Contrôle continu 3, sujet B : corrigé

Exercice 1.—

a) Donner un paramétrage du quart de cercle $\mathcal{C} = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 9\}$.

b) Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}(x, y) = (2x + y, -x)$ le long de $\mathcal{C}$.

Corrigé. a) Ce quart de cercle est paramétré par le point $(3\cos t, 3\sin t)$ où t décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Par définition, la circulation de $\vec{V}$ le long de $\mathcal{C}$ est l'intégrale de la 1-forme $\omega = 2x + y\, dx - x\, dy$ le long de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire, en utilisant le paramétrage de la question précédente :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (6\cos t + 3\sin t)\, d(3\cos t) - 3\cos t\, d(3\sin t) = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t\, \sin t - 1) dt = 9(1 - \frac{\pi}{2}).$$

Exercice 2.— Calculer les intégrales multiples suivantes :

a) $\iint_D (x + 5y)\, dx\, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.

b) $\iint_D \frac{2}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

Corrigé. a) D'après le théorème de Fubini, l'intégrale à calculer vaut :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x + 5y)\, dy \right) dx = \int_0^1 (x^3 + \tfrac{5x^4}{2})\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

b) On fait un changement de variable en coordonées polaires :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{2}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{2}{1 + r^2} r\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{2r}{1 + r^2} dr = 2\pi \left[\ln(1 + r^2) \right]_0^1 = 2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

c) On fait un changement de variable en coordonées sphériques (ϕ évolue entre 0 et $\pi/2$ car on considère un domaine avec $z \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx\, dy\, dz &= \iiint_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[1,3]} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr \\ &= 2\pi \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \right) dr = 4\pi. \end{aligned}$$

Exercice 3.—

a) Calculer le jacobien de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $\Phi(x, y, z) = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$.

b) Calculer $\iiint_{\mathcal{E}} \sqrt{xyz}\, dx\, dy\, dz$ où $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 \leq 1\}$.

Corrigé. a) La matrice jacobienne, dont les colonnes sont les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ est :

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}.$$

Le jacobien est donc $\det(D\Phi) = \frac{1}{8\sqrt{xyz}}$.

b) On remarque que $\Phi(x, y, z) \in \mathcal{E}$ si et seulement si (x, y, z) appartient à la boule de centre 0 et de rayon 1 (que l'on notera B), autrement dit que $\Phi(B) = \mathcal{E}$. D'après la formule du changement de variable,

$$\iiint_{\mathcal{E}} \sqrt{xyz}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{8} \iiint_B dx\, dy\, dz = \frac{1}{8} \mathrm{Vol}(B) = \frac{1}{6}\pi.$$

Exercice 4.— Calculer les produits extérieurs suivants :

a) $\alpha = (dx - 2dy) \wedge (dx + 2dy)$.

b) $\beta = (dx + dz) \wedge dy \wedge (3dz + dx)$.

Corrigé. a) On développe, puis on utilise les règles de calcul $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$. On obtient :

$$\alpha = dx \wedge dx + 2dx \wedge dy - 2dy \wedge dx - 4dy \wedge dy = 4dx \wedge dy.$$

b) De même :

$$\begin{aligned} \beta &= dx \wedge dy \wedge 3dz + dx \wedge dy \wedge dx + dz \wedge dy \wedge 3dz + dz \wedge dy \wedge dx \\ &= 3dx \wedge dy \wedge dz + dz \wedge dy \wedge dx. \end{aligned}$$

Or, $dz \wedge dy \wedge dx = -dy \wedge dz \wedge dx = dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$. D'où :

$$\beta = 2dx \wedge dy \wedge dz.$$