Contrôle Continu du 10 octobre 2016

Exercice 1. On considère les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix};$$

et soit $F = \langle v_1, v_2, v_3\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

1. Quelle est la dimension de F ?

   F est un sous-espace de dimension 2. Une façon de le voir est de calculer le rang de la matrice qui a les coefficients de v_1, v_2, v_3 comme colonnes.

   En faisant opérations élémentaires sur les colonnes on obtient une matrice échelonnée avec deux colonnes non-nulles, et donc de rang 2 :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\4&2&0\\0&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-C_1]{C_2\leftarrow C_2-C_1} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\4&-2&-4\\0&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{C_3\leftarrow C_3-2C_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\4&-2&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

   En particulier, les vecteurs v_1 et v_2 forment une base de F.

2. En déduire la dimension d de $F^\perp$.

   Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$; d'où

$$d = \dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 4 - 2 = 2.$$

3. Donner une base de $F^\perp$.

   On voit que les formes linéaires qui correspondent aux matrices ligne $\begin{pmatrix}-1&1&0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-4&0&1&2\end{pmatrix}$ s'annulent sur v_1 et v_2 (et par conséquent aussi sur v_3), et donc appartiennent à l'orthogonal. Comme elles sont linéairement indépendantes, et $\dim F^\perp = 2$, elles doivent former une base de $F^\perp$.

   Commme v_1, v_2 forment une base de F, pour trouver une base de $F^\perp$ il suffit de calculer le noyau $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&1&4&0\\1&1&2&1\end{pmatrix}$, ce que on peut faire avec des opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\left(\begin{array}{cccc}1&1&4&0\\1&1&2&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-4C_1]{C_2\leftarrow C_2-C_1} \left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&0&-2&1\\\hline 1&-1&-4&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{C_3\leftarrow C_3+2C_4} \left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&0&0&1\\\hline 1&-1&-4&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{array}\right).$$

4. En déduire d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant F.

   La base de $F^\perp$ nous fournit les équations indépendantes définissant F suivantes :

$$-x_1 + x_2 = 0$$
$$-4x_1 + x_3 + 2x_4 = 0.$$

Exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix}-1&t^2-1&0&t^2-2\\1&0&0&1\\0&0&t^2-1&0\\0&t^2-1&t^2-1&t^2-1\end{pmatrix}.$$

Déterminer, en fonction de la valeur de t, une base de l'image et du noyau de f_t.

On fait des opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & t^2-1 & 0 & t^2-2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & t^2-1 & t^2-1 & t^2-1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4 \leftarrow C_4+(t^2-2)C_1]{C_2 \leftarrow C_2+(t^2-1)C_1} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t^2-1 & 0 & t^2-1 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & t^2-1 & t^2-1 & t^2-1 \\ \hline 1 & t^2-1 & 0 & t^2-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - C_2} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 0 \\ 0 & t^2-1 & t^2-1 & 0 \\ \hline 1 & t^2-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On en déduit que, si $t \neq \pm 1$, alors f_t a rang 3 et une base de l'image de f_t est formée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^2-1 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas-là, le noyau $\mathrm{Ker}(f_t)$ *est de dimension* 1 *et engendré par le vecteur* $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par contre, si $t = \pm 1$, alors le rang de f_t est 1. L'image de $f_{\pm 1}$ est engendrée par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Une base du noyau de $f_{\pm 1}$ est composée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 2 et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme $X^2 P(\frac{1}{X})$; c'est-à-dire

$$\phi(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = a_0 X^2 + a_1 X + a_2.$$

1. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ *contient les coefficients des images des éléments de la base ; donc,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que ϕ est une bijection.

   Il y a plusieurs façons de montrer que ϕ *est une bijection. On peut observer que* $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$, *c'est-à-dire que* $\phi^{-1} = \phi$. *L'existence de l'application inverse implique déjà que* ϕ *est une bijection.*

   Sinon, on peut aussi observer que le rang de ϕ *est* 3, *car la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ *est échelonnée, et donc que que* ϕ *est une surjection. Le noyau de* ϕ *est* $\{0\}$, *et donc* ϕ *est injective. Étant surjective et injective,* ϕ *est une bijection.*

3. Soit $\mathcal{C} = (1 + X + X^2, X + X^2, X^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Il s'agit de trois vecteurs indépendants, car la matrice qui contient leurs coefficients comme colonnes est échelonnée, dans un espace vectoriel de dimension 3, *et donc d'une base.*

4. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

   La matrice de passage contient les vecteurs de $\mathcal{C}$ *exprimés dans la base* $\mathcal{B}$ *:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Soient $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, respectivement. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)$.

   La matrice de passage des bases duales vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*) = {}^t\!\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})^{-1}\right)$. *On calcule l'inverse de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ *:*

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 \leftarrow C_1 - C_3]{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, *on en déduit que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.