Examen deuxième session - Corrigé

Exercice 1. Montrer que la famille de vecteurs suivante est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer sa base duale :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé. On considère la matrice A dont les colonnes sont formées par les coordonnées des vecteurs v_1, v_2 et v_3. Son déterminant est 2, donc A est inversible et (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Nous avons vu en cours/TD que les coordonnées des éléments de la base duale sont données par les lignes de la matrice A^{-1}. On calcule donc cette inverse et on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit l'écritude de la base duale : Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} v_1^*(x, y, z) &= -\tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{2}z, \\ v_2^*(x, y, z) &= -x + y - 2z, \\ v_3^*(x, y, z) &= x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{2}z. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -9 & 10 & 9 \\ 6 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le polynôme caractéristique de B est le polynôme $(1 - X)^2(2 - X)$.
2. Déterminer en faisant le moins de calculs possibles si la matrice B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$. (On ne cherchera pas à diagonaliser la matrice)

Corrigé.

1. On calcule le polynôme caractéristique $\det(B - XI)$ directement, par exemple en développant par rapport à une ligne ou une colonne. On obtient sous forme développée : $-X^3 + 3X - 2$. Il ne reste plus qu'à vérifer que ce polynôme est égal à $(1 - X)^2(2 - X)$.
2. Le polynôme caractéristique étant scindé, déterminer si B est diagonalisable revient à déterminer si les dimensions des espaces propres (= multiplicités géométriques) correspondent aux multiplicités algébriques. Dans le cas d'une valeur propre simple, on sait que c'est toujours le cas. Il reste donc à déterminer si l'espace propre de 1, c'est à dire $\ker(B - I)$ est de dimension 2, c'est à dire (par le théorème du rang) si B est de rang 1. Or,

$$B - I = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 \\ -9 & 9 & 9 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

   a toutes ses colonnes colinéaires donc est de rang 1. Cela montre que A est diagonalisable.

Exercice 3. On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer la signature de σ.
3. Est-il possible de décomposer σ comme produit de 8 transpositions ? Justifier.

Corrigé. 1. On décompose directement avec la méthode vue en cours/TD. On obtient :

$$\sigma = (1, 5, 4) \circ (2, 7, 6, 3).$$

2. La signature est donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{3-1}(-1)^{4-1} = -1$
3. Non, comme la signature de σ est -1, on ne peut pas décomposer σ comme produit d'un nombre pair de transposition.

Exercice 4. Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On note :

— $\mathcal{D}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, B]$ et $[C, D]$,

— $\mathcal{E}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, C]$ et $[B, D]$,

— $\mathcal{F}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, D]$ et $[B, C]$.

Montrer que les trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont concourantes et que leur point d'intersection est l'isobarycentre de A, B, C, D. Faire un rapide dessin représentant cette situation.

Corrigé. On note tout d'abord G l'isobarycentre de A, B, C et D, c'est à dire le barycentre des points pondérés $(A, \frac{1}{4})$, $(B, \frac{1}{4})$, $(C, \frac{1}{4})$ et $(D, \frac{1}{4})$. D'après l'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de $(I, \frac{1}{2})$ et $(J, \frac{1}{2})$ où I est le barycentre de $(A, \frac{1}{2})$ et $(B, \frac{1}{2})$, et J est le barycentre de $(C, \frac{1}{2})$ et $(D, \frac{1}{2})$. Mais, les points I et J ne sont autres que les milieus respectifs des segments $[A, B]$ et $[C, D]$, donc G appartient à la droite passant par I et J, c'est à dire $\mathcal{D}$.

En raisonnant de manière similaire en ordonnant différemment les points, on obtient que $G \in \mathcal{E}$ et $G \in \mathcal{F}$. Ce qu'il fallait démontrer !

Exercice 5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{trace}(A^k) = 0$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Le but de cet exercice est de démontrer que $A^n = 0$.

1. Justifier que la matrice A est trigonalisable.
2. En général, comment s'exprime la trace d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ en fonction des valeurs propres de A ?
3. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres (supposées deux à deux distinctes) de A et $m_1, \ldots, m_d$ leurs multiplicités algébriques respectives. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$m_1\lambda_1^k + m_2\lambda_2^k + \cdots + m_d\lambda_d^k = 0.$$

4. On note $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ la matrice de Vandermonde d'ordre d :

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_d^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{d-1} & \lambda_2^{d-1} & \cdots & \lambda_d^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \begin{pmatrix} m_1\lambda_1 \\ m_2\lambda_2 \\ \vdots \\ m_d\lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. On rappelle que $\det V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\lambda_j - \lambda_i)$. Montrer que $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ est inversible. Déduire de la question précédente que 0 est la seule valeur propre de A.
6. Montrer que $A^n = 0$.

Corrigé. 1. C'est du cours : toute matrice complexe est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

2. On sait que deux matrices semblables ont même trace. Or, une matrice complexe est toujours semblable à une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres. Donc la trace d'une matrice complexe est égale à la somme de ses valeurs propres (comptées plusieurs fois si multiplicités).

3. Les valeurs propres de A^k sont les puissances k-ièmes des valeurs prores de A, avec les mêmes multiplicités. D'après la question précédente, $\text{trace}(A^k) = m_1\lambda_1^k + m_2\lambda_2^k + \cdots + m_d\lambda_d^k$. Comme $\text{trace}(A^k) = 0$ par hypothèse, on obtient l'égalité souhaitée.
4. On effectue le produit matriciel proposé, coefficient par coefficient. C'est ensuite une conséquence directe de la question précédente.
5. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, la formule donnée montre que le déterminant de Vandermonde est non-nul, donc la matrice de Vandermonde est inversible. Son noyau est donc restreint au vecteur nul. Or d'après la question précédente, le vecteur $\begin{pmatrix} m_1\lambda_1 \\ m_2\lambda_2 \\ \vdots \\ m_d\lambda_d \end{pmatrix}$ appartient à ce noyau. On en déduit donc que tous les λ_i sont nuls.
6. On déduit de la question précédente, que la matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Une telle matrice vérifie $T^n = 0$, et on en déduit donc $A^n = 0$.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice et $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure par bloc donnée par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si B est diagonalisable alors nécessairement $A = 0$.

1. On commence par le cas $n = 1$. On considère donc une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs propres de B ? Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés, en fonction de la valeur de A ? En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
2. Considérons à présent le cas général d'une matrice triangulaire supérieure par blocs

$$M = \begin{pmatrix} C & F \\ 0 & E \end{pmatrix}, \text{ avec } C \in M_p(\mathbb{R}), F \in M_{p,q}(\mathbb{R}), E \in M_q(\mathbb{R}).$$

   (a) On rappelle que pour tout entier k, la matrice M^k est également triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux C^k et E^k respectivement. Montrer que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, la matrice $P(M)$ est triangulaire supérieure par bloc. Quels sont ses blocs diagonaux ?

   (b) Montrer que si M est diagonalisable, alors C et E sont diagonalisables. On pourra utiliser le critère selon lequel une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples.
3. Considérons maintenant le cas qui nous intéresse : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que B est diagonalisable. Montrer qu'il existe des réels $d_1, \ldots, d_n$ et une matrice P inversible tels que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale ayant $d_1, \ldots, d_n$ comme coefficients diagonaux. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = Q \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

   Expliciter Q en fonction de P.
4. Montrer que B est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide des questions 1 et 2, montrer que $d_1 = \cdots = d_n = 0$. En déduire que $A = 0$.

Corrigé. 1. Comme B est triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale. Il n'y en a donc qu'une seule, A. L'espace propre associé est de dimension 1 ou 2. Si jamais elle vaut 2, alors B est une homothétie ce qui n'est possible que si $A = 0$. Si $A \neq 0$, l'espace propre est de dimension 1 et B n'est pas diagonalisable.

2. (a) On écrit $P(X)$ sous la forme $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$. Alors,

$$P(M) = \sum_{i=0}^d a_i M^i = \sum_{i=0}^d a_i \begin{pmatrix} C^i & * \\ 0 & E^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^d a_i C^i & * \\ 0 & \sum_{i=0}^d a_i E^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(C) & * \\ 0 & P(E) \end{pmatrix}.$$

   (b) Si M est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples annulé par M. D'après la question précédente, on voit que ce polynôme est aussi annulé par C et E. Donc C et E sont aussi diagonalisables.

3. D'après la question précédente, si B est diagonalisable, A l'est aussi, d'où l'existence de tels matrices P et D : $A = PDP^{-1}$. On vérifie ensuite que

$$B = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. La matrice B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Or cette matrice est la même que la matrice souhaitée si l'on permute les vecteurs de base. Si $(e_1, \dots, e_{2n})$ est la base canonique de R^{2n}, et si on note R la matrice de permutation envoyant e_i sur e_{2i-1} si $1 \leq i \leq n$ et e_i sur e_{2i} si $n+1 \leq i \leq 2n$, alors

$$\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} R^{-1}.$$

5. D'après la question 2, si B est diagonalisable, chacun des blocs 2×2 ci-dessus est diagonalisable. Donc d'après la question 1, chacun des d_i est nul. La matrice A est donc semblable à la matrice nulle donc nulle.