Contrôle Continu du 8 novembre 2016

Exercice 1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2x \\ 1 & 0 & 4x^2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A.

On considère les points de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 4x^2 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que les points $P_0, \dots, P_3$ sont contenus dans un plan affine si et seulement si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$ est liée.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les points $P_0, \dots, P_3$ ne sont pas contenus dans un plan affine. Justifier.
4. Calculer le barycentre des points $(P_0, \frac{1}{4})$, $(P_1, \frac{1}{4})$, $(P_2, \frac{1}{4})$ et $(P_3, \frac{1}{4})$.

Exercice 2. Soient A_1, A_2 deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Pour $i = 1, 2$ on considère l'application $h_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$h_i(A_i + v) = A_i + \frac{1}{2}v.$$

1. Pour $i = 1, 2$, justifier que h_i est affine de partie linéaire $v \mapsto \dfrac{1}{2}v$.
2. Déterminer la partie linéaire de l'application composée $h_3 = h_2 \circ h_1$.
3. Montrer que h_3 a un point fixe A_3 situé sur la droite (A_1A_2), qui est le barycentre des points $(A_1, \frac{1}{3})$ et $(A_2, \frac{2}{3})$.

Exercice 3. Soit λ un nombre réel. On considère les matrices

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \qquad A'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A_λ et A'_λ en fonction de λ.

On considère les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\mathcal{P}_\lambda : \lambda x + y - z = 1,$$
$$\mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

2. Déterminer la dimension de $\mathcal{P}_\lambda$, en fonction de λ, donner une base de l'espace vectoriel qui le dirige.
3. Faire de même pour $\mathcal{Q}_\lambda$.

On se propose d'étudier l'intersection de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$:

$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda - 1)z = 1. \end{cases}$$

4. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ ne se rencontrent pas.
(Indication : $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent si et seulement si $\mathrm{rg}(A_\lambda) = \mathrm{rg}(A'_\lambda)$.)
5. Pour quelles valeurs de λ les sous-espaces affines $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent-ils en un point R_λ ? Déterminer R_λ.