Chapitre II : fonctions d'une variable

1 Fonctions usuelles

Exercice 1.— Esquisser l'allure du graphe des fonctions usuelles, rappeler leur domaine de définition et leur fonction dérivée :

1. (Sur un même graphe) x, x^2, $\sqrt{x}$, e^x, $\ln(x)$;

2. $\frac{1}{x}$;

3. (Sur un même graphe) $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$.

2 Différentielles de Leibniz

Exercice 2.—

1. En utilisant la règle du produit, calculer la différentielle $d(x^2)$. Calculer de même $d(x^3)$, et $d(x^{1000})$.

2. Calculer de deux façons différentes la différentielle $d\sqrt{x}$: **a.** en utilisant la règle reliant différentielle et dérivée, **b.** en différentiant la relation $\sqrt{x}^2 = x$ et en utilisant la différentielle $dx^2 = 2xdx$.

3. Calculer de même la différentielle $d(\ln(x))$ de deux façons différentes.

4. A l'aide de la règle de substitution, en déduire la différentielle $d(\ln(u(x)))$, où u est une fonction de la variable x.

5. En utilisant la règle du produit, calculer la différentielle $d(\frac{1}{u})$. En déduire la différentielle $d(\frac{1}{u(x)})$.

6. Calculer de même la différentielle du quotient de deux fonctions, $d(\frac{v(x)}{w(x)})$.

Exercice 3.— *On rappelle que, pour tout nombre x entre -1 et 1,* $\arcsin(x)$ *est défini comme l'unique angle θ, exprimé en radian et compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, tel que* $\sin(\theta) = x$. *De même,* $\arccos(x)$ *est l'unique angle, compris entre 0 et π, dont le cosinus vaut x. Pour tout nombre réel x,* $\arctan(x)$ *est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.*

1. Faire deux dessins illustrant la définition de arcsin, l'un basé sur le graphe de la fonction sinus, l'autre sur la définition géométrique du sinus d'un angle. Mêmes questions pour arccos et arctan.

2. a. Expliquer, à l'aide d'un dessin, pourquoi $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, pour tout nombre x. **b.** Pour quelles valeurs de x a-t-on la relation $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$?

Exercice 4.— Calculer les différentielles des fonctions réciproques suivantes : arcsin, arccos et arctan. Pour la première, on pourra différencier la relation $\sin(\arcsin(x)) = x$.

3 Intégrales

Exercice 5.— Déterminer les primitives des formes différentielles associées aux fonctions suivantes.

1.

$$3x^2+x+2, \quad \sin(2x), \quad \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{1}{x^2+2}$$

2.

$$\frac{2x}{x^2+1}, \quad \tan(x), \quad \tan(2x)$$

(on pourra se rappeler de la dérivée de $\ln(u(x))$).

3.

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad \frac{1}{x^2-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}, \quad (\sin(x))^2, \quad (\cos(x))^2.$$

Exercice 6.— Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par partie :

$$\int_0^1 xe^x dx, \quad \int_0^{2\pi} x\sin(x)dx, \quad \int_0^{2\pi} x\cos^2 x dx.$$

$$\int_1^e \ln x dx, \quad \int_1^e x\ln x dx, \quad \int_0^1 \ln(x^2+1)dx.$$

Exercice 7.— Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variables :

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx, \quad \int_0^1 \frac{2xdx}{x^2+1}, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{3+\sin^2 t}dt, \quad \int_8^3 \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}.$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$$ (On pourra procéder au changement de variables $t=\tan(x/2)$).

Exercice 8.— On considère un barreau de longueur L ; le long de ce barreau paramétré par l'abscisse x comprise entre 0 et L, la masse linéaire est donnée par la fonction $\rho(x)=x^2$ (dans une unité quelconque).

1. Calculer la masse du barreau.

2. Calculer l'abscisse du centre de gravité du barreau.

On considère maintenant une plaque homogène, de densité constante 1, située entre la parabole d'équation $y=x^2$ et l'axe des abscisse :

$$P=\{(x,y) \mid x\in[0,L], 0\le y\le x^2\}.$$

3. Faire un dessin, et exprimer la masse située entre les abscisses x et $x+dx$ lorsque dx tend vers 0.

4. En déduire la masse de la plaque, puis l'abscisse de son centre de gravité.

5. Calculer l'ordonnée du centre de gravité. *On pourra "retourner la plaque" et utiliser le graphe de la fonction racine carrée.*

Exercice 9.— Calculer l'aire des domaines suivants :

1. $\{\ (x,y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ et } 1 \leq x+y \leq 2\}$
2. $\{\ (x,y) \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x \leq y \leq e^x\}$
3. $\{\ (x,y) \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ et } \sin^2 x \leq y \leq \sin x\}$
4. $\{\ (r,\theta) \mid \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \text{ et } r \leq 1\}$

4 Courbes paramétrées

Exercice 10.—

1. Soit $t \mapsto (R\cos(t), R\sin(t))$ le paramétrage habituel du cercle de rayon R.

2. Calculer le vecteur vitesse au temps t. Calculer le vecteur accélération. Représenter ces vecteurs sur un dessin.

3. Calculer la longueur du cercle.

4. On voudrait tester que la longueur ne dépend pas du paramétrage. Calculer à nouveau cette longueur en utilisant un paramétrage issu de l'équation $x^2+y^2=R^2$.

Exercice 11.— Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation conjoint est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
	4								4
$x(t)$		$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	
					0				
			2						2
$y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	
	-2						-2		
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

Exercice 12.— La courbe cycloide a pour équation paramétrique $x(t) = t - \sin(t), y(t) = 1 - \cos(t)$.

1. On considère un vélo se déplaçant en ligne droite, au-dessus de l'axe des abscisses, à vitesse constante égale à 1. On suppose que la roue avant est de rayon 1, et que la position initiale du centre de cette roue dans le repère (Oxz) est $(0,1)$. Faire un dessin. **a.** Quelle est l'équation de la courbe paramétrée suivie par le centre de la roue ? **b.** On considère un rayon de la roue qui, au temps $t=0$, relie le centre au point $(0,0)$. Au temps t, quelle est l'angle entre la verticale et ce rayon ? **c.** En déduire que l'extrémité du rayon suit la courbe cycloide.

2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x et y, et dessiner la courbe.