Contrôle continu 3 - Corrigé

Exercice 1. Parmi les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes, lesquelles sont diagonalisables, lesquelles sont trigonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$? Justifier. Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice, c'est à dire, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que la matrice considérée s'écrive PDP^{-1}. (Il n'est rien demandé lorsque la matrice est seulement trigonalisable)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé. Le polynôme caractéristique de A est (après calcul) $P_A(X) = -(X-1)^2(X+1)$. Il est scindé donc A est trigonalisable. Comme la valeur propre -1 est simple, sa multiplicité algébrique est automatiquement égale à sa multiplicité géométrique. Pour savoir si A est diagonalisable, il suffit donc de vérifier si la multiplicité géométrique de 1 est égale à la multiplicité algébrique de 1. Autrement dit, il suffit de voir si la dimension du noyau de $A - I_3$ est 2. Par le théorème du rang, ceci est équivalent à dire que $A - I_3$ est de rang 1. Or,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang 1 puisque deux de ses colonnes ne sont pas colinéaires. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de B est $P_B(X) = -X(X^2+1)$. Il n'est pas scindé, donc B n'est pas trigonalisable (et donc pas diagonalisable non plus).

Le polynôme caractéristique de C est $P_C(X) = -X(X-1)(X+1)$. Il est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. Les valeurs propres sont 0, 1 et -1, elles sont simples donc on sait que les espaces propres sont de dimension 1. Pour trouver une base de vecteurs propres il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans chacun des noyaux des matrices C, $C - I_3$, $C + I_3$. Après calcul, on trouve :

$$\ker C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \ker(C - I_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \ker(C + I_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire $C = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On rappelle que le produit de deux nombres impairs est impair et que le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair. Dans la formule explicite donnant le déterminant de A (qui contient $4! = 24$ termes), un seul terme de la forme $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$ est impair. Lequel ? Que vaut-il ?

2. On rappelle maintenant que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire. En déduire sans calcul que $\det(A)$ est impair, puis que A est inversible.
3. Calculer $\det(A)$. (Cette question est indépendante des deux précédentes)

Corrigé. 1. Pour qu'un tel terme soit impair, il faut et il suffit que chacun des quatre facteurs $a_{1\sigma(1)}$, $a_{2\sigma(2)}$, $a_{3\sigma(3)}$, $a_{4\sigma(4)}$ soient tous impairs. Le seul coefficient impair de la 1ère ligne est le deuxième, donc on doit avoir $\sigma(1) = 2$. Le même argument appliqué à la deuxième ligne donne $\sigma(2) = 3$. On obtient de même $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$. Cela laisse donc bien un seul choix possible de permutation.

On peut alors calculerr la signature de σ : on remarque que σ est le 3-cycle $(1, 2, 3)$ et est donc de signature 1. D'où $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)} = 1$.

2. Dans la somme $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$, tous les termes sont pairs et un seul est impair. Donc la somme est impaire. Le déterminant de A est impair donc il n'est pas nul. On en déduit que $\det(A) \neq 0$ et donc que A est inversible (sans avoir fait un seul calcul !)
3. Pour calculer explicitement le déterminant, une manière rapide (mais ce n'est bien sûr pas la seule) consiste à procéder comme suit : On fait successivement les opérations suivantes : $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$. On obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & 11 \end{vmatrix}.$$

Puis on développe par rapport à la première ligne puis la troisième : on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 11 \end{vmatrix} = -7,$$

qui est bien impair.

Exercice 3. On considère la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{n-2} & & & & 0 & 1 \\ (-1)^{n-1} & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(où les coefficients non représentés sont nuls). Autrement dit, le coefficient i, j de A_n est égal à $(-1)^{i-1}$ si $j = 1$, il est égal à 1 si $j = i + 1$ et vaut 0 sinon.

1. En développant par rapport à la première colonne, calculer le polynôme caractéristique de A_n.
2. Pour quelles valeurs de n le réel 1 est-il valeur propre de A_n ?

Corrigé.

1. Comme demandé, on développe par rapport à la première colonne :

$$P_{A_n}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & & & & \\ -1 & -X & 1 & & & \\ 1 & & -X & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{n-2} & & & & -X & 1 \\ (-1)^{n-1} & & & & & -X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} -X & 1 & & & \\ & -X & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -X & 1 \\ & & & & -X \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ & -X & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -X & 1 \\ & & & & -X \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ -X & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & -X & 1 \end{vmatrix}.$$

Plus précisément, dans la somme ci-dessus, pour $i \geq 1$, le i-ème terme est de la forme

$$(-1)^{i+1}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix},$$

où $B \in M_i(\mathbb{R})$ et $C \in M_{n-1-i}(\mathbb{R})$ sont les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -X & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & -X & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -X & 1 & & & \\ & -X & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -X & 1 \\ & & & & -X \end{pmatrix}.$$

Ce i-ème terme est le déterminant d'une matrice diagonale par bloc, chacun des blocs diagonaux étant triangulaire. Il vaut donc $\det(B)\det(C) = (-X)^{n-1-i}$. D'où,

$$P_{A_n}(X) = (1-X)(-X)^{n-1} + (-X)^{n-2} + \cdots + 1 = (-X)^n + (-X)^{n-1} + \cdots + 1.$$

2. On voit que 1 est racine du polynôme caractéristique si et seulement si n est impair.