# Contrôle continu 3, sujet A : corrigé

**Exercice 1.—**

a) Donner un paramétrage du demi-cercle $\mathcal{C} = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 4\}$.

b) Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}(x, y) = (y, y - x)$ le long de $\mathcal{C}$.

**Corrigé.** a) Ce demi-cercle est paramétré par le point $(2\cos t, 2\sin t)$ où $t$ décrit $[0, \pi]$.

b) Par définition, la circulation de $\vec{V}$ le long de $\mathcal{C}$ est l'intégrale de la 1-forme $\omega = y\,dx + (y - x)\,dy$ le long de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire, en utilisant le paramétrage de la question précédente :

$$\int_0^\pi 2\sin t\, d(2\cos t) + (2\sin t - 2\cos t)\, d(2\sin t) = 4\int_0^\pi (1 + \sin t\, \cos t)dt = 4\pi.$$

**Exercice 2.—** Calculer les intégrales multiples suivantes :

a) $\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\, dx\, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

b) $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx\, dy\, dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

**Corrigé.** a) D'après le théorème de Fubini, l'intégrale à calculer vaut :

$$\int_0^1 \left( \int_0^x \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

b) On fait un changement de variable en coordonées polaires :

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y)\, dx\, dy &= \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} (r\cos\theta + r\sin\theta) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 (\cos\theta + \sin\theta) d\theta \right) dr = \int_0^1 2r^2\, dr = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

c) On fait un changement de variable en coordonées sphériques :

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx\, dy\, dz &= \iiint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]\times[1,2]} \frac{1}{r} r^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr \\ &= 2\pi \int_1^2 \left( \int_0^\pi r \sin\varphi\, d\varphi \right) dr = 4\pi \int_1^2 r\, dr = 6\pi. \end{aligned}$$

**Exercice 3.—**

a) Calculer le jacobien de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $\Phi(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.

b) Calculer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$.

**Corrigé.** a) La matrice jacobienne, dont les colonnes sont les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ est :

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le jacobien est donc $\det(D\Phi) = 6$.

b) On remarque que $\Phi(x, y, z) \in \mathcal{E}$ si et seulement si $(x, y, z)$ appartient à la boule de centre 0 et de rayon 1 (que l'on notera $B$), autrement dit que $\Phi(B) = \mathcal{E}$. D'après la formule du changement de variable,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} dx\, dy\, dz = \iiint_{B} 6\, dx\, dy\, dz = 6\,\mathrm{Vol}(B) = 8\pi.$$

---

**Exercice 4.**— Calculer les produits extérieurs suivants :

a) $\alpha = (3dx + dy) \wedge (3dx - dy)$.

b) $\beta = (dx + dy) \wedge dz \wedge (2dy + dx)$.

---

**Corrigé.** a) On développe, puis on utilise les règles de calcul $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$. On obtient :

$$\alpha = 9dx \wedge dx - 3dx \wedge dy + 3dy \wedge dx - dy \wedge dy = -6dx \wedge dy.$$

b) De même :

$$\begin{aligned} \beta &= dx \wedge dz \wedge 2dy + dx \wedge dz \wedge dx + dy \wedge dz \wedge 2dy + dy \wedge dz \wedge dx \\ &= 2dx \wedge dz \wedge dy + dy \wedge dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Or, $dx \wedge dz \wedge dy = -dx \wedge dy \wedge dz$ et $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$. D'où :

$$\beta = -dx \wedge dy \wedge dz.$$