Examen deuxième session

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Ce sujet comprend six exercices indépendants. Lorsque c'est possible, il est permis de répondre à une question en ayant admis le résultat des questions précédentes.

Exercice 1. Montrer que la famille de vecteurs suivante est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer sa base duale :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -9 & 10 & 9 \\ 6 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le polynôme caractéristique de B est le polynôme $(1-X)^2(2-X)$.
2. Déterminer en faisant le moins de calculs possibles si la matrice B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$. (On ne cherchera pas à diagonaliser la matrice)

Exercice 3. On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer la signature de σ.
3. Est-il possible de décomposer σ comme produit de 8 transpositions ? Justifier.

Exercice 4. Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On note :

— $\mathcal{D}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, B]$ et $[C, D]$,
— $\mathcal{E}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, C]$ et $[B, D]$,
— $\mathcal{F}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, D]$ et $[B, C]$.

Montrer que les trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont concourantes et que leur point d'intersection est l'isobarycentre de A, B, C, D. Faire un rapide dessin représentant cette situation.

Exercice 5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{trace}(A^k) = 0$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Le but de cet exercice est de démontrer que $A^n = 0$.

1. Justifier que la matrice A est trigonalisable.
2. En général, comment s'exprime la trace d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ en fonction des valeurs propres de A ?
3. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres (supposées deux à deux distinctes) de A et $m_1, \ldots, m_d$ leurs multiplicités algébriques respectives. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
$$m_1\lambda_1^k + m_2\lambda_2^k + \cdots + m_d\lambda_d^k = 0.$$
4. On note $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ la matrice de Vandermonde d'ordre d :
$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_d^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{d-1} & \lambda_2^{d-1} & \cdots & \lambda_d^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \begin{pmatrix} m_1\lambda_1 \\ m_2\lambda_2 \\ \vdots \\ m_d\lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. On rappelle que $\det V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \prod_{1 \le i < j \le d} (\lambda_j - \lambda_i)$. Montrer que $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ est inversible. Déduire de la question précédente que 0 est la seule valeur propre de A.
6. Montrer que $A^n = 0$.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice et $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure par bloc donnée par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si B est diagonalisable alors nécessairement $A = 0$.

1. On commence par le cas $n = 1$. On considère donc une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs propres de B ? Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés, en fonction de la valeur de A ? En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
2. Considérons à présent le cas général d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & F \\ 0 & E \end{pmatrix}, \text{ avec } C \in M_p(\mathbb{R}), F \in M_{p,q}(\mathbb{R}), E \in M_q(\mathbb{R}).$$

   (a) On rappelle que pour tout entier k, la matrice M^k est également triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux C^k et E^k respectivement. Montrer que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la matrice $P(M)$ est triangulaire supérieure par bloc. Quels sont ses blocs diagonaux ?

   (b) Montrer que si M est diagonalisable, alors C et E sont diagonalisables. On pourra utiliser le critère selon lequel une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples.

3. Considérons maintenant le cas qui nous intéresse : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que B est diagonalisable. Montrer qu'il existe des réels $d_1, \ldots, d_n$ et une matrice P inversible tels que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale ayant $d_1, \ldots, d_n$ comme coefficients diagonaux. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = Q \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

   Expliciter Q en fonction de P.
4. Montrer que B est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide des questions 1 et 2, montrer que $d_1 = \cdots = d_n = 0$. En déduire que $A = 0$.