Chapitre 4 : champs de vecteurs et formes différentielles

Exercice 1.— Calculer

a) $(x^2dx + z^2dy + dz) \wedge (dx - 2dy - x^2dz)$.

b) $(e^z dx - e^y dz) \wedge (xdy + ydz)$.

c) $(-y^2dx + dy + 2ydz) \wedge (zdx \wedge dy + xdz \wedge dx)$.

d) $(xdy + ydz) \wedge (zdy + xdz) \wedge (xdz - zdx)$.

e) $d(x^3 + e^z) \wedge (2dx \wedge dy - xdy \wedge dz)$.

f) $dx \wedge dy$ où $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, en fonction des formes dr et $d\theta$.

g) $dx \wedge dy \wedge dz$ où x, y, z sont les coordonnées sphériques, en fonction des formes $dr, d\theta, d\phi$ *(le calcul est long !)*.

Exercice 2.— Calculer les différentielles des formes suivantes :

a) $\omega_1 = xyz^2$.

b) $\omega_2 = 2ydx + 3xdy$.

c) $\omega_3 = 2xydx + x^2dy$.

d) $\omega_4 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$

e) $\omega_5 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$.

f) $\omega_6 = 3xydx \wedge dy$.

g) $\omega_7 = zxdx \wedge dy$

h) $\omega_8 = e^{x+y+z}[dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx]$.

i) [Cours] Calculer ddf où f est une fonction de classe C^2.

Exercice 3.—[Cours] Calculer le tiré en arrière $\Phi^*\omega$ de la forme différentielle $\omega = dx \wedge dy$ le long d'un changement de variables

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

(il s'agit simplement de substituer les variables x et y par les fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$). Conclusion ?

Exercice 4.— Parmi les formes de l'exercice 2 ci-dessus, lesquelles sont fermées ? Lesquelles sont exactes ? Pour celles qui le sont, en trouver une primitive.

Exercice 5.— On considère le champ vectoriel $\vec{V}(x, y) = (1+2xy, x^3 - 3)$. Ce champ est-il un champ de gradient ?

Exercice 6.— On donne le champ vectoriel

$$\vec{V}(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

a) Montrer que ce champ est un champ de gradient.

b) Déterminer le potentiel $U(x, y, z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.

c) Quelle est la circulation de ce champ de $A(0, 1, 0)$ à $B(\frac{\pi}{2}, 3, 0)$?

Exercice 7.—

1. a. Pour un point (x, y) avec $x > 0$, exprimer la coordonnée polaire $\theta = \theta(x, y)$ comme une fonction de x et de y. **b.** Calculer la différentielle de cette fonction.

On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \omega$ où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

3. Quel est le domaine de définition de la forme ω ? Est-elle exacte ?

Exercice 8.—

1. a. En utilisant le calcul des formes différentielles, déterminer le jacobien de la transformation de l'espace définie par $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$. **b.** En déduire le volume du domaine limité par les plans $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ et la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$.

2. a. De même, calculer le jacobien de la transformation du plan définie par $x = u/v$, $y = v$. **b.** En déduire l'intégrale $\iint_D -xydxdy$ où D est dans le premier quadrant et borné par les droites $y = x$, $y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1$, $xy = 3$.

Exercice 9.—[Difficile] On considère la forme différentielle $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$.

a) Montrer que ω n'est pas exacte.

b) Trouver une fonction $\psi(x)$, non nulle, telle que $\psi(x)\omega$ soit exacte. Trouver alors une fonction f telle que $df = \omega$. (On dit que ψ est un facteur intégrant.)

Exercice 10.—[Cours] Soient $\vec{V_1} = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)), \vec{V_2} = (F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z))$ deux champs de vecteurs quelconques. **1.** Calculer le produit extérieur des deux 1-formes de travail associées. **2.** Montrer qu'il s'agit de la 2-forme de flux associée au champ de vecteurs $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ obtenu en faisant en chaque point le produit vectoriel des deux vecteurs.

Exercice 11.—

1. Écrire deux interprétations vectorielles de la relation "$dd\omega = 0$" pour les formes de $\mathbb{R}^3$.

2. Sur $\mathbb{R}^3$, toute forme fermée est exacte. Ecrire deux traductions vectorielles de cette propriété.