Fonctions de plusieurs variables

1 Calcul vectoriel

Exercice 1.—(Produit scalaire) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ coordonnées respectives $(1, 1, -1)$, $(2, -1, 1)$, $(3, 4, 5)$.

1. Déterminer les longueurs de ces vecteurs.

2. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Qu'en déduit-on ?

3. a. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{w}$. **b.** En déduire la valeur du cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs, puis une approximation de l'angle en degré (on pourra utiliser une calculatrice).

4. Calculer les coordonnées du projeté $\vec{w}'$ de $\vec{w}$ sur la droite vectorielle D engendrée par $\vec{u}$,

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha\vec{u} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2.— Sur un dessin, représenter

- un vecteur $\vec{u}$ quelconque du plan,
- l'ensemble des vecteurs $\vec{u}'$ pour lesquels le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ est positif,
- l'ensemble des vecteurs $\vec{u}'$ pour lesquels le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ est négatif.

Exercice 3.— (Déterminant, produit vectoriel) On reprend les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'exercice précédent.

1. Déterminer le vecteur $\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{w}$. Vérifier qu'il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{w}$.

2. Calculer la norme de $\vec{z}$, en déduire le sinus de l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

---

2 Domaine de définition

Exercice 4.— Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D et donner une représentation graphique de D.

1. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$
2. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$
3. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$
4. $f(x, y) = \sqrt{(x + y + 1)(x + y - 1)}$

---

3 Dérivées partielles, différentielle

Exercice 5.— Calculer les différentielles des fonctions suivantes, et en déduire leur dérivées partielles :

(a) $f(x,y,z) = x^3y + xyz + xz^3$ (b) $f(x,y) = x^{y^2}$

(c) $f(x,y,z) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) + \exp\left(\frac{z}{y}\right)$ (d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

Exercice 6.— Soit $f(u,v) = exp(u-2v)$, calculer la différentielle de f. Calculer les différentielles des deux fonctions $u : (x,y) \longmapsto \sin x$ et $v : (x,y) \longmapsto x^3 + y^2$. En applicant la règle de substitution, en déduire la différentielle de la fonction $f(u(x,y), v(x,y))$.

Exercice 7.— Calculer la différentielle de x^y, où x et y sont variables. Retrouver les dérivées de a^x, x^α, x^x.

Exercice 8.—
1. Diagonale d'un rectangle **a.** Donner l'expression de la diagonale $d(x,y)$ d'un rectangle de côtés x et y, calculer sa différentielle. **b.** On considère un rectangle de côtés x=30 cm et y=40 cm. Ecrire le développement limité à l'ordre 1. **c.** En négligeant le reste dans ce développement limité, donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utiliser la calculatrice !). **d.** Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.
2. a. Pression d'un gaz parfait soumis à l'équation $PV = kT$ (k une constante). Donner la variation de pression d'un gaz parfait qui occupe initialement un volume V avec une température T, lorsque le volume et la température subissent de petites variations dV et dT. **b.** Même question pour un gaz modélisé par l'équation de van der Waals,

$$\left(P + \frac{N^2a}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_{\mathrm{B}}T.$$

3. Volume d'un cône On mesure le rayon r et la hauteur h d'un cône, avec une incertitude de 2% sur le rayon, et de 1% sur la hauteur : ceci signifie, par exemple, que le vrai rayon est compris entre $r - dr$ et $r + dr$ avec $dr = 0,02r$. Évaluez l'incertitude $\frac{dV}{V}$ sur le volume $V(r,h) = \pi r^2 h/3$ du cône.

Exercice 9.— Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\varphi(\frac{y}{x}) \end{array} \right.$ Montrer que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

4 Dérivées d'ordre 2

Exercice 10.—
1. Montrer que $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ vérifie l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
2. On considère $u = 1/r$, où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Montrer que u satisfait l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Exercice 11.— Déterminer les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 des fonctions suivantes :
1. $f(x,y) = x^2 + xy - y^3$. Le théorème de symétrie de Schwarz est-il vérifié ? **2.** $f(x,y,z) = \cos(x+yz)$.

5 Ligne de niveau, gradient, fonctions implicites

Exercice 12.— Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = 3x + 2y$ avec $c = 1,\ 2,\ 0$

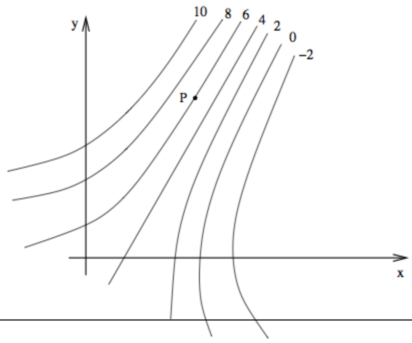
2. $f(x,y) = y^2$ avec $c = -1,\ 0,\ 1,\ 4$

3. $f(x,y) = \ln(x+y)$ avec $c = 0,\ 1$

Sur chaque dessin, ajouter les vecteurs gradients en quelques points des lignes de niveau dessinées (on se préoccupera seulement de leur direction, pas de leur longueur).

Exercice 13.—

On donne le dessin de quelques lignes de niveau d'une fonction f supposée très régulière (en particulier les dérivées partielles d'ordre 1 existent). Qu'en déduit-on sur le vecteur gradient de f au point P ? Compléter le dessin. En déduire le signe de $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$.



Exercice 14.— Soit $F(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x$.

1. Calculer et représenter le vecteur gradient au point $(2,1)$.

2. Qu'en déduit-on sur la ligne de niveau

$$L_1 \overset{def}{=} \{(x,y) | F(x,y) = 1\} \ ?$$

3. Montrer que l'équation $x^2 + y^4 - 3xy + x = 1$ défini implicitement y comme une fonction de x au voisinage du point $(2,1)$. Calculer la différentielle de cette fonction en $x = 2$ (on pourra différencier cette équation et utiliser le principe de substitution).

Exercice 15.— Même exercice avec l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ et le point $(1,0)$.

Exercice 16.— **1.** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $xy + yz + xz + 2x + 2y - z = 0$ est une surface au voisinage du point $(0,0,0)$, et donner l'équation du plan tangent. **2.** Montrer que cette équation définit implicitement une fonction $(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$ au voisinage de $(0,0,0)$. **3.** Calculer la différentielle de cette fonction au point $(0,0)$.

Exercice 17.— On modélise un gaz par la donnée d'une certaine relation entre volume, température et pression, qu'on écrit sous la forme générale $f(P,V,T) = 0$ (par exemple, pour un gaz parfait, la fonction f vaut $PV - nRT$, mais dans cet exercice on n'utilise pas cette formule particulière). On suppose que la fonction f admet des dérivées partielles continues.

1. On suppose que la relation $f(P,V,T) = 0$ permet de définir $P = P(V,T)$ comme une fonction de V et de T. **a.** En appliquant la règle de substitution, différencier la relation $f(P(V,T),V,T) = 0$. **b.** En déduire l'expression de la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial V}$ à l'aide des dérivées partielles de la fonction f.

2. Calculer le produit

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}$$

où $V(P,T)$ et $T(P,V)$ sont définies de façon analogue.

6 Surfaces paramétrées

Exercice 18.— On considère la surface paramétrée donnée par $M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(u,v) & = & u\cos(v) \\ y(u,v) & = & u\sin(v) \\ z(u,v) & = & u. \end{array}\right.$$

1. Décrire géométriquement l'intersection de cette surface avec le plan d'altitude z_0. En déduire le nom de cette surface.

2. Calculer les vecteurs tangents

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial u}$$

en un point $M(u,v)$ quelconque de la surface.

3. En déduire un vecteur orthogonal à la surface au point $M(u,v)$.

7 Intégration des 1-formes

Exercice 19.— Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (indication : on pourra poser $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, et calculer l'intégrale de la forme $\omega_{\vec{V}} := 3xdx + (x+y)dy$ sur le cercle en remplaçant x et y par leur valeur dépendant de t pour obtenir une 1-forme $f(t)dt$ sur $[0, 2\pi]$).

Exercice 20.— Calculer le travail W de la force $\vec{F}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 21.— Calculer les intégrales de chemin $\int_C \vec{F}(M).d\vec{M}$ avec

1. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin(x), \cos(y), xz)$ et $M(t) = (t^3, -t^2, t)$;

2. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$ et $M(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$.

8 Exercices supplémentaires

Exercice 22.— (continuité) Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque passant par l'origine. En utilisant un paramétrage de D, étudier la continuité de la restriction de f à $\mathcal{D}$.
2. Calculer $f(x, x^2)$ pour tout x.
3. La fonction f est continue en $(0,0)$?

Exercice 23.— Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \ln(xy)$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + x^2y^2z^2 + \sin(yz)$

(c) $f(x,y,z) = \tan(3x-y) + 6^{y+z}$

Exercice 24.— Soit $f(x,y) = x^2y^3$. On demande à deux étudiants de calculer le nombre $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.
— Le premier dit : "$f(y,x) = y^2x^3$, je dérive par rapport à x et j'obtiens" $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 3y^2x^2$".
— Le second dit : "je calcule la dérivée de f par rapport à x, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$, puis j'échange x et y, et j'obtiens $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 2yx^3$".
Qui a raison ?

Exercice 25.— Développer à l'ordre 1 les fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués :

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $(1,1)$, $(0,2)$, (a,b)

(b) $f(x,y,z) = x^2 + 3xyz - y^3 + z$ $(1,0,-1)$

(c) $f(x,y,z) = \sin x \cos y \tan z$ $\left(0, \pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 26.— Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satifaisant à l'équation d'Euler :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = mf.$$

Pour (x,y,z) fixés, on pose $\varphi : \alpha \longmapsto \frac{1}{\alpha^m} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Montrer que $\varphi' = 0$ et en déduire que f est homogène de degré m : pour tous α, x, y, z on a

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^m f(x,y,z).$$

Exercice 27.—(Laplacien en coordonnées polaires) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Déterminer $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

2. En déduire l'expression de Laplacien de f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 28.— L'astroïde est la courbe du plan définie par l'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ et représentée ci-dessous.

1. Calculer l'équation de la tangente à l'astroïde en un point qui n'est pas sur un axe de coordonnées.

2. Pour un point (x_0, y_0) de l'astroïde de coordonnées strictement positives, la tangente en ce point rencontre les deux axes de coordonnées en deux points. Calculer la distance entre ces deux points.

3. Expliquer pourquoi pour l'astroïde est reliée à l'image d'une échelle qui glisse le long d'un mur.