Feuille de TD n°2 : Géométrie affine dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les points

$$a = (-4, 5), \quad b = (-5, 2), \quad c = (-1, 3), \quad d = (-2, 4).$$

Vérifier que $(a, \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ forme un repère du plan. Calculer les coordonnées de d dans ce repère.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$, où O désigne le point $(0, 0)$. Soient I le point de coordonnées $(1, 1)$ et $r = r(I, \pi/4)$ la rotation de centre I et d'angle $\pi/4$.

1. Soit $z = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$, exprimer ses coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R} = (I, e_1, e_2)$ en fonction de x et y.
2. Exprimer les coordonnées (X', Y') de $z' = r(z)$ en fonction de X et Y, puis de x et y.
3. En déduire les coordonnées (x', y') de z' dans $\mathcal{R}_0$.
4. Justifier que r est une application affine et préciser sa partie linéaire.

Exercice 3. Montrer qu'une application affine est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si sa partie linéaire est injective (resp surjective, bijective).

Exercice 4.

1. Soit $(O, e_1, \dots, e_n)$ un repère de $\mathbb{R}^n$. On note $a_0 = O$, $a_1 = O + e_1, \dots, a_n = O + e_n$. Montrer que pour tous points $b_0, b_1, \dots, b_n$, il existe une unique application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui envoie les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{b_0b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0b_n}$. En déduire qu'il existe une unique application affine qui envoie les points $a_0, \dots a_n$ sur les points $b_0, \dots, b_n$.
2. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une application affine de $\mathbb{R}^2$ qui envoie le triangle ABC sur un triangle équilatéral.
3. Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan affine $\mathbb{R}^2$. A quelle condition existe-t-il une application affine de $\mathbb{R}^2$ qui envoie le quadrilatère $ABCD$ sur un carré ?

Exercice 5. Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On note

— A' le barycentre de $(B, \frac{1}{4})$ et $(C, \frac{3}{4})$,
— B' le barycentre de $(A, \frac{2}{5})$ et $(C, \frac{3}{5})$,
— I l'intersection des droites (AA') et (BB'),
— C' l'intersection des droites (CI) et (AB).

Faire un dessin. Trouver deux réels α, β tels que C soit le barycentre de (A, α) et (B, β).

Exercice 6 (La droite d'Euler)**.** Dans un triangle ABC quelconque, l'orthocentre H, le centre du cercle circonscrit Ω et le centre de gravité G sont alignés. Surprenant, non ?

Pour le démontrer, considérer le point $M = 3G - 2\Omega$, montrer que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{\Omega I}$ où I est le milieu du segment $[B, C]$, en déduire que M appartient à la hauteur issue de A et enfin conclure !

Exercice 7. Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On note :

— $\mathcal{D}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, B]$ et $[C, D]$,
— $\mathcal{E}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, C]$ et $[B, D]$,
— $\mathcal{F}$ la droite passant par le milieu des segments $[A, D]$ et $[B, C]$.

Montrer que les trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont concourantes et que leur point d'intersection est l'iso-barycentre de A, B, C, D. Faire un rapide dessin représentant cette situation.

Exercice 8. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système :

$$\begin{cases} x+y-t=1 \\ y-z=2 \end{cases}.$$

Rappeler pourquoi que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$. Trouver un repère de $\mathcal{S}$.

Exercice 9.

1. A quelle condition, deux équations

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b \quad \text{et} \quad a'_1x_1+\cdots+a'_nx_n=b'$$

décrivent-elles deux hyperplans affines parallèles ?

2. A quelle condition deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x+b'_1y+c'_1z=0 \\ a'_2x+b'_2y+c'_2z=0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$? la même droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$?

3. A quelle condition deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x+b'_1y+c'_1z=d'_1 \\ a'_2x+b'_2y+c'_2z=d'_2 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$? des droites affines parallèles de $\mathbb{R}^3$? la même droite affine de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner l'équation de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0=(x_0,y_0)$ et de direction $D=\mathbb{R}u$, où $u=(a,b)\neq 0$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation du plan affine $\mathcal{P}$ passant par le point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ et de direction $P=\mathbb{R}u\oplus\mathbb{R}v$, où $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner les équations de la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ et de direction $D=\mathbb{R}u$, où u est le vecteur ci-dessus.

Exercice 11. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tous $A,B\in\mathcal{F}$, la droite passant par A et B est incluse dans $\mathcal{F}$.

Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12 (Un exemple de projection/symétrie)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine muni du repère canonique (O,e_1,e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soit $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) la droite affine d'équation $3y-x=1$ (resp. $x+2y=4$) et soit p (resp. s) la projection sur $\mathcal{D}_1$ (resp. la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_1$) parallèlement à $\mathcal{D}_2$.

1. Déterminer la direction D_1 de $\mathcal{D}_1$ (resp. D_2 de $\mathcal{D}_2$).
2. Montrer que $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\{I\}$ pour un point I que l'on déterminera.
3. Déterminer un vecteur v_1 (resp. v_2) engendrant la droite vectorielle D_1 (resp. D_2) puis, notant $\mathcal{C}$ la base (v_1,v_2), écrire la matrice de passage $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C})$.
4. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(I,\mathcal{C})$ de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Pour tout point $M=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, exprimer les coordonnées (X,Y) de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de x et y.
5. Soient (X',Y') les coordonnées de $M'=p(M)$, et (X'',Y'') celles de $M''=s(M)$, dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer (X',Y') et (X'',Y'') en fonction de X et Y.
6. Dans le repère $\mathcal{R}_0=(O,e_1,e_2)$, déterminer les coordonnées (x',y') de M' et (x'',y'') de M''.