma^*(\eta).$$

*Si $f \in \Omega^0$ est une fonction, on pose*

$$\sigma^* f = f \circ \sigma.$$

*On a aussi la règle*

$$\sigma^* d\omega = d\sigma^* \omega.$$

Le coeur de la théorie d'intégration des formes différentielles est le théorème de changement de variables suivant, qui garantit que l'intégrale ne dépend pas de la paramétrisation :

**Théorème 17.** *Soit $\varphi : P_1 \to P_2$ un changement de variable, i.e., une application continuement différentiable bijective de jacobien strictement positif en tout point, $\sigma : P_2 \to D$ un domaine paramétré de dimension $k$ et $\omega \in \Omega^k$ une $k$-forme différentielle. On a alors l'égalité*

$$\oint_{P_1} (\sigma \circ \varphi)^* \omega = \oint_{P_2} \sigma^* \omega,$$

*qui signifie aussi que l'intégrale $\oint_D \omega$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie.*

*Démonstration.* Ce résultat découle directement de la définition de l'intégrale des formes différentielles sur les pavés en termes d'intégrale de Riemann et du théorème de changement de variable (voir les théorèmes II.4 (e), IV (c) et IV (d)) pour cette intégrale. □

**Exemple 57.** *Si $C$ est une courbe paramétrée par $\sigma = (x(t), y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$, on voit que*

$$\sigma^* dx = d\sigma^* x = d(x(t)) = x'(t)dt.$$

*De même, on obtient*

$$\sigma^* dy = y'(t)dt.$$

*Si $f$ est une fonction, on obtient*

$$\sigma^* f(t) := f(x(t), y(t)).$$

*Ceci donne par exemple*

$$\sigma^*(f dx) = \sigma^*(f).\sigma^*(dx) = f(x(t), y(t))x'(t)dt.$$

**Proposition 22.** *L'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle $\omega = f dx + g dy$ le long de la courbe $C$ est donnée par la formule*

$$\oint_C \omega := \oint_{[a,b]} \sigma^* \omega = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt + g(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Moralement, lors d'un changement de variable $(x(s,t), y(s,t))$, l'expression $dx \wedge dy$ est multipliée par le déterminant du changement de variables dans la nouvelle coordonnée $ds \wedge dt$. La théorie des formes différentielles est entièrement développée autour de ce point crutial, qui permet de la rendre invariante par changement de coordonnées. On va redémontrer rapidement cette formule par un petit calcul.

**Exemple 58.** *Si $S$ est une surface paramétrée par $\sigma = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, on peut calculer l'image inverse de la 2-forme $dx \wedge dy$ sur le pavé des paramètres $(s,t)$ de la manière suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma^*(dx \wedge dy) & = & \sigma^* dx \wedge \sigma^* dy \\ & = & d\sigma^* x \wedge d\sigma^* y \\ & = & dx(s,t) \wedge dy(s,t) \\ & = & (\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt) \wedge (\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt) \\ & = & \frac{D(x,y)}{D(s,t)} ds \wedge dt, \end{array}$$

*avec*

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

*le déterminant jacobien de la paramétrisation.*

**Exemple 59.** *Plus généralement, si $\omega = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx$ est une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$, et $\sigma = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ est une surface paramétrée, on obtient pour $\sigma^*\omega$ la forme différentielle sur le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \sigma^*\omega & = & \sigma^* f.\sigma^*(dx \wedge dy) + \sigma^* g.\sigma^*(dy \wedge dz) + \sigma^* h.\sigma^*(dz \wedge dx) \\ & = & \left[ f \circ \sigma \cdot \frac{D(x,y)}{D(s,t)} + g \circ \sigma \cdot \frac{D(y,z)}{D(s,t)} + h \circ \sigma \cdot \frac{D(z,x)}{D(s,t)} \right] ds \wedge dt. \end{array}$$

**Proposition 23.** *L'intégrale d'une* 2*-forme différentielle*

$$\omega = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx$$

*sur une surface* $S$ *paramétrée par* $\sigma : P = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ *est donnée par la formule*

$$\oiint_S \omega = \oiint_P \left[ f \circ \sigma \frac{D(x,y)}{D(s,t)} + g \circ \sigma \frac{D(y,z)}{D(s,t)} + h \circ \sigma \frac{D(z,x)}{D(s,t)} \right] ds \wedge dt.$$

On démontre par un calcul très similaires aux précédents que si $V$ est un volume paramétré par $\sigma$ : $[a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}^3$, on a

$$\sigma^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} ds \wedge dt \wedge du,$$

avec

$$\frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$$

le déterminant jacobien de la paramétrisation.

**Proposition 24.** *L'intégrale d'une* 3*-forme différentielle* $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$ *sur un volume* $V$ *paramétré par* $\sigma : P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}^3$ *est donnée par la formule*

$$\oiiint_V \omega = \int_P f(s,t,u) \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} ds \wedge dt \wedge du.$$

## V.7 Travail et flux

**Définition.** *La travail (dit aussi circulation) d'un champs de vecteurs* $\overrightarrow{V}$ *le long d'une courbe* $C$ *est défini par*

$$\text{travail}_C(\overrightarrow{V}) := \oint_C \omega_{\overrightarrow{V}}.$$

**Proposition 25.** *On peut évaluer le travail (par exemple en dimension* 2*) par la formule*

$$\text{travail}_C(\overrightarrow{V}) = \oint_I \overrightarrow{V}(M(t)) \cdot \overrightarrow{dM}$$

*avec* $\overrightarrow{dM} = (x'(t), y'(t))dt$ *et* $I$ *l'intervalle des paramètres de la courbe* $M : I \to \mathbb{R}^2$.

On a déjà vu que l'intégrale d'une 1-forme sur une courbe ne dépend pas du paramétrage de la courbe. Ceci implique que le travail ne dépend pas non plus du paramétrage. Intuitivement, le travail mesure à quel point le champ à tendance à pousser le long de $C$.

**Exemple 60.** *La formule de Stokes en dimension* 1 *implique que si* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$*, alors le travail de* $\overrightarrow{V}$ *est nul le long de toute courbe fermée.*

**Exemple 61.** *En physique, il est fréquent de travailler le travail d'un champ de force $\overrightarrow{F}$ le long d'une trajectoire. Si la force dérive d'un potentiel, i.e., est un champ de gradient (comme la force de gravitation ou la force électrostatique), son travail est nul le long de toute courbe fermée.*

**Définition** (dimension 3 uniquement)**.** *Le flux d'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long d'une surface $S$ de l'espace est défini par*

$$\mathrm{flux}_S(\overrightarrow{V}) := \oiint_S *\omega_{\overrightarrow{V}}.$$

**Exemple 62.** *En mécanique des fluides, le flux du champ de vitesse d'un fluide à travers une surface décrit la quantité de fluide traversant la surface.*

**Proposition 26.** *Soit $S$ une surface paramétrées par $M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. On peut calculer le flux par la formule*

$$\mathrm{flux}_S(\overrightarrow{V}) = \oiint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma,$$

*avec*

$$d\sigma := \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\| dudv$$

*la 2-forme différentielle d'aire de la surface $S$ et*

$$\overrightarrow{n} := \frac{\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\|}$$

*son vecteur normal.*

*Démonstration.* On se contente (pour simplifier) de considérer le cas où $S$ est le graphe d'une fonction $z(x,y)$ avec $(x,y) \in \Delta$. Notons $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$. On a alors

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

On a aussi

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Leur produit vectoriel vaut

$$\overrightarrow{m} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

et est de norme

$$\|\overrightarrow{m}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

ce qui donne

$$\oiint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma = \iint_\Delta \left( -P\frac{\partial z}{\partial x} - Q\frac{\partial z}{\partial y} + R \right) dxdy.$$

Comme d'autre part, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, on obtient que $*\,\omega_{\overrightarrow{V}}$ est égale sur $S$ à

$$\begin{array}{c} *\,\omega_{\overrightarrow{V}} \\ \| \\ Pdy \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) + Q\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \wedge dx + Pdx \wedge dy = \left(-P\frac{\partial z}{\partial x} - Q\frac{\partial z}{\partial y} + R\right) dx \wedge dy. \end{array}$$

Ceci permet de conclure que

$$\oiint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma = \oiint_S \omega_{\overrightarrow{V}} =: \mathrm{flux}_S(\overrightarrow{V}).$$

$\square$

# VI Formule de Stokes et applications

(2-3 séances)

On va maintenant décrire la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral à valeurs scalaires et vectorielles, qui généralise la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral pour les fonctions à une variable. Nous donnerons aussi ses différents corollaires (formulations en termes de champs de vecteurs) et ses applications.

## VI.1 Cellules et chaines singulières

**Définition.** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^n$. Un $k$-cube singulier de $D$ est une application lisse $\sigma : [0,1]^k \to D$, avec une orientation fixée au départ (pour $k = 0$, on obtient, par convention, un point). L'intégrale d'une $k$-forme différentielle $\omega \in \Omega^k(D)$ le long de $\sigma$ est l'intégrale*

$$\oint_\sigma \omega := \int_{[0,1]^k} \sigma^* \omega.$$

Pour décrire le bord d'un $k$-cube singulier en tenant compte de son orientation, il est nécessaire de travailler avec des objets plus généraux, qui sont les $k$-chaines singulières.

**Définition.** *Une $k$-chaine singulière dans un domaine $D$ de $\mathbb{R}^n$ est une somme formelle*

$$c = \sum_{j=1}^r a_j \sigma_j$$

*avec $a_i \in \mathbb{Z}$ des entiers relatifs et $\sigma_i$ des $k$-cubes singuliers. Le bord d'un $k$-cube singulier $\sigma$ est la $k-1$-chaine singulière donnée par*

$$\partial\sigma := \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \left(\sigma_{|(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)} - \sigma_{|(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)}\right).$$

*Le bord d'une $k$-chaine singulière $c = \sum a_j \sigma_j$ est la $k$-chaine singulière*

$$\partial c = \sum a_j \partial \sigma_j.$$

Si $\sigma : [0,1] \to D$ est un intervalle singulier (1-cube singulier), son bord est donné par

$$\partial\sigma = \{\sigma(1)\} - \{\sigma(0)\}.$$

Par exemple, le bord de l'intervalle singulier $\sigma(\theta) = (\cos(\theta\pi), \sin(\theta\pi))$ décrivant le demi-cercle est donné par $\sigma(1) - \sigma(0) = \{(-1,0)\} - \{(1,0)\}$.

Si $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to D$ est un carré singulier (2-cube singulier), son bord est donné par

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= (\sigma(1,x_2) - \sigma(0,x_2)) - (\sigma(x_1,1), -(\sigma(x_1,0)) \\ &= \sigma(1,x_2) - \sigma(0,x_2) - \sigma(x_1,1) + \sigma(x_1,0). \end{aligned}$$

Par exemple, le bord du carré singulier donné par la paramétrisation du disque

$$\sigma(r, \theta) = (r\cos(2\theta\pi), r\sin(2\theta\pi))$$

est donné par

$$\partial\sigma = (\cos(2\theta\pi), \sin(2\theta\pi)) - (0, 0) + (r, 0) - (r, 0) = (\cos(2\theta\pi), \sin(2\theta\pi)) - (0, 0).$$

De même, si on s'intéresse seulement au demi-disque, paramétré par

$$\sigma(r, \theta) = (r\cos(\theta\pi), r\sin(\theta\pi)),$$

on obtient

$$\partial\sigma = (\cos(\theta\pi), \sin(\theta\pi)) - (0, 0) + (r, 0) - (-r, 0).$$

Si $\sigma$ est un 3-cube singulier, son bord est donné par

$$\partial\sigma = (\sigma(1, x_2, x_3) - \sigma(0, x_2, x_3)) - (\sigma(x_1, 1, x_3) - \sigma(x_1, 0, x_3)) + (\sigma(x_1, x_2, 1) - \sigma(x_1, x_2, 0)).$$

On pourra décrire la cellule donnée par le bord de la demi-sphère paramétrée par les coordonnées polaires, ainsi que le bord de la sphère dans les mêmes coordonnées.

**Théorème 18.** *Si $\sigma$ est une k-cellule singulière, on a*

$$\partial(\partial\sigma) = 0.$$

## VI.2 Décompositions cellulaires des domaines

Nous allons nous intéresser à des décompositions de domaines (courbes, surfaces, volumes) de $\mathbb{R}^n$ en petits cubes, qu'on pourra obtenir en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Prenons par exemple une courbe bornée $C$ du plan d'équation $f(x, y) = 0$, bord d'un domaine $D$. On suppose que cette courbe est non singulière, i.e., que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ n'est jamais nul sur $C$. On suppose qu'il y a un nombre fini de points en lesquels l'une des dérivée partielles de $f$ s'annule (tangentes verticales ou horizontales) et on prend un nombre fini de points les séparant (faire un dessin de patatoïde). On trace toutes les verticales et horizontales passant par ces points. Ceci donne un cadrillage du plan dont l'intersection avec $D$ est descriptible, grâce au théorème des fonctions implicites, comme la réunion de domaines $D'$ donnés par la surface comprise entre le graphe de deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ (d'une des deux coordonnées, disons par exemple $x$), les rectangles étant des cas particuliers. Un tel domaine

$$D' = \{(x, y), \psi(x) \leq y \leq \varphi(x),\ x \in [a, b]\}$$

peut être identifié avec l'image du carré singulier

$$\sigma(u, v) = (x(u), (1 - v)\varphi(x(u)) + v\psi(x(u))),$$

avec

$$x(u) = (1 - u)a + ub$$

la paramétrisation standard du segment $[a, b]$ par le segment $[0, 1]$.

On peut procéder de même pour décomposer un domaine $D$ de $\mathbb{R}^3$ borné par une surface $S$ d'équation $f(x, y, z) = 0$ : on considère tous les points de la surface $S$ en lequel l'espace tangent est parallèle à un des plans de coordonnées, et en chacun de ces points, on translate tous les plans de coordonnées. Ceci permet de décomposer le domaine $D$ en domaines $D'$ qu'on pourra décrire comme le volume compris entre le graphe de deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ (de deux coordonnées, disons par exemple $x$ et $y$). Un tel domaine

$$D' = \{(x, y, z), \psi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y),\ x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$$

peut être identifié avec l'image du cube singulier

$$\sigma(u, v, w) = (x(u, v), y(u, v), (1 - w)\varphi(x(u, v), y(u, v)) + w\psi(x(u, v), y(u, v))),$$

avec

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \to & [a, b] \times [c, d] \\ (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) = ((1 - u)a + ub, (1 - v)c + vd) \end{array}$$

la paramétrisation standard du pavé $[a, b] \times [c, d]$.

Dans la plupart des cas pratiques, les constructions ci-dessus permettent ainsi de décrire le domaine considéré $D$ (supposé de dimension $r$) comme l'image d'une chaine singulière de la forme

$$c = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i$$

avec $\sigma_i$ des carrés singuliers (de dimension $r$) dont les intersections sont des réunions de composantes de leur bord (de dimension $r - 1$), et le bord $\partial D$ du domaine comme l'image d'une chaine singulière

$$\partial c = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j$$

dont les composantes s'intersectent seulement le long de leur bord (de dimension $r - 2$). Ces dernières composantes ne jouent pas de rôle dans l'intégration des $r$-formes et des $r - 1$-formes, car elles sont de mesure nulle.

## VI.3 Formule de Stokes

**Théorème 19.** *Soit $\sigma$ une $(k + 1)$-cellule singulière de $\mathbb{R}^n$ de bord la $k$-cellule $\partial\sigma$. Soit $\omega \in \Omega^k$ une $k$-forme différentielle définie au voisinage de $\sigma$ et $d\omega \in \Omega^{k+1}$ sa différentielle. On a alors l'égalité*

$$\oint_\sigma d\omega = \oint_{\partial\sigma} \omega.$$

*Démonstration.* Comme toute $k$-cellule singulière est somme de $k$-cubes singulier, on peut se ramener au cas d'un $k$-cube singulier $\sigma : [0, 1]^k \to \mathbb{R}^n$. On obtient alors

$$\oint_\sigma d\omega := \oint_{[0,1]^k} \sigma^*(d\omega) = \oint_{[0,1]^k} d(\sigma^*\omega).$$

Comme $\sigma^*\omega \in \Omega^{k-1}([0,1]^k)$, on peut l'écrire

$$\sigma^*\omega = \sum_{i=1}^{k} g_i \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

avec $g_i$ des fonctions sur $[0,1]^k$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \oint_c d\omega & = & \sum_{i=1}^k \oint_{[0,1]^k} d(g_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\ & = & \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \oint_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k. \end{array}$$

Le théorème de Fubini appliqué à la décomposition $[0,1]^k = [0,1] \times [0,1]^{k-1}$ correspondant au choix de la variable $x_i$ nous donne

$$\begin{array}{rcl} \oint_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k & = & \int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_k \\ & = & \int_{[0,1]^k} \left( \int_{[0,1]} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k. \end{array}$$

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral nous donne ensuite

$$\int_{[0,1]} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_i = g_i(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k) - g_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k).$$

Ces deux résultats combinés nous donnent l'égalité

$$\int_{[0,1]^k} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_k = \int_{[0,1]^{k-1}} c_{i,1}^*\omega - c_{i,0}^*\omega$$

ou on note $c_{i,\rho} : [0,1]^{k-1} \to [0,1]^k$ l'application $(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, \rho, \ldots, x_k)$, pour $\rho \in \{0,1\}$. En effectuant les identifications

$$\begin{array}{rcl} \int_c d\omega & = & \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \oint_{[0,1]^{k-1}} c_{i,1}^*\omega - c_{i,0}^*\omega \\ & = & \sum_{i=1}^k \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \oint_{[0,1]^{k-1}} c_{i,\rho}^*\omega \\ & = & \sum_{i=1}^k \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} \int_{c_{i,\rho}} \omega \\ & = & \oint_{\sum_{i=1}^k \sum_{\rho=0,1} (-1)^{i+\rho} c_{i,\rho}} \omega \\ & = & \oint_{\partial c} \omega \end{array}$$

on obtient bien le résultat souhaité. □

**Exemple 63.** *Si le domaine est donné par un intervalle $D = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, son bord est la donnée de deux points $\{b,a\}$ munis chacun d'une orientation, qui vient de l'orientation naturelle de $D$ donnée par son inclusion dans $\mathbb{R}$. On notera donc ce bord $\{b+, a-\}$. La formule de Stokes est dans ce cas équivalente à la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral*

$$\oint_{[a,b]} df := \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) =: \oint_{\{b+,a-\}} f.$$

## VI.4 Applications

On retrouve facilement les formules fondamentales du calcul vectoriel à partir de la formule de Stokes en utilisant les relations entre champs de vecteurs et formes différentielles explicitées dans la section V.5.

Tous les domaines considérés dans cette section sont supposés admettre une paramétrisation par une chaine singulière compatible à une paramétrisation de leur bord par le bord de la chaine.

### (a) Aire d'un domaine dans le plan

**Corollaire 5.** *L'aire d'un domaine $D$ du plan de bord une courbe $\partial D = C$ est donnée par*

$$\text{aire}(D) := \iint_D dx \wedge dy = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C [xdy - ydx].$$

*Démonstration.* Ceci découle de la formule de Stokes et des identités

$$\begin{gathered} d(xdy) = dx \wedge dy, \\ d(-ydx) = -dy \wedge dx = dx \wedge dy, \\ \text{et } d(xdy - ydx) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2dx \wedge dy. \end{gathered}$$

□

### (b) Volume d'un domaine dans l'espace

**Corollaire 6.** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface $S$. Supposons que la surface $S$ est orientée de façon à ce que les vecteurs normaux soient extérieurs à $D$. Le volume de $D$, défini par* $\text{volume}(D) := \iint_D dx \wedge dy \wedge dz$*, est aussi donné par*

$$\text{volume}(D) = \iint_S xdy \wedge dz = \iint_S ydz \wedge dx = \iint_S zdx \wedge dy.$$

*Démonstration.* Ceci découle de la formule de Stokes et des identités

$$\begin{gathered} d(xdy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz, \\ d(ydz \wedge dx) = dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz, \\ \text{et } d(zdx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz. \end{gathered}$$

□

### (c) Formule de Green-Riemann

Si $S$ est une surface de $\mathbb{R}^2$ bordée par une courbe $C$ et $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs, de 1-forme associée $\omega_{\overrightarrow{V}} \in \Omega^1$, on a montré que $d(\omega_{\overrightarrow{V}}) = \text{rot}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy$ donc

$$\oint_C \omega_{\overrightarrow{V}} = \iint_S \text{rot}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy.$$

Ceci nous donne le corollaire suivant de la formule de Stokes :

**Corollaire 7** (Formule de Green-Riemann)**.** *Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteur sur une surface de $\mathbb{R}^2$ bordée par une courbe C, on a la formule*

$$\text{travail}_C(\overrightarrow{V}) := \oint_C \omega_{\overrightarrow{V}} = \oiint_S \text{rot}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy,$$

*i.e., le travail du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C est égal à l'intégrale sur la surface $S$ de son rotationnel.*

### (d) Formule de Stokes-Ampère

Si $S$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe $C$ et $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs, de 1-forme associée $\omega_{\overrightarrow{V}} \in \Omega^1$, on a montré que $d(\omega_{\overrightarrow{V}}) = *\,\omega_{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})} \in \Omega^2$ (2-forme de flux associée au champ de vecteur rotationnel de $\overrightarrow{V}$), donc on a

$$\oint_C \omega_{\overrightarrow{V}} = \oiint_S *\,\omega_{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})}.$$

**Corollaire 8** (Formule de Stokes-Ampère)**.** *Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $S$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe C, on a la formule*

$$\text{travail}_C(\overrightarrow{V}) := \oint_C \omega_{\overrightarrow{V}} = \oiint_S *\,\omega_{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})} =: \text{flux}_S(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V})),$$

*i.e., le travail (la circulation) de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C est égal au flux de son rotationnel à travers la surface $S$ bordée par $C$.*

### (e) Formule de Stokes-Ostrogradsky

Si $V$ est un volume bordé par une surface $S$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs, de 2-forme de flux associée $*\,\omega_{\overrightarrow{V}}$, on a montré que $d(*\,\omega_{\overrightarrow{V}}) = \text{div}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy \wedge dz$, donc on a

$$\oiint_S *\,\omega_{\overrightarrow{V}} = \oiiint_V \text{div}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

**Corollaire 9** (Formule de Stokes-Ostrogradsky)**.** *Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $V$ est un volume de $\mathbb{R}^3$ bordé par une surface $S$, on a la formule*

$$\text{flux}_S(\overrightarrow{V}) := \oiint_S *\,\omega_{\overrightarrow{V}} = \oiiint_V \text{div}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy \wedge dz,$$

*i.e., le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ à travers la surface $S$ est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume $V$.*

Puisqu'on a l'égalité

$$*\omega_{\overrightarrow{V}} = \iota_{\overrightarrow{V}}(dx \wedge dy \wedge dz),$$

on peut aussi écrire la formule ci-dessus sous la forme

$$\oiint_S \iota_{\overrightarrow{V}}(dx \wedge dy \wedge dz) = \oiiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{V})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Cette formule a l'avantage de se généraliser aux variétés de dimension supérieure (par exemple, on peut utiliser l'espace temps de la relativité restreinte, utile d'après Einstein pour formuler les lois de l'électromagnétisme, et qui a trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps).

Ce résultat est utilisé en électromagnétisme, dans la formulation de la loi d'Archimède, ainsi qu'en mécanique des fluides.

# Références

[1] Élie Cartan, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 1899.

[2] Dinh Tien Cuong, *Analyse vectorielle et intégrales multiples*, polycopié de cours, année 2007-2008.

[3] Olivier Colin, *Calcul des formes différentielles*, polycopié de cours, année 2003-2004.