Contrôle Continu du 10 octobre 2016

Exercice 1. On considère les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

et soit $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

1. Quelle est la dimension de F ?
2. En déduire la dimension d de $F^\perp$.
3. Donner une base de $F^\perp$.
4. En déduire d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant F.

Exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & t^2-1 & 0 & t^2-2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & t^2-1 & t^2-1 & t^2-1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en fonction de la valeur de t, une base de l'image et du noyau de f_t.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 2 et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme $X^2 P(\frac{1}{X})$; c'est-à-dire

$$\phi(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = a_0 X^2 + a_1 X + a_2.$$

1. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que ϕ est une bijection.
3. Soit $\mathcal{C} = (1 + X + X^2, X + X^2, X^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.
5. Soient $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, respectivement. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)$.