Contrôle continu 2, sujet A : corrigé

Exercice 1.— Tracer (proprement) l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation est le suivant :

t	-3		-2		-1		0		1		2		3
$x'(t)$	1	$+$	4	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	4	$+$	1
					1								2
$x(t)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
	-2								-1				
			2										
$y(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	0
											-2		
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-1	$-$	-1	$-$	0	$+$	2

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

Corrigé.

Exercice 2.— Déterminer et dessiner l'ensemble de définition dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante.

$$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Le point $(1, 1)$ appartient-il à cet ensemble ?

Corrigé. $f(x, y)$ est défini si et seulement si $1 - y^2 \geq 0$, c'est à dire $-1 \leq y \leq 1$. L'ensemble de définition est donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

Le point $(1, 1)$ lui appartient.

Exercice 3.—

a) Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

— $f(x,y) = \cos(x)\sin(x+y)$
— $g(x,y) = \exp(x-3y^2)$

b) En déduire en particulier ce que vaut $\frac{\partial f}{\partial x}$, puis calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Donner sans calcul supplémentaire une formule pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Justifier.

d) Donner un développement limité de g à l'ordre 1.

Corrigé. a) — D'après la formule du produit,

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \sin(x+y)d(\cos(x)) + \cos(x)d(\sin(x+y)) = -\sin(x+y)\sin(x)\,dx + \cos(x)\cos(x+y)d(x+y) \\ &= (-\sin(x+y)\sin(x) + \cos(x)\cos(x+y))dx + \cos(x)\cos(x+y)dy \\ &= \cos(2x+y)dx + \cos(x)\cos(x+y)dy. \end{aligned}$$

— On sait que $d\exp(u) = \exp(u)du$, donc en substituant ($u = x - 3y^2$, $du = dx - 6ydy$) :

$$dg(x,y) = \exp(x-3y^2)(dx - 6ydy).$$

b) On sait que $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, donc par identification, $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(2x+y)$. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(2x+y)$.

c) D'après le lemme de Schwarz (qui s'applique ici car la fonction est de classe C^2), $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

d) D'après le cours, $g(x+dx, y+dy) = g(x,y) + dg(x,y) + o(dx,dy)$. D'où, ici :

$$g(x+dx, y+dy) = \exp(x-3y^2)(1 + dx - 6ydy) + o(dx,dy).$$

Exercice 4.— On considère l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 y + \cos(x)y = 0\}.$$

a) Vérifier que $(0,0) \in E$.

b) Appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0,0)$ et donner la pente de la tangente à E en $(0,0)$.

c) En calculant le gradient d'une fonction appropriée, trouver un vecteur normal à E. Le résultat obtenu est-il en accord avec la question précédente ?

Corrigé. a) Vérification immédiate

b) On pose $f(x,y) = x^4 y + \cos(x)y$. Par définition, E est la ligne de niveau 0 de f. Calculons les dérivées partielles de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 y - \sin(x)y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 + \cos(x).$$

On remarque que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe au voisinage de 0, une fonction ϕ telle que au voisinage $(0,0)$, $f(x,y) = 0$ équivaut à $y = \phi(x)$. Autrement dit, au voisinage de $(0,0)$, E est le graphe de ϕ. La tangente à E admet donc pour pente $\phi'(0)$. Le théorème des fonctions implicites affirme également que

$$\phi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)},$$

En utilisant $\phi(0) = 0$, on obtient, $\phi'(0) = 0$. La pente est nulle et la tangente est donc horizontale.

c)

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (4x^3 y - \sin(x)y, x^4 + \cos(x)).$$

Au point $(0,0)$, on obtient, $\mathrm{grad} f(0,0) = (0,1)$. Ce vecteur est vertical, et est bien orthogonal à la ligne de niveau E qui est de tangente horizontale en $(0,0)$.