

Chapitre 3 : intégrales multiples

Exercice 1.— Calculer

$$\int_0^1 \left(\int_0^y x^2 dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^y y^2 dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x -\sin(x^2) dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} (2x + 3y^2) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^y 2xyz dx \right) dy \right) dz, \quad \int_0^1 \left(\int_x^{2x} \left(\int_0^{x+y} 3xy dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin y dx \right) dz \right) dy, \quad \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(\int_0^x -yz dz \right) dy \right) dx.$$

A l'aide du théorème de Fubini, interpréter chacun des calculs comme une intégrale double sur un domaine à déterminer. Dessiner les quatre premiers domaines.

Exercice 2.— Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

$$\iint_D (x + 2y) dx dy, \quad D = \{(x, y), 1 \leq x \leq 3, 1 + x \leq y \leq 2x\}.$$

$$\iint_D e^{x/y} dx dy, \quad D = \{(x, y), 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2y^3\}$$

$$\iint_D \frac{2}{x} dx dy, \quad D = \{(x, y), 1 \leq y \leq e, y^2 \leq x \leq y^4\}.$$

$$\iint_D x \cos y dx dy, \quad D \text{ borné par } y = 0, y = x^2, x = 2.$$

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D \text{ le premier quadrant du disque unité}$$

$$\iint_D ye^{2x} dx dy, \quad D \text{ le triangle de sommets } (0, 0), (2, 4), (6, 0).$$

$$\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

$$\iint_D (x + 2y) dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0, 0), (2, 2), (4, 0).$$

$$\iint xy dx dy, \quad D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$$

$$\iint \frac{dx dy}{(x + y)^2}, \quad D = \{(x, y), x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4\}.$$

$$\iint e^{2x+2y} dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0, 0), (1, 1), (1, -1).$$

Exercice 3.— En utilisant un changement de variables, calculer

$$\iint_D x dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le disque de centre } 0 \text{ et de rayon } 5.$$

$$\iint_D y dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant borné par le cercle}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ et les droites } y = x, y = 0.$$

$$\iint_D xy dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant et compris}$$

$$\text{entre les cercles } x^2 + y^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 25.$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad \text{où } D \text{ est l'anneau } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16.$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le disque unité.}$$

$$\iint \frac{dx dy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}, \quad D \text{ étant la partie du plan comprise}$$

$$\text{entre les ellipses d'équations } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 16.$$

$$\iiint_D z dx dy dz, \quad \iiint_D z^2 dx dy dz \quad \text{et} \quad \iiint_D (x + y - z)^2 dx dy dz,$$

$$\text{où } D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Exercice 4.— Déterminer le jacobien de la transformation $x = u^2, y = v^2, z = w^2$. Calculer le volume du domaine limité par les plans de coordonnées et la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$.

Exercice 5.— En utilisant les coordonnées cylindriques

a) Calculer

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$$

où D est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et les plans $z = -2$ et $z = 2$.

b) Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

où D est borné par le paraboloid $z = 16 - x^2 - y^2$ et le plan Oxy .

c) Calculer

$$\iiint_D xz dx dy dz$$

où D est borné par les plans $z = 0, z = y$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 4$, dans le demi-espace $y \geq 0$.

Exercice 6.— En utilisant les coordonnées sphériques.

a) Calculer

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

où D est la boule de centre 0 et de rayon 2.

b) Calculer

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$$

où D est la demi-sphère unité supérieure.

c) Calculer

$$\iiint_D y^2 dx dy dz$$

où D est la partie dans le premier octant de la boule de centre 0 et de rayon 2.

Exercice 7.— Calculer le volume compris entre

a) la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

b) les surfaces d'équation $z = x^2 + y^2 - 1$ et $z = 1 - x^2 - y^2$.

c) la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$ et le plan $z = 4$.

Exercice 8.— Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 2$.

Exercice 9.— Déterminer le centre de gravité du volume homogène défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Exercice 10.— Calculer l'aire de la surface d'équation $z = xy$ qui se projette horizontalement sur le disque $x^2 + y^2 \leq 4$ dans le plan Oxy .

Exercice 11.— Calculer l'aire découpée sur le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4x$ et telle que $z \geq 0$.
