Examen première session - Corrigé

Exercice 1. 1. Calculer une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ données pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\begin{aligned} \ell_1(x, y, z, t) &= x + y - t \\ \ell_2(x, y, z, t) &= y - z. \end{aligned}$$

A l'aide de la question précédente, donner une base de $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$, l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)$ dans $\mathbb{R}^4$. Justifier.

3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système :

$$\begin{cases} x + y - t = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}.$$

Vérifier que le point P de coordonnées $(2, 1, -1, 2)$ appartient à $\mathcal{S}$. Donner sans calcul supplémentaire un repère de $\mathcal{S}$. Justifier.

Corrigé. 1. Il y a deux manières de répondre à cette question. On peut faire des opérations sur les colonnes de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A \\ I_4 \end{pmatrix}$, comme vu à de nombreuses reprises ce semestre. On peut aussi faire le raisonnement suivant.

La matrice A est de rang 2 car ses deux lignes ne sont pas colinéaires. Par le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 2. Par ailleurs, on peut vérifier que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent au noyau de A. Comme ils ne sont pas colinéaires et que le noyau est de dimension 2, ils en forment une base.

2. Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ si et seulement si $\ell_1(x, y, z, t) = 0$ et $\ell_2(x, y, z, t) = 0$. On remarque que les lignes de la matrice A sont les matrices de ℓ_1, ℓ_2 dans la base canonique. D'où le produit matriciel :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x,y,z,t) \\ \ell_2(x,y,z,t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que (x, y, z, t) appartient à $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A, et donc que $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$ est une base de $\mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$.

3. Par définition, $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Nous savons que pour ce type de système l'ensemble des solutions est un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du sytème homogène associé, c'est à dire ici $\{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 0\} = \ker A$. Une base de la direction de $\mathcal{S}$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et par conséquent, $\left(P, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est un repère de $\mathcal{S}$.

Exercice 2. On considère la matrice à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité algébrique.
3. Justifier par un théorème du cours que A est trigonalisable.
4. Quel calcul suffit-il de faire pour déterminer si A est diagonalisable ?
5. Trouver une base de chaque espace propre.
6. Trouver une base de chaque espace caractéristique.
7. Donner une matrice inversible P et un réel α tels que

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

8. Expliquer comment calculer A^n pour n entier naturel quelconque. Calculer A^{10}.

Corrigé.

1. On peut calculer le polynôme caractéristique de A en développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2-X \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(X^2-3X+3) + X - 1 = (X-1)(X^2-3X+2) = -(X-1)^2(X-2). \end{aligned}$$

2. De la question précédente, on déduit immédiatement que les valeurs propres de A sont 1, de multiplicité algébrique 2 et 2, de multiplicité algébrique 1.
3. Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, A est trigonalisable.
4. On sait que la multiplicité géométrique d'une valeur propre simple est toujours égale à sa multiplicité algébrique. Il suffit donc de vérifier si la multiplicité géométrique de 1 est égale à sa multiplicité géométrique pour déterminer si A est diagonalisable. Autrement dit, il suffit de vérifier si $\ker(A - I_3)$ est de dimension 2.
5. (Nous ne détaillerons pas les calculs dans le corrigé de cette question). On obtient :
   — $\ker(A - 2I_3)$ est de dimension 1 et engendré par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   — $\ker(A - I_3)$ est de dimension 1 et engendré par $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en particulier A n'est pas diagonalisable),
6. Les espaces caractéristiques sont respectivement $\ker((A-I_3)^2)$ et $\ker(A-2I_3)$. Nous avons déjà calculé $\ker(A-2I_3)$. Il reste donc à calculer $\ker((A-I_3)^2)$. Pour cela on calcule d'abord $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le noyau est (comme prévu [1]) de dimension 2 et engendré par $\left(v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

1. D'après le cours l'espace caractéristique d'une valeur propre a pour dimension la multiplicité algébrique de cette valeur propre.

7. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3 obtenus précédemment :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On sait alors (formule de changement de base) que les colonnes de $P^{-1}AP$ sont coefficients des vecteurs Av_1, Av_2, Av_3 dans la base v_1, v_2, v_3. Par construction (ce sont des vecteurs propres), $Av_1 = 2v_1$ et $Av_2 = v_2$. Pour Av_3, il faut faire un petit calcul :
$$Av_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = v_2 + v_3$$
On obtient donc
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
8. D'après la question précédente $P^{-1}AP = D + N$ avec $D = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Comme D et N commutent (vérification facile), on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$(D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N + \left(\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right) D^{n-2}N^2 + ...$$
Mais comme $N^2 = 0$, cette dernière formule se simplifie : $(D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N$. Enfin,
$$A^n = P(D+N)^n P^{-1} = P(D^n + nD^{n-1}N)P^{-1}.$$
Pour $n = 10$, on obtient $(D+N)^{10} = \left(\begin{smallmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Il faut ensuite calculer l'inverse de P :
$$P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$
On peut enfin achever le calcul :
$$A^{10} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1024 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1024 & 0 & 0 \\ -10 & -9 & 10 \\ -11 & -11 & 11 \end{smallmatrix}\right)$$

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients sont des entiers (dans $\mathbb{Z}$).

1. Justifier que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que A est inversible et que tous les coefficients de son inverse sont des entiers. Rappeler la formule donnant le déterminant de A^{-1} en fonction de celui de A, puis montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
3. Rappeler la formule exprimant l'inverse d'une matrice en fonction de la matrice de ses cofacteurs.
4. On suppose que $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Montrer que tous les coefficients de A^{-1} sont des entiers.

Corrigé. 1. C'est une conséquence immédiate de la définition du déterminant. En effet, la formule
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma_1} \dots a_{n\sigma(n)}$$
montre que $\det(A)$ est une somme de produits d'entiers, donc un entier.

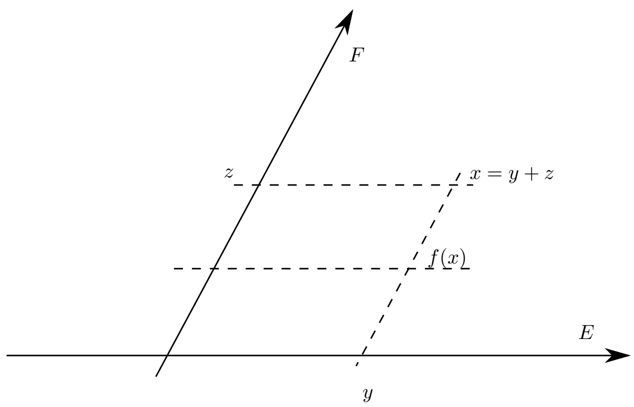
2. On rappelle que
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$
Donc sous nos hypothèses, $\det(A^{-1})$ est un entier qui est l'inverse de l'entier $\det(A)$. Or les seuls entiers dont l'inverse est entière sont 1 et -1.

3. La formule est la suivante :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{co}(A).$$
4. Le même argument que la question 1 implique que tous les cofacteurs de A sont entiers. Lorsque $\det(A) \in \{-1, 1\}$, alors la formule précédente montre que tous les coefficients de A^{-1} sont (au signe près) des cofacteurs de A, donc des entiers.

Exercice 4. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel V de dimension finie et vérifiant $E \oplus F = V$. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on appelle *affinité vectorielle* de base E, de direction F et de rapport α, l'application linéaire $f : V \to V$ qui à un vecteur $x \in V$, écrit sous la forme $x = y + z$, $y \in E$, $z \in F$ associe
$$f(x) = y + \alpha z.$$

1. Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$, $V = \mathbb{R}^2$ et E, F sont deux droites sécantes quelconques, faire un rapide dessin représentant l'image d'un vecteur x quelconque par une telle application.
2. Soit f une affinité vectorielle de rapport à α, de base et direction quelconque. Montrer que
$$f^2 = (1 + \alpha) f - \alpha \,\mathrm{Id}_V \,.$$
3. Réciproquement soit g un endomorphisme de V vérifiant $g^2 = (\alpha + 1) g - \alpha \,\mathrm{Id}_V$.
   (a) Donner un polynôme $Q(X)$ scindé à racines simples annulant g.
   (b) En déduire que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres possibles.
   (c) Montrer que g est une affinité vectorielle de rapport α ayant pour base et direction des espaces propres de g que l'on précisera.
4. On suppose maintenant que h est une application affine d'un espace affine $\mathcal{V}$ dans lui même, et qui admet un point fixe A (c'est à dire un point A vérifiant $h(A) = A$). Montrer que la partie linéaire de h est une affinité vectorielle si et seulement si
$$\forall M \in \mathcal{V}, \quad \overrightarrow{h(M)\, h \circ h(M)} = \alpha\, \overrightarrow{M h(M)}.$$

Corrigé. 1.



2. On note E et F la base et la direction de f. Comme E et F engendrent V, il nous suffit de vérifier l'identité sur les vecteurs de E, puis sur les vecteurs de F.
   Soit donc $y \in E$. Alors, $f(y) = y$, donc $f^2(y) = y$ et $(1+\alpha) f(y) - \alpha y = (1 + \alpha - \alpha) y = y$. L'identité demandée est bien vérifiée.
   Soit maintenant $z \in F$. Alors, $f(z) = \alpha z$, donc $f^2(z) = \alpha^2 z$ et $(1 + \alpha) f(z) - \alpha z = (1 + \alpha)\alpha z - \alpha z = \alpha^2 z$. L'identité est à nouveau vérifiée.

3. (a) De l'identité $g^2 - (1+\alpha)g + \alpha = 0$, on déduit immédiatement que $Q(g) = 0$ pour le polynôme
$$Q(X) = X^2 - (1+\alpha)X + \alpha = (X-1)(X-\alpha).$$
Ce polynôme est bien scindé à racines simples.

   (b) Comme g annule un polynôme scindé à racines simples, un théorème vu en cours affirme que g est diagonalisable. De plus, on sait que les valeurs propres de g sont des racines de $Q(X)$, donc ne peuvent être que 1 ou α.

   (c) Comme g est diagonalisable, on peut donc écrire $V = \ker(g - \mathrm{Id}_V) \oplus \ker(g - \alpha\,\mathrm{Id}_V)$. Tout $y \in \ker(g - \mathrm{Id}_V)$ vérifie $g(y) = y$ et tout $z \in \ker(g - \alpha\,\mathrm{Id}_V)$ vérifie $g(z) = \alpha z$, donc $g(y+z) = y + \alpha z$. On en conclut que g est une affinité vectorielle de rapport α, de base $\ker(g - \mathrm{Id}_V)$ et de direction $\ker(g - \alpha\,\mathrm{Id}_V)$.

4. On suppose pour commencer que $\overrightarrow{h(M)\,h^2(M)} = \alpha\,\overrightarrow{Mh(M)}$ pour tout point M. On note $\vec{h}$ la partie linéaire de h. Soient $\vec{u}$ un vecteur et M le point $A + \vec{u}$. La relation de Chasles donne
$$\overrightarrow{h(M)A} + \overrightarrow{Ah^2(M)} = \alpha(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Ah(M)}),$$
et comme $A = h(A) = h^2(A)$,
$$\overrightarrow{h(M)h(A)} + \overrightarrow{h^2(A)h^2(M)} = \alpha(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{h(A)h(M)}).$$
Donc par définition,
$$\vec{h}(\overrightarrow{MA}) + \vec{h}^2(\overrightarrow{AM}) = \alpha(\overrightarrow{MA} + \vec{h}(\overrightarrow{AM})).$$
En utilisant $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$, ceci donne bien
$$\vec{h}^2(\vec{u}) = (1+\alpha)\vec{h}(\vec{u}) - \alpha\vec{u}.$$
Cela prouve que $\vec{h}$ est une affinité vectorielle.
Réciproquement, supposons maintenant que $\vec{h}$ est une affinité vectorielle. Soit $M \in \mathcal{V}$ un point. On note $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AM}$. Alors par hypothèse, $\vec{h}^2(\vec{u}) = (1+\alpha)\vec{h}(\vec{u}) - \alpha\vec{u}$. En reprenant les calculs précédents à l'envers, on en déduit comme demandé $\overrightarrow{h(M)\,h^2(M)} = \alpha\,\overrightarrow{Mh(M)}$.