Corrigé du Contrôle Continu du 8 novembre 2016

Exercice 1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2x \\ 1 & 0 & 4x^2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A.

On considère les points suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \\ 4x^2 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que les points $P_0, \dots, P_3$ sont contenus dans un plan affine si et seulement si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$ est liée.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les points $P_0, \dots, P_3$ ne sont pas contenu dans un plan affine.
4. Calculer le barycentre des points $(P_0, \frac{1}{4})$, $(P_1, \frac{1}{4})$, $(P_2, \frac{1}{4})$ et $(P_3, \frac{1}{4})$.

Solution.

1. En développant par rapport à la deuxième colonne on a :

$$\text{dét}\, A = -\,\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 4x^2 \end{pmatrix} = -4x^2 + 2x = 4x(\tfrac{1}{2} - x).$$

2. Supposons ces 4 points tous contenus dans un plan affine $\mathcal{F}$ dirigé par un plan vectoriel F. Alors, chacun des 3 vecteurs $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3})$ est contenu dans F, qui est de dimension 2. Ils forment donc une famille liée. Réciproquement, s'il forment une famille liée, ces trois vecteurs sont contenus dans un espace vectoriel F de dimension 2. L'espace affine $\mathcal{F}$ donné par $\mathcal{F} = P_0 + F$ contient alors P_0 et contient aussi pour chaque i le point $P_i = P_0 + \overrightarrow{P_0P_i}$.
3. Les points $P_0, \dots, P_3$ sont contenus dans un plan affine si et seulement si les vecteurs

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 4x^2 \end{pmatrix},$$

   sont linéairement dépendants. Cela se produit si et seulement si le déterminant de A s'annule, i.e. $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Autrement dit, les points $P_0, \dots, P_3$ ne sont pas contenu dans un plan affine si et seulement si $x \neq 0, \frac{1}{2}$.
4. Le barycentre cherché est

$$\tfrac{1}{4}P_0 + \tfrac{1}{4}P_1 + \tfrac{1}{4}P_2 + \tfrac{1}{4}P_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2x+1 \\ 4x^2+1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 2. Soient A_1, A_2 deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Pour $i = 1, 2$ on considère l'application $h_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$h_i(A_i + v) = A_i + \frac{1}{2}v.$$

1. Pour $i = 1, 2$, montrer que h_i est affine et déterminer sa partie linéaire.
2. Déterminer la partie linéaire de l'application composée $h_3 = h_2 \circ h_1$.
3. Montrer que h_3 a un point fixe A_3 situé sur la droite (A_1A_2) et il est le barycentre des points $(A_1, \frac{1}{3})$ et $(A_2, \frac{2}{3})$.

Solution.

1. La partie linéaire de h_i est $\phi_i := \frac{1}{2}\mathrm{id}$. En fait, pour tout point $P \in \mathbb{R}^2$, on a
$$h_i(P) = h_i(A_i + \overrightarrow{A_iP}) = A_i + \phi_i(\overrightarrow{A_iP}),$$
ce qui montre d'ailleurs que h_i est affine.
2. D'après le cours, la partie linéaire de la composée de deux applications affines est la composée des parties linéaires. Donc,
$$\overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{h_2 \circ h_1} = \overrightarrow{h_2} \circ \overrightarrow{h_1} = \tfrac{1}{4}\mathrm{id}.$$
3. Soit G le barycentre des points $(A_1, \frac{1}{3})$ et $(A_2, \frac{2}{3})$. On vérifie qu'il est le point fixe de h_3. Par définition de G,
$$G = A_1 + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_1}.$$
En appliquant la définition de h_1,
$$h_1(G) = h_1(A_1 + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_2}) = A_1 + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{A_2A_1}.$$
En faisant de même pour h_2,
$$h_3(G) = h_2(h_1(G)) = h_2(A_2 + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{A_2A_1}) = A_2 + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_1} = G.$$
En particulier G est un point fixe de h_3 (en fait, l'unique) et il est, bien entendu, sur la droite (A_1A_2).

□

Exercice 3. Soit λ un nombre réel. On considère les matrices
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}, \qquad A'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A_λ et A'_λ en fonction de λ.

On considère les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$\mathcal{P}_\lambda : \lambda x + y - z = 1,$$
$$\mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + (\lambda-1)z = 1. \end{cases}$$

2. Déterminer la dimension de $\mathcal{P}_\lambda$, en fonction de λ, donner une base de son espace directeur.
3. Faire de même pour $\mathcal{Q}_\lambda$.

On se propose d'étudier l'intersection de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$:
$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda-1)z = 1. \end{cases}$$

4. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ ne se rencontrent pas.
(Indication : $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent si et seulement si $\mathrm{rg}(A_\lambda) = \mathrm{rg}(A'_\lambda)$.)
5. Pour quelles valeurs de λ les sous-espaces affines $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent dans un point R_λ ? Déterminer R_λ.

Solution.

1. On étudie d'abord A_λ :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 - \lambda L_3 \to L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1)+2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, A_λ est de rang 3 si et seulement si $\lambda(\lambda-1)-2 \neq 0$. Or on a $\lambda(\lambda-1)-2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$, donc $\mathrm{rg}(A_\lambda) = 3$ si et seulement si $\lambda \neq -1, 2$. Si $\lambda = 1, 2$ alors $\mathrm{rg}(A_\lambda) = 2$. On étudie A'_λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 - \lambda L_3 \to L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1)+2 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A'_λ est de rang 3 si et seulement si $\lambda \neq 2$. Si $\lambda = 2$ alors $\mathrm{rg}(A_2) = 2$.

2. L'espace directeur P_λ de $\mathcal{P}_\lambda$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $\lambda x + y - z = 0$:

$$P_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

En particulier $\mathcal{P}_\lambda$ est de dimension 2.

3. L'espace directeur Q_λ de $\mathcal{Q}_\lambda$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par les équations $y - 3z = 0$ et $x + (\lambda-1)z = 0$:

$$Q_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En particulier $\mathcal{Q}_\lambda$ est de dimension 1.

4. Admettons provisoirement que l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est non vide si et seulement $\mathrm{rg}(A_\lambda) = \mathrm{rg}(A'_\lambda)$. Cela se produit en deux cas :

$$\begin{aligned} \lambda \neq -1, 2 \quad &: \quad \mathrm{rg}(A_\lambda) = \mathrm{rg}(A'_\lambda) = 3, \\ \lambda = 2 \quad &: \quad \mathrm{rg}(A_\lambda) = \mathrm{rg}(A'_\lambda) = 2. \end{aligned}$$

En particulier $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent si et seulement si $\lambda \neq -1$.

Justifions maintenant que $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est non vide si et seulement $\mathrm{rg}(A_\lambda) = \mathrm{rg}(A'_\lambda)$. Rappelons que le rang d'une matrice est la dimension de son image, c'est à dire par l'espace engendré par ses colonnes. L'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est non vide si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda-1)z = 1. \end{cases}$$

admet une solution, autrement dit s'il existe $X = (x, y, z)$ tel que $A_\lambda X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à l'image de A_λ. Ceci est équivalent à dire que l'image de A_λ, c'est à dire l'espace engendré par les colonnes de A_λ ne change pas de dimension lorsqu'on lui ajoute $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, les colonnes de A'_λ engendrent un espace de même dimension que celles de A_λ.

5. D'après la question (1), l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est donnée par

$$\begin{cases} -(\lambda+1)(\lambda-2)z = 2-\lambda, \\ y - 3z = -1, \\ x + (\lambda-1)z = 1. \end{cases}$$

De la première équation on tire l'égalité :

$$z = \frac{1}{\lambda+1},$$

et donc

$$x = 1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \qquad y = \frac{3}{\lambda + 1} - 1.$$

En d'autres mots, l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est le point

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \\ \frac{3}{\lambda+1} - 1 \\ \frac{1}{\lambda+1} \end{pmatrix}.$$

Supposons $\lambda = 2$. L'intersection $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q}_2$ est alors donnée par le système

$$\begin{cases} y - 3z = -1, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

C'est une droite dirigée par le vecteur $(-1, 3, 1)$. En particulier, $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent en un seul point si et seulement si $\lambda \neq -1, 2$. $\square$