Contrôle Continu du 24 novembre 2015

Exercice 1. Soit $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 5 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres et leur multiplicité algébrique.
2. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifiez votre réponse.
3. Déterminer les espaces propres de A, leur dimensions et en donner une base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.
5. Existe-il $v \in \mathbb{R}^4$ tel que $\phi(v) \neq 0$ mais $\phi(\phi(v)) = 0$? (*Indication : pensez à calculer le noyau de* A^2) Si oui, calculer $\phi(v)$.
6. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ soit
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition en cycles et la signature de σ.
2. Quel est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?
3. Expliciter l'inverse τ de σ, c'est-à-dire la permutation τ telle que $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$.
4. Déterminer la décomposition en cycles et la signature de τ.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

i.e. les coefficients diagonaux valent 3, ceux juste en-dessous valent 1, ceux juste au-dessus valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \mathrm{dét}(A_n)$.

1. En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.

On considère l'espace vectoriel E formé par les suites $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_i = bu_{i-1} + cu_{i-2}$ pour tout $i \geqslant 2$,

$$E = \{u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} : u_i = bu_{i-1} + cu_{i-2} \text{ pour tout } i \geqslant 2\}.$$

On rappelle que E est un espace vectoriel de dimension 2 (sans besoin de le montrer).

2. Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que les suites géométriques $u = (\lambda^i)$ et $v = (\mu^i)$ appartiennent à E.
3. En utilisant que E est de dimension 2, justifier pourquoi u, v forment une base de E.

4. En utilisant les valeurs $D_1 = 3$ et $D_2 = 7$ en déduire, en résolvant un système linéaire, une formule exacte donnant la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Calculer D_8 et D_9.

Exercice 4. Soient $n \geqslant 1$ un nombre entier et $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on considère l'application linéaire $\phi_\sigma \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par

$$\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

1. Montrer que pour tout $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ on a $\phi_\sigma \circ \phi_\tau = \phi_{\sigma\circ\tau}$.

On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire la matrice J de l'application ϕ_σ (dans la base canonique). Montrer sans calculs que $J^n = \mathrm{id}$.
3. Soient $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $\omega_k = e^{\frac{2k}{n}\pi \boldsymbol{i}}$ où $\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de -1. Montrer que le vecteur

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} \omega_k^{i-1} e_i$$

est un vecteur propre pour J et déterminer la valeur propre correspondante.
(Indication : on remarquera $\omega_k^n = e^{2k\pi \boldsymbol{i}} = 1$.)

On rappelle la formule pour le déterminant de Vandermonde (qu'on utilisera sans besoin de la montrer) : si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes, on a

$$(\star) \qquad \mathrm{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

4. En utilisant $(\star)$, justifier pourquoi les vecteurs v_k sont linéairement indépendants.

Pour tout $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ on considère la matrice

$$C(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i J^i.$$

5. Écrire la matrice $C(x_0, x_1, x_2, x_3)$.
6. En utilisant la question (3), montrer que, pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, v_k est un vecteur propre de $C(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Déterminer la valeur propre correspondante.
(Indication : il suffit de calculer $C(x_0, \ldots, x_{n-1})v_k$.)
7. En utilisant que le déterminant est le produit des valeurs propres, calculer $\mathrm{dét}\, C(x_0, \ldots, x_{n-1})$.