Devoir d'entrainement

A rendre pour le 04/10 (ou pas).

Discuter de l'énoncé et de sa solution avec ses camarades est une bonne chose. Vous pouvez rédiger une copie à plusieurs. Il est également possible de demander une indication à son enseignant. Il est simplement demandé de s'appliquer sur la rédaction. Bon travail !

Exercice 1.

1. Trouver une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ données pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\begin{aligned} \ell_1(x, y, z, t) &= x + y - t \\ \ell_2(x, y, z, t) &= y - z. \end{aligned}$$

A l'aide de la question précédente, donner une base de $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)^\circ$, l'orthogonal de $\mathrm{vect}(\ell_1, \ell_2)$ dans $\mathbb{R}^4$. Justifier.

Exercice 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes $1, X, X^2$ et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_1(P) &= P(1) \\ \ell_2(P) &= P'(1) \\ \ell_3(P) &= \int_0^1 P(x)dx \end{aligned}$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver trois polynômes qui forment une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.