Feuille de TD n°4 : Réduction des endomorphismes et des matrices I

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{ks}$, pour $k = 0, \dots, 4$. Déterminer toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres de l'endomorphisme $D : E \to E$, $f \mapsto f'' - 3f' + 2f$.

Exercice 2. Soient u et v deux endomorphismes d'un même espace vectoriel V. On suppose qu'ils commutent. Montrer que les espaces propres de u sont stables par v.

Exercice 3. Soient f une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine tel que $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Montrer que la direction de $\mathcal{F}$ est stable pour la partie linéaire de f. La réciproque est elle vraie ?

Exercice 4. Soient A une matrice satisfaisant ${}^tA = -A$ et $P_A(X)$ son polynôme caractéristique. Comparer $P_A(X)$ à $P_A(-X)$.

Exercice 5. Soit A une matrice réelle satisfaisant ${}^tA = A$. Montrer que toutes ses valeurs propres complexes sont en fait réelles.

Exercice 6. Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit D l'endomorphisme de E donné par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D. En déduire que la famille de fonctions $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, et soit $M_a \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont a, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls. Calculer son polynôme caractéristique puis son déterminant $\det(A) = P_A(0)$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.
2. Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer une base de chaque espace propre V_λ.

Exercice 9. On considère l'endomorphisme u de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $u\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 10. Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
2. Justifier que B est trigonalisable.
3. Compte tenu du résultat obtenu à la première question, quel calcul faut-il faire pour savoir si B est diagonalisable ? Effectuer ce calcul, et déterminer si B est diagonalisable ou non.
4. Selon ce qui est possible, diagonaliser ou trigonaliser B.

Exercice 11. Lorsque c'est possible diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ (pour B, on a $t \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Trigonaliser la matrice complexe suivante

$$\begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 (Vissage)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x', y', z')$ où

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3. \end{cases}$$

1. Justifier que f est une application affine et donner la matrice A de la partie linéaire de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que A admet une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda, \bar{\lambda}$ de module 1. Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$? Trouver un vecteur propre pour la valeur propre réelle.
3. Soit v un vecteur propre pour λ, que l'on ne cherchera pas à calculer. Montrer que $\bar{v}$ est vecteur propre pour $\bar{\lambda}$.
4. Montrer que A est semblable à une matrice réelle de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

   pour un réel θ que l'on déterminera.
5. Décrire géométriquement A.
6. Décrire géométriquement f.

Exercice 14.
1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Montrer que M est en fait diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de matrice réelle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.