

Devoir d'entraînement : corrigé

Exercice 1. 1. Trouver une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les formes linéaires sur \mathbb{R}^4 données pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\begin{aligned} \ell_1(x, y, z, t) &= x + y - t \\ \ell_2(x, y, z, t) &= y - z. \end{aligned}$$

A l'aide de la question précédente, donner une base de $\text{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$, l'orthogonal de $\text{vect}(\ell_1, \ell_2)$ dans \mathbb{R}^4 . Justifier.

Corrigé. 1. Il y a deux manières de répondre à cette question. On peut faire des opérations sur les colonnes de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A \\ I_4 \end{pmatrix}$, comme vu à de nombreuses reprises en TD. On peut aussi faire le raisonnement suivant.

La matrice A est de rang 2 car ses deux lignes ne sont pas colinéaires. Par le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 2. Par ailleurs, on peut vérifier que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent au noyau de A . Comme ils ne sont pas colinéaires et que le noyau est de dimension 2, ils en forment une base.

2. Un vecteur (x, y, z, t) appartient à $\text{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ si et seulement si $\ell_1(x, y, z, t) = 0$ et $\ell_2(x, y, z, t) = 0$. On remarque que les lignes de la matrice A sont les matrices de ℓ_1, ℓ_2 dans la base canonique. D'où le produit matriciel :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x, y, z, t) \\ \ell_2(x, y, z, t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que (x, y, z, t) appartient à $\text{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A , et donc que $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$ est une base de $\text{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$.

Exercice 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note \mathcal{B} la base de E formée des polynômes $1, X, X^2$ et \mathcal{B}^* la base duale de \mathcal{B} . On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_1(P) &= P(1) \\ \ell_2(P) &= P'(1) \\ \ell_3(P) &= \int_0^1 P(x) dx \end{aligned}$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans \mathcal{B}^* ?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^* .
3. Trouver trois polynômes qui forment une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Corrigé. 1. Les coordonnées de ℓ_j dans la base duale de $(1, X, X^2)$ sont obtenus en calculant $\ell_j(1), \ell_j(X), \ell_j(X^2)$. En effet, si l'on note (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) la base duale de $(1, X, X^2)$ (ce qui signifie que pour tous $0 \leq i, j \leq 2$, $\phi_j(X^i) = 1$ si $i = j$ et $\phi_j(X^i) = 0$ sinon), et si a_{0j}, a_{1j}, a_{2j} sont les coefficients de ℓ_j dans (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) , alors :

$$\ell_j(X^i) = a_{0j} \phi_0(X^i) + a_{1j} \phi_1(X^i) + a_{2j} \phi_2(X^i) = a_{ij}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \ell_1(1) &= 1, \ell_1(X) = 1, \ell_1(X^2) = 1, \\ \ell_2(1) &= 0, \ell_2(X) = 1, \ell_2(X^2) = 1, \\ \ell_3(1) &= 1, \ell_3(X) = \frac{1}{2}, \ell_3(X^2) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Pour montrer que l'on obtient une base, il suffit de vérifier que la matrice composée des coefficients calculés dans la question précédente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

est inversible, c'est à dire de rang 3. Ceci peut se faire en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

3. Notons \mathcal{B}' la base de E que l'on cherche, de sorte que sa base duale est $\mathcal{B}'^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. D'après le cours,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = {}^T (\text{Mat}_{\mathcal{B}^*} \mathcal{B}'^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathcal{B}' = (-3X^2 + 6X - 2, \frac{3}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{2}, 3X^2 - 6X + 3)$ est la base recherchée.