Contrôle continu 3

Exercice 1 ($\simeq$ 12 points)**.** Parmi les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes, lesquelles sont diagonalisables, lesquelles sont trigonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$? Justifier. Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice, c'est à dire, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que la matrice considérée s'écrive PDP^{-1}. (Il n'est rien demandé lorsque la matrice est seulement trigonalisable)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ($\simeq$ 8 points)**.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On rappelle que le produit de deux nombres impairs est impair et que le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair. Dans la formule explicite donnant le déterminant de A (qui contient $4! = 24$ termes), un seul terme de la forme $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$ est impair. Lequel ? Que vaut-il ?
2. On rappelle maintenant que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire. En déduire sans calcul que $\det(A)$ est impair, puis que A est inversible.
3. Calculer $\det(A)$. (Cette question est indépendante des deux précédentes)

Exercice 3 ($\simeq$ 6 points)**.** On considère la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{n-2} & & & & 0 & 1 \\ (-1)^{n-1} & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(où les coefficients non représentés sont nuls). Autrement dit, le coefficient i, j de A_n est égal à $(-1)^{i-1}$ si $j = 1$, il est égal à 1 si $j = i + 1$ et vaut 0 sinon.

1. En développant par rapport à la première colonne, calculer le polynôme caractéristique de A_n.
2. Pour quelles valeurs de n le réel 1 est-il valeur propre de A_n ?