Corrigé du contrôle Continu du 24 novembre 2015

Exercice 1. Soit $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 5 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres et leur multiplicité algébrique.
2. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifiez votre réponse.
3. Déterminer les espaces propres de A, leur dimensions et en donner une base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.
5. Existe-il $v \in \mathbb{R}^4$ tel que $\phi(v) \neq 0$ mais $\phi(\phi(v)) = 0$? (*Indication : pensez à calculer le noyau de* A^2) Si oui, calculer $\phi(v)$.
6. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ soit

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé. Nous ne détaillerons pas les calculs dans le corrigé de cet exercice.

1. Le polynôme caractéristique est $\text{dét}(A - XI_4) = (2 - X)^2 X^2$. Les valeurs propres de A sont donc 0 et 2 ; elles sont toutes deux de multiplicité algébrique 2.
2. Comme le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Après calcul, on obtient $\ker(A) = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est donc de dimension 1, et $\ker(A-2I_4) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, qui est de dimension 2.
4. Les multiplicités alégébriques et géométriques de 0 diffèrent donc A n'est pas diagonalisable.
5. Le calcul de A^2 donne
$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
Son noyau est $\ker(A^2) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On remarque que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(A^2)$ mais pas à $\ker(A)$. De plus, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. On note $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur propre pour 0 obtenu à la question 3, on note v_2 le vecteur obtenu à la question précédente et qui vérifie $Av_2 = v_1$, et enfin on note v_3, v_4 deux vecteurs qui engendrent l'espace propre pour 2.
Alors, dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4), la matrice de ϕ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On considère la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition en cycles et la signature de σ.
2. Quel est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?
3. Expliciter l'inverse τ de σ, c'est-à-dire la permutation τ telle que $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$.
4. Déterminer la décomposition en cycles et la signature de τ.

Corrigé.

1. On obtient $\sigma = (1, 3, 8, 2) \circ (4, 6, 7, 5)$. La signature d'un 4 cycle est $(-1)^{4-1} = -1$ donc la signature de σ est le produit $(-1) \cdot (-1) = 1$.
2. Intuitivement, chacun des deux 4-cycles font permuter de manière circulaire les 4 éléments qui composent leur support en les décalant d'un "cran" ; en appliquant deux fois, on les décale de deux crans ; en appliquant trois fois, on les décale de trois crans ; enfin en appliquant quatre fois, chaque élément a fait un "tour", on est revenu à la situation de départ : $\sigma^4 = \mathrm{id}$.

   Ceci peut aussi se vérifier par le calcul en explicitant successivement ce que valent $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$.

   L'entier n recherché est donc 4.
3. On explicite τ élément par élément :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

4. La signature de l'inverse d'une permutation est toujours égale à la signature de la permutation considérée, en effet :

$$1 = \varepsilon(\sigma^{-1} \circ \sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)$$

   Donc $\varepsilon(\tau) = 1$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

i.e. les coefficients diagonaux valent 3, ceux juste en-dessous valent 1, ceux juste au-dessus valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \mathrm{dét}(A_n)$.

1. En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.

On considère l'espace vectoriel E formé par les suites $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_i = bu_{i-1} + cu_{i-2}$ pour tout $i \geqslant 2$,

$$E = \{u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} : u_i = bu_{i-1} + cu_{i-2} \text{ pour tout } i \geqslant 2\}.$$

On rappelle que E est un espace vectoriel de dimension 2 (sans besoin de le montrer).

2. Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que les suites géométriques $u = (\lambda^i)$ et $v = (\mu^i)$ appartiennent à E.
3. En utilisant que E est de dimension 2, justifier pourquoi u, v forment une base de E.
4. En utilisant les valeurs $D_1 = 3$ et $D_2 = 7$ en déduire, en résolvant un système linéaire, une formule exacte donnant la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Calculer D_8 et D_9.

Corrigé. 1. On développe par rapport à la première colonne :

$$D_n = 3D_{n-1} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puis on développe par rapport à la première ligne le déterminant dans le deuxième terme : On obtient $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$.

2. On cherche les suites de la forme (λ^n) et telles que $\lambda^n = 3\lambda^{n-1} - 2\lambda^{n-2}$ pour $n \geq 2$. En mettant λ^{n-2} en facteur, on voit que c'est équivalent à $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ donc à $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.
3. Les suites $(1^n) = (1)$ et (2^n) sont linéairement indépendantes car elle ne sont pas colinéaires (ce qui se vérifie sur les deux premiers termes). Elles forment une famille libre à 2 éléments dans un espace de dimension 2, donc une base.
4. Comme $(D_n) \in E$, la suite (D_n) est combinaison linéaire de (1) et (2^n). Il existe donc deux réels a, b tels que pour tout entier n, $D_n = a + b2^n$. En particulier, en $n = 1, 2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} 3 = D_1 = a + 2b \\ 7 = D_2 = a + 4b \end{cases},$$

ce qui se résout en $a = -1$ et $b = 2$.

On a donc calculé notre déterminant : pour tout entier n, $D_n = -1 + 2^{n+1}$

5. $D^8 = 2^9 - 1 = 511$ et $D^9 = 2^{10} - 1 = 1023$.

Exercice 4. Soient $n \geqslant 1$ un nombre entier et $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on considère l'application linéaire $\phi_\sigma \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par

$$\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

1. Montrer que pour tout $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ on a $\phi_\sigma \circ \phi_\tau = \phi_{\sigma\circ\tau}$.

On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire la matrice J de l'application ϕ_σ (dans la base canonique). Montrer sans calculs que $J^n = \mathrm{id}$.
3. Soient $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $\omega_k = e^{\frac{2k}{n}\pi \boldsymbol{i}}$ où $\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de -1. Montrer que le vecteur

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} \omega_k^{i-1} e_i$$

est un vecteur propre pour J et déterminer la valeur propre correspondante.

(Indication : on remarquera $\omega_k^n = e^{2k\pi\boldsymbol{i}} = 1$.)

On rappelle la formule pour le déterminant de Vandermonde (qu'on utilisera sans besoin de la montrer) : si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes, on a

$$(\star) \qquad \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

4. En utilisant $(\star)$, justifier pourquoi les vecteurs v_k sont linéairement indépendants.

Pour tout $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ on considère la matrice

$$C(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i J^i.$$

5. Écrire la matrice $C(x_0, x_1, x_2, x_3)$.
6. En utilisant la question (3), montrer que, pour tout $k = 0, \dots, n-1$, v_k est un vecteur propre de $C(x_0, \dots, x_{n-1})$. Déterminer la valeur propre correspondante.
(Indication : il suffit de calculer $C(x_0, \dots, x_{n-1})v_k$.)
7. En utilisant que le déterminant est le produit des valeurs propres, calculer $\text{dét}\, C(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Corrigé. 1. Il suffit de vérifier l'identité sur chaque vecteur de la base canonique. Or on a bien pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\phi_\sigma \circ \phi_\tau(e_i) = \phi_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{\sigma\circ\tau(i)} = \phi_{\sigma\circ\tau}(e_i).$$

2. La matrice J est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\sigma^n = \text{id}$, on déduit de la question 1 que $\phi_\sigma^n = \text{Id}$ donc que $J^n = I_n$.

3. On calcule Jv_k :

$$Jv_k = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_k^{i-1} e_{i+1} + \omega_k^{n-1} e_1.$$

En faisant le changement de variable $j = i+1$ dans la somme, on obtient : $Jv_k = \sum_{j=2}^{n} \omega_k^{j-2} e_j + \omega_k^{n-1} e_1$.

Puis en remarquant que $\omega_k^{n-1} = \omega_k^{-1}$, $Jv_k = \sum_{j=1}^{n} \omega_k^{j-2} e_j$, et donc en mettant ω_k^{-1} en facteur, $Jv_k = \omega_k^{-1} v_k$.

Le vecteur v_k est donc propre pour la valeur propre ω_k^{-1}.

4. La matrice de la famille $(v_k)_{k=0,\dots,n-1}$ dans la base canonique est une matrice de Vandermonde avec $a_k = \omega_k$. Comme les ω_k sont deux à deux distincts, son déterminant est non nul, donc la matrice est inversible et la famille est libre.

5.

$$C(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

6. C'est immédiat :

$$C(x_0, \dots, x_{n-1})v_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i J^i v_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \omega_k^{-i} \right) v_k.$$

7. Les v_k étant linéairement indépendants, et au nombre de n ils forment une base de vecteur propre. Donc $C(x_0, \dots, x_n)$ est diagonalisable et son déterminant est le produit des valeurs propres :

$$\text{dét}(C(x_0, \dots, x_{n-1})) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \omega_k^{-i} \right).$$