# Contrôle continu 2, sujet A

---

**Exercice 1.—** Tracer (proprement) l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation est le suivant :

| $t$ | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $1$ | $+$ | $4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $4$ | $+$ | $1$ |
| $x(t)$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $2$ |

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

---

**Exercice 2.—** Déterminer et dessiner l'ensemble de définition dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante.

$$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Le point $(1, 1)$ appartient-il à cet ensemble ?

---

**Exercice 3.—**

a) Calculer la différentielle des fonctions suivantes :
  — $f(x, y) = \cos(x)\sin(x + y)$
  — $g(x, y) = \exp(x - 3y^2)$

b) En déduire en particulier ce que vaut $\frac{\partial f}{\partial x}$, puis calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Donner sans calcul supplémentaire une formule pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Justifier.

d) Donner un développement limité de $g$ à l'ordre 1.

---

**Exercice 4.—** On considère l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 y + \cos(x) y = 0\}.$$

a) Vérifier que $(0, 0) \in E$.

b) Appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, 0)$ et donner la pente de la tangente à $E$ en $(0, 0)$.

c) En calculant le gradient d'une fonction appropriée, trouver un vecteur normal à $E$. Le résultat obtenu est-il en accord avec la question précédente ?

---