Examen première session

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Ce sujet comprend quatre exercices indépendants. Lorsque c'est possible, il est permis de répondre à une question en ayant admis le résultat des questions précédentes.

Exercice 1.

1. Calculer une base du noyau de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ données pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :
$$\begin{aligned} \ell_1(x, y, z, t) &= x + y - t \\ \ell_2(x, y, z, t) &= y - z. \end{aligned}$$
A l'aide de la question précédente, donner une base de $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$, l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)$ dans $\mathbb{R}^4$. Justifier.

3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système :
$$\begin{cases} x + y - t = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}.$$
Vérifier que le point P de coordonnées $(2, 1, -1, 2)$ appartient à $\mathcal{S}$. Donner sans calcul supplémentaire un repère de $\mathcal{S}$. Justifier.

Exercice 2. On considère la matrice à coefficients réels suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques.
3. Justifier par un théorème du cours que A est trigonalisable.
4. Quel calcul suffit-il de faire pour déterminer si A est diagonalisable ?
5. Trouver une base de chaque espace propre de A.
6. Trouver une base de chaque espace caractéristique de A.
7. Donner une matrice inversible P et un réel α tels que
$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
8. Expliquer comment calculer A^n pour n entier naturel quelconque. Calculer A^{10}.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients sont des entiers (dans $\mathbb{Z}$).

1. Justifier que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que A est inversible et que tous les coefficients de A^{-1} sont des entiers. Rappeler la formule donnant le déterminant de A^{-1} en fonction de celui de A, puis montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
3. Rappeler la formule exprimant l'inverse d'une matrice en fonction de la matrice de ses cofacteurs.
4. On suppose que $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Montrer que tous les coefficients de A^{-1} sont des entiers.

Exercice 4. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel V de dimension finie et vérifiant $E \oplus F = V$. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on appelle *affinité vectorielle* de base E, de direction F et de rapport α, l'application linéaire $f : V \to V$ qui à un vecteur $x \in V$, écrit sous la forme $x = y + z$, $y \in E$, $z \in F$ associe

$$f(x) = y + \alpha z.$$

1. Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$, $V = \mathbb{R}^2$ et E, F sont deux droites sécantes quelconques, faire un rapide dessin représentant l'image d'un vecteur x quelconque par une telle application.
2. Soit f une affinité vectorielle de rapport à α, de base et direction quelconque. Montrer que
$$f^2 = (1 + \alpha)f - \alpha \operatorname{Id}_V .$$
3. Réciproquement soit g un endomorphisme de V vérifiant $g^2 = (\alpha + 1)g - \alpha \operatorname{Id}_V$.
   (a) Donner un polynôme $Q(X)$ scindé à racines simples annulant g.
   (b) En déduire que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres possibles.
   (c) Montrer que g est une affinité vectorielle de rapport α ayant pour base et direction des espaces propres de g que l'on précisera.
4. On suppose maintenant que h est une application affine d'un espace affine $\mathcal{V}$ dans lui même, et qui admet un point fixe A (c'est à dire un point A vérifiant $h(A) = A$). Montrer que la partie linéaire de h est une affinité vectorielle si et seulement si
$$\forall M \in \mathcal{V}, \quad \overrightarrow{h(M)\, h \circ h(M)} = \alpha\, \overrightarrow{M h(M)}.$$