# Contrôle continu 1 : corrigé

---

**Exercice 1.**— Calculer la différentielle de Leibniz des expressions suivantes :

a) Donner la différentielle de la fonction arctan.

b) En déduire la différentielle de $\arctan(\sqrt{x+1})$ ;

c) Calculer la différentielle de $x\, e^{-x^2}$.

---

**Corrigé.** a) La différentielle de la fonction arctan est $\frac{1}{1+x^2}\, dx$.

b) D'après la formule de différentiation des fonctions composées on a :

$$d(\arctan(\sqrt{x+1})) = \arctan'(\sqrt{x+1})d(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2}\frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \frac{dx}{2(x+2)\sqrt{x+1}}.$$

c) La formule du produit donne, $d(x\, e^{-x^2}) = e^{-x^2}dx + x\, d(e^{-x^2})$. Or par la formule de composition : $d(e^{-x^2}) = e^{-x^2}d(-x^2) = -2x\, e^{-x^2}dx$. On obtient donc :

$$d(x\, e^{-x^2}) = (1-2x^2)e^{-x^2}\, dx.$$

---

**Exercice 2.**— Représenter graphiquement le domaine suivant, puis calculer son aire :

$$\{(x,y)\,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } -x \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

---

**Corrigé.** Représentation graphique :

L'aire de ce domaine est donnée par le calcul suivant :

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_0^1 xdx = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

**Exercice 3.—**

a) Calculer les primitives de la forme différentielle $\frac{\sin\left(\ln(x)\right)}{x}\,dx$.

b) Calculer $\int_1^e 4x\ln(x)\,dx$.

c) Calculer $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$.

---

**Corrigé.** a) D'après la formule de composition,

$$\frac{\sin\left(\ln(x)\right)}{x}\,dx = \sin(\ln(x))\,d(\ln(x)) = -\cos'(\ln(x))\,d(\ln(x)) = d(-\cos(\ln(x))).$$

Les primitives recherchées sont donc les fonctions de la forme $-\cos(\ln) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

b) On fait une intégration par partie (on dérive $\ln(x)$ et on intègre $4x$). On obtient après simplification :

$$\int_1^e 4x\ln(x)\,dx = \left[2x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 2x\,dx = e^2+1.$$

c) On fait le changement de variable consistant à poser $u = x^3$, ce qui donne $du = 3x^2\,dx$. On a alors :

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{du}{\sqrt{u+1}} = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{u+1}\right]_0^8 = \frac{4}{3}.$$