Contrôle continu 2, sujet B

Exercice 1.— Tracer (proprement) l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation est le suivant :

t	-3		-2		-1		0		1		2		3
$x'(t)$	-2	$-$	0	$+$	1	$+$	1	$+$	1	$+$	0	$-$	-2
$x(t)$	0	↘	-2	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	2	↘	0
$y(t)$	2	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-2
$y'(t)$	-1	$-$	-4	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4	$-$	-1

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

Exercice 2.— Déterminer et dessiner l'ensemble de définition dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante.

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2).$$

Le point $(1, 1)$ appartient-il à cet ensemble ?

Exercice 3.—

a) Calculer la différentielle des fonctions suivantes :
   — $f(x, y) = \cos(x)\ln(x + y)$
   — $g(x, y) = \sin(2x - y^3)$

b) En déduire en particulier ce que vaut $\frac{\partial f}{\partial x}$, puis calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

c) Donner sans calcul supplémentaire une formule pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Justifier.

d) Donner un développement limité de g à l'ordre 1.

Exercice 4.— On considère l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 y + (x^2 - 1)\sin(y) = 0\}.$$

a) Vérifier que $(0, 0) \in E$.

b) Appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, 0)$ et donner la pente de la tangente à E en $(0, 0)$.

c) En calculant le gradient d'une fonction appropriée, trouver un vecteur normal à E. Le résultat obtenu est-il en accord avec la question précédente ?