Feuille de TD n°3 : Applications multilinéaires, déterminants

Exercice 1. Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire. Soient λ un scalaire, $u, v \in E$ des vecteurs.

1. Exprimer $f(\lambda u, \ldots, \lambda u)$ en fonction de $f(u, \ldots, u)$.
2. On suppose $p = 2, 3$, exprimer $f(u + v, u + v)$ puis $f(u + v, u + v, u + v)$ sous forme développée.
3. On suppose à présent que f est symétrique. Que deviennent les formules précédentes ?
4. On suppose toujours f symétrique mais p quelconque. Donner une formule pour $f(u+v, \ldots, u+v)$.

Exercice 2. On considère l'application $\Omega : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Omega((x, y, z, t), (x', y', z', t')) = xy' - yx' + zt' - tz'$$

1. Montrer que Ω est une application bilinéaire antisymétrique.
2. En déduire que si deux vecteurs $u, u' \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $\Omega(u, u') = 0$.
3. La réciproque est-elle vraie ? Comparer avec ce qui se passe pour le déterminant $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dans une base donnée.

Exercice 3.

1. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Expliciter la formule donnant leur déterminant dans la base canonique.
2. Même question pour trois vecteurs (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère le polyèdre convexe dont les sommets sont $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$; $C = (4, 0, 0)$, $D = (4, 1, 1)$, $E = (-1, -1, 0)$, $F = (-1, 0, 1)$, $G = (2, -2, -1)$ et $H = (2, -1, 0)$. Justifier qu'il s'agit d'un parallélépipède, puis calculer son volume.

Exercice 5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 8} \in M_8(\mathbb{R})$. Dans la formule explicite donnant $\det(A)$, quel est le signe correspondant aux termes

- $a_{1,8}\, a_{2,7}\, a_{3,1}\, a_{4,6}\, a_{5,3}\, a_{6,4}\, a_{7,2}\, a_{8,5}$,
- $a_{1,8}\, a_{2,1}\, a_{3,3}\, a_{4,6}\, a_{5,5}\, a_{6,7}\, a_{7,4}\, a_{8,2}$,
- $a_{1,3}\, a_{2,6}\, a_{3,4}\, a_{4,5}\, a_{5,1}\, a_{6,8}\, a_{7,7}\, a_{8,2}$,
- $a_{1,6}\, a_{2,5}\, a_{3,4}\, a_{4,1}\, a_{5,2}\, a_{6,3}\, a_{7,7}\, a_{8,8}$,

Exercice 6. Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 8} \in M_8(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = 5$ si $j \neq \tau(i)$ et $a_{i\tau(i)} = 1$ pour tout i. En utilisant la formule explicite donnant $\det(A)$, montrer que $\det(A) - 1$ est un multiple de 25 ([1]). (*indication* : remarquer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_8$ et $\sigma \neq \tau$, il existe au moins deux indices $i \neq j$ tels que $\sigma(i) \neq \tau(i)$ et $\sigma(j) \neq \tau(j)$.) En déduire que A est inversible.

Exercice 7 (Matrices de permutation)**.** On appelle *matrice de permutation* une matrice dont chaque ligne et chaque colonne admet exactement un coefficient non nul, ce coefficient étant égal à 1. Expliquer comment calculer le déterminant d'une matrice de permutation. On pourra commencer par réfléchir sur des exemples de taille 3x3.

Exercice 8. Soit $(f_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ une famille d'applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit $A(t)$ la matrice dont les coefficients sont les $f_{ij}(t)$. Justifier que l'application $t \mapsto \det(A(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice A_x ci-dessous soit inversible :

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 10. Trouver l'équation du plan affine passant par les trois points $A = (4, 2, 3)$, $B = (-3, 1, 1)$ et $C = (0, 0, 1)$. Pour cela, on pourra exprimer le fait qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient à ce plan si et seulement si $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme une famille liée, et utiliser un déterminant.

1. On dit alors que $\det(A)$ est congru à 1 modulo 25

Exercice 11 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in k$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule :

$$(\star) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(\dagger) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.
5. Autre méthode pour $(\dagger)$. Soit X une indéterminée, vérifier que $V(X, a_2, \dots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $n-1$. Calculer son coefficient dominant et remarquer ses racines évidentes, retrouver ainsi la formule $(\dagger)$.
6. Soit $k_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans k et de degré au plus n. Etant donnés des scalaires 2 à 2 distincts $a_0, \dots, a_n \in k$, on considère les formes linéaires $P \mapsto P(a_0)$, ..., $P \mapsto P(a_n)$. Montrer qu'elles forment une base $k_n[X]$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

On pose $D_n = \det(A_n)$.

1. Calculer D_1 et D_2.
2. En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.
3. On considère l'espace vectoriel E formé par les suites $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_i = b\,u_{i-1} + c\,u_{i-2}$ pour tout $i \ge 2$,
$$E = \{u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} : u_i = bu_{i-1} + cu_{i-2} \text{ pour tout } i \ge 2\}.$$
On rappelle que E est un espace vectoriel de dimension 2. Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que les suites géométriques $u = (\lambda^i)$ et $v = (\mu^i)$ appartiennent à E.
4. Justifier que (u, v) forment une base de E.
5. Donner une formule exacte donnant la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.