Contrôle Continu du 20 octobre 2015

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3 et $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère cartésien. On considère l'application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$\begin{aligned} f(O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = O &+ (2x_1 + 3x_3 + 2)\vec{e_1} \\ &+ (x_1 + x_2 + 2x_3 - 1)\vec{e_2} \\ &+ (x_2 - x_3 + 1)\vec{e_3} \end{aligned}$$

Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ le vecteur des coordonnées du point $O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ dans le repère cartésien $\mathcal{R}$.

1. Déterminer $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,
$$f(O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = AX + B.$$
2. Trouver un point $O' \in \mathcal{E}$ tel que $f(O') = O'$.
(*Indication* : on cherchera à résoudre l'équation $f(O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$).

On suppose qu'un point $M = O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ admet pour vecteur coordonnées $X' = \left(\begin{smallmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{smallmatrix}\right)$ dans le repère cartésien $\mathcal{R}'$ (autrement dit, $M = O' + x'_1\vec{e_1} + x'_2\vec{e_2} + x'_3\vec{e_3}$).

3. Expliciter x'_1, x'_2, x'_3 en fonction de x_1, x_2, x_3.
4. Déterminer $A' \in M_3(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $X' \in \mathbb{R}^3$,
$$f(O' + x'_1\vec{e_1} + x'_2\vec{e_2} + x'_3\vec{e_3}) = A'X' + B'.$$

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. On considère l'*orthogonal* $F^\perp$ de F, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $F^\perp$ de E défini par

$$F^\perp = \{\phi \in E^* : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } v \in F\}.$$

1. Enoncer une formule du cours exprimant la dimension de $F^\perp$ en fonction des dimensions de E et F.

On considére l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, F_t le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs

$$v_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t-2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la dimension de F_t en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la dimension de $F_t^\perp$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Donner une base de $F_t^\perp$ pour $t \neq 2$.
5. Donner une base de $F_2^\perp$.

Exercice 3. On considère l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$. Si P, Q sont deux points *distincts* de $\mathcal{E}$ on désigne par (PQ) l'unique droite passant par ces deux points. Soient O, A, B trois points de $\mathcal{E}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire, les points O, A, B ne sont pas alignés).
Soient $A' \in (OA)$ et $B' \in (OB)$ deux points, $A' \neq O$ et $B' \neq O$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les uniques nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}.$$

1. Soit $h\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application définie pour tout point $P \in \mathcal{E}$ par $h(P) = O + \alpha\overrightarrow{OP}$. Montrer que h est une application affine et déterminer sa partie linéaire.

Le but de l'exercice est de montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(a) $\alpha = \beta$.
(b) $h(B) = B'$.
(c) les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

À l'école l'équivalence entre (a) et (c) est usuellement appellée « Théorème de Thalès ». Pour démontrer l'équivalence entre ces trois assertions, on va montrer les implications (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) et (c) $\Rightarrow$ (a) :

2. On commence en supposant $\alpha = \beta$. Montrer alors l'égalité $h(B) = B'$.
3. On ne suppose plus $\alpha = \beta$, mais on suppose $h(B) = B'$. Calculer $\vec{h}(\overrightarrow{AB})$ et en déduire que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Dorénavant on ne suppose ni $\alpha = \beta$, ni $h(B) = B'$, mais on suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Il existe alors un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

4. Montrer $\overrightarrow{OB'} = (\alpha - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$.
   (*Indication* : on commencera on écrivant $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$...)
5. Utilisant la définition de β en déduire $(\alpha - \lambda)\overrightarrow{OA} + (\lambda - \beta)\overrightarrow{OB} = 0$.
6. Conclure $\lambda = \alpha = \beta$.
   (*Indication* : On utilisera que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ forment une base.)

Exercice 4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel et $\mathcal{P}_\lambda$, $\mathcal{Q}_\lambda$ les sous-espaces affines de l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ donnés par les équations suivantes :

$$\mathcal{P}_\lambda : 2\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 3$$
$$\mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 2)x_3 = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les espaces vectoriels P_λ, Q_λ qui dirigent respectivement de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$.
2. Quelle est la dimension de P_λ et Q_λ ?
3. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles les sous-espaces vectoriels P_λ et Q_λ engendrent tout l'espace (autrement dit, pour lesquels $P_\lambda + Q_\lambda = \mathbb{R}^3$).
4. Pour $\lambda \neq 1, -3$ déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$.
5. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$. Que remarque-t-on ?
6. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_{-3}$ et $\mathcal{Q}_{-3}$.

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse A^{-1} de A.
2. La famille de vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

   forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Justifiez votre réponse.
3. Calculer la base duale $v_1^*, \ldots, v_4^*$.