

## Feuille de TD n°1 : espaces vectoriels, dual, opérations élémentaires

---

**Exercice 1. VRAI ou FAUX ?** Les applications suivantes sont des formes linéaires sur un espace vectoriel :

1.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x - y$  ;
2.  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x$  ;
3.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  ;
4.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2$  ;
5.  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -x$  ;
6.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  ;
7.  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Re}(z)$  ;
8.  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$  ;
9.  $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P(X) \mapsto P(3)$  ;
10.  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f'(0)f(1)$  ;
11.  $C^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$  ;
12.  $\{\text{suites réelles}\} \rightarrow \mathbb{R}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 2.** 1. Écrire la matrice dans la base canonique de l'application linéaire  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

2. Même question pour l'application linéaire  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x + \sqrt{2}y + z \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - z \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Pour toute matrice  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ , on définit sa *trace*  $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  (somme des coefficients diagonaux).

1. Montrer que  $\operatorname{Tr}$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$ .
2. Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ .

**Exercice 4.** Soient  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace des polynômes de degré  $\leq n$  et  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  qui à tout  $P \in E$  associe  $P + P'$  (où  $P'$  est le polynôme dérivé de  $P$ ). Montrer que  $\phi$  est surjectif. (Indication : montrer d'abord que  $\phi$  est injectif.)

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{E}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels et soit  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathcal{E}$  qui envoie toute suite  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  sur la suite  $\Delta(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ . Montrer que  $\Delta$  est surjectif mais n'est pas injectif. En déduire que  $\mathcal{E}$  n'est pas de dimension finie.

**Exercice 6.** Soit  $D$  (resp.  $L$ ) l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le polynôme dérivé  $P'$  (resp. le polynôme  $XP$ ).

1. Calculer l'image et le noyau de  $L$ , puis de  $D$ . Que constatez-vous ?
2. En utilisant 1., montrer que le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  n'est pas de dimension finie.

**Exercice 7.** Soient  $V$  un  $k$ -espace vectoriel,  $E$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels, de dimension  $p$  et  $q$  respectivement. Soit  $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_r)$  une base de  $E \cap F$ , on la complète en une base  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{p-r}, v_1, \dots, v_r)$  de  $E$  et en une base  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{q-r})$  de  $F$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{p-r}, v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{q-r})$  est libre. (Considérer une égalité  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{p-r} e_{p-r} + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r = t_1 f_1 + \dots + t_{q-r} f_{q-r}$ .)
2. Montrer que  $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ .

**Exercice 8.** On considère dans  $\mathbb{R}^5$  le sous-espace  $L$ , resp.  $M$ , engendré par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations sur les colonnes de la ou les matrice(s) appropriée(s), donner des bases de  $L$ ,  $M$ ,  $L + M$  et de  $L \cap M$ .

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8/3 & 5 & 22/3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ .

1. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer  $\text{rang}(A)$  et des bases de  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Ker}(A)$ .
2. Donner une base de  $F^\circ$  où  $F$  est le sous-espace du dual de  $\mathbb{R}^5$  engendré par les formes linéaires  $x \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$ ,  $x \mapsto 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5$ ,  $x \mapsto 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5$ , et  $x \mapsto 3x_1 + 2x_2 + \frac{8}{3}x_3 + 5x_4 + \frac{22}{3}x_5$ .

**Exercice 10.** Reprendre la question 1 de l'exercice précédent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Deviner la question suivante et la résoudre!

**Exercice 11.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer  $A^{-1}$ .

2. Justifier que la famille  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  et trouver sa base duale.

**Exercice 12.** En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer, en fonction du paramètre  $t \in \mathbb{R}$ , une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

**Exercice 13** (Défi chrono!). Inverser le plus vite possible et sans erreur la matrice...

**Exercice 14.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $V = \mathbb{R}^4$ , soit  $V^*$  l'espace dual de  $V$  et  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$  la base duale de  $\mathcal{B}$ .

1. Soit  $P$  le plan de  $V$  engendré par les vecteurs  $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$  et  $v_2 = e_2 + e_3 + e_4$ . Pour  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ , sous quelles conditions la forme linéaire  $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^*$  s'annule-t-elle sur  $P$ ?
2. Déterminer une base  $(f_1, \dots, f_d)$  du sous-espace  $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \forall v \in P\}$  de  $V^*$  (où  $d = \dim P^\perp$ ). Puis, de façon équivalente, donner  $d$  équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant  $P$ .
3. Considérons maintenant les formes linéaires  $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$  et  $\psi = e_1^* + e_4^*$ . Déterminer la dimension et une base du sous-espace  $E = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 = \psi(v)\}$  de  $V$ .

**Exercice 15.** Soit  $V = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace des polynômes de degré  $\leq n$  et soit  $\mathcal{B}$  la base  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $V$ . Soit  $\partial$  l'endomorphisme de  $V$  qui à tout  $P \in V$  associe son polynôme dérivé  $P'$ . On pose  $\partial^i = \partial \circ \dots \circ \partial$  ( $i$  facteurs) pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , et  $\partial^0 = \text{id}_V$ . On fixe  $n = 4$  (mais on peut faire l'exercice pour  $n$  arbitraire).

1. Pour  $i = 0, \dots, n$ , on considère la forme linéaire  $\phi_i : V \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \frac{(\partial^i P)(0)}{i!}$ ; montrer que  $(\phi_0, \dots, \phi_n)$  est la base duale  $\mathcal{B}^*$  de la base  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  de  $V$ .
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Écrire la matrice  $A_\lambda$  exprimant la famille de vecteurs  $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et montrer que  $\mathcal{C}_\lambda$  est une base de  $V$ .
3. Soit  $u_\lambda$  l'endomorphisme de  $V$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_\lambda) = A_\lambda$ . Si  $\mu \in \mathbb{R}$ , pouvez-vous déterminer sans calcul la matrice de  $u_\mu \circ u_\lambda$  puis celle de  $u_\lambda^{-1}$ ? Sinon, calculez  $A_\lambda^{-1}$ .
4. Soit  $\mathcal{C}_\lambda^*$  la base duale de  $\mathcal{C}_\lambda$ . Écrire la matrice de passage  $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*)$ .

**Exercice 16** (Pour aller plus loin...). Trouver toutes les formes linéaires  $\phi$  sur  $M_n(\mathbb{R})$  qui sont multiplicatives, c'est à dire telles que pour toutes matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , on ait  $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ .