Examen première session : corrigé

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Ce sujet comprend quatre exercices indépendants. Lorsque c'est possible, il est permis de répondre à une question en ayant admis le résultat des questions précédentes.

Exercice 1. On considère la matrice à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que le polynôme caractéristique de A est donné par $P_A(X) = cX(X-1)^2$, où c est un réel que l'on déterminera.
2. Donner les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques.
3. Justifier par un théorème du cours que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. Quel calcul suffit-il de faire pour déterminer si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
5. Trouver une base de chaque espace propre de A.
6. Trouver une base de chaque espace caractéristique de A.
7. Donner une matrice inversible P et un réel α tels que $A = PTP^{-1}$, où T est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Pour un entier $n \geq 0$ quelconque, Calculer T^n en fonction de n. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et T^n (*Il n'est pas demandé de calculer* P^{-1}).

Corrigé. 1. On peut calculer le polynôme caractéristique de A comme suit. On commence par remplacer la troisième colonne par sa somme avec la deuxième,

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & -2 \\ 2 & 3-X & -2 \\ 3 & 4 & -3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 0 \\ 2 & 3-X & 1-X \\ 3 & 4 & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 0 \\ 2 & 3-X & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

puis on soustrait aux 1ère er 2ème colonnes respectivement 3 fois et 4 fois la troisième :

$$P_A(X) = (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 0 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, on développe par rapport à la dernière ligne :

$$P_A(X) = (1-X)((2-X)(-1-X)+2) = (1-X)(X^2-X) = -X(X-1)^2.$$

2. De la question précédente, on déduit immédiatement que les valeurs propres de A sont 1, de multiplicité algébrique 2 et 0, de multiplicité algébrique 1.
3. Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, A est trigonalisable.
4. On sait que la multiplicité géométrique d'une valeur propre simple est toujours égale à sa multiplicité algébrique. Il suffit donc de vérifier si la multiplicité géométrique de 1 est égale à sa multiplicité algébrique pour déterminer si A est diagonalisable. Autrement dit, il suffit de vérifier si $\ker(A - I_3)$ est de dimension 2.
5. (Nous ne détaillerons pas les calculs dans le corrigé de cette question). On obtient :
   — $\ker(A)$ est de dimension 1 et engendré par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   — $\ker(A - I_3)$ est de dimension 1 et engendré par $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en particulier A n'est pas diagonalisable),
6. Les espaces caractéristiques sont respectivement $\ker((A - I_3)^2)$ et $\ker(A)$. Nous avons déjà calculé $\ker(A)$. Il reste donc à calculer $\ker((A - I_3)^2)$. Pour cela on calcule d'abord $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, dont le noyau est (comme prévu[1]) de dimension 2 et engendré par $\left(v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
7. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3 obtenus précédemment :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On sait alors (formule de changement de base) que les colonnes de $P^{-1}AP$ sont coefficients des vecteurs Av_1, Av_2, Av_3 dans la base v_1, v_2, v_3. Par construction (ce sont des vecteurs propres), $Av_1 = 2v_1$ et $Av_2 = v_2$. Pour Av_3, il faut faire un petit calcul :

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2v_2 + v_3$$

   On obtient donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. D'après la question précédente $P^{-1}AP = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme D et N commutent (vérification facile), on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$T^n = (D + N)^n = D^n + nD^{n-1}N + \binom{n}{2} D^{n-2}N^2 + ...$$

   Mais comme $N^2 = 0$, cette dernière formule se simplifie : $T^n = D^n + nD^{n-1}N$. On obtient donc :

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Enfin, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Exercice 2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour tous vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^3$, on note $\ell_{v,w}$ l'application donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ par

$$\ell_{v,w}(x) = \det_{\mathcal{B}}(v, w, x).$$

1. Calculer $\ell_{v,w}(x)$ dans le cas où $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. D'après le cours l'espace caractéristique d'une valeur propre a pour dimension la multiplicité algébrique de cette valeur propre.

2. On suppose dans la suite de l'exercice que v et w sont des vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$. Que valent $\ell_{v,w}(v)$ et $\ell_{v,w}(w)$?
3. Justifier que $\ell_{v,w}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que la famille (v, w) est liée si et seulement si $\ell_{v,w}$ est la forme linéaire nulle.
5. On suppose que la famille (v, w) est libre. Donner une base du noyau de $\ell_{v,w}$. Justifier.
6. On suppose que la famille (v, w) est libre. Montrer que $\ell_{v,w}$ engendre le sous-espace du dual $\mathrm{Vect}(v, w)^{\perp}$, dont on rappellera la définition.

Corrigé.

1. Ceci revient à calculer un déterminant 3x3 :

$$\ell_{v,w}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

2. Le déterminant d'une famille de vecteur liée est nul. D'où :

$$\ell_{v,w}(v) = \det_{\mathcal{B}}(v, w, v) = 0, \qquad \ell_{v,w}(w) = \det_{\mathcal{B}}(v, w, w).$$

3. Commençons par remarquer que $\ell_{v,w}$ est bien une application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. De plus, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité du déterminant par rapport à sa troisième variable :

$$\ell_{v,w}(x+\lambda x') = \det_{\mathcal{B}}(v, w, x+\lambda x') = \det_{\mathcal{B}}(v, w, x)+\lambda \det_{\mathcal{B}}(v, w, x') = \ell_{v,w}(x)+\lambda\ell_{v,w}(x').$$

   Ceci prouve qu'il s'agit bien d'une forme linéaire.

4. On suppose (v, w) liée. Alors, pour tout x, la famille (v, w, x) est liée donc $\det_{\mathcal{B}}(v, w, x) = 0$. Autrement dit, $\ell_{v,w}(x) = 0$ pour tout x.
   Réciproquement, si (v, w) n'est pas liée, c'est-à-dire est libre, on sait que l'on peut compléter en une base (v, w, u) de $\mathbb{R}^3$. Comme il s'agit d'une base, $\det_{\mathcal{B}}(v, w, u) \neq 0$, donc $\ell_{v,w}(u) \neq 0$. La forme $\ell_{v,w}$ n'est donc pas nulle.
5. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est de codimension 1 (car défini par 1 équation non nulle), donc de dimension 2. Par ailleurs, on a vu à la question 2 que v et w appartiennent au noyau de $\ell_{v,w}$. La famille (v, w) est une famille libre à deux éléments dans $\ker(\ell_{v,w})$. C'en est donc une base.
6. On rappelle que par définition,

$$\mathrm{Vect}(v, w)^{\perp} = \{\ell \in (\mathbb{R}^3)^* \mid \ell(v) = \ell(w) = 0\}.$$

   D'après le cours, ce sous-espace est de codimension 2, donc de dimension 1. Par ailleurs, d'après la question 2, il contient $\ell_{v,w}$. Or, d'après la question 4, $\ell_{v,w}$ est non nulle, elle l'engendre donc.

Exercice 3. On note D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, et $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $2x - y + z = 3$.

1. Justifier que le point $A = (1, 0, 1) \in \mathcal{F}$.
2. On pose $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Justifier que (u, v) forme une base de l'espace vectoriel F qui dirige $\mathcal{F}$.
3. Justifier que $\mathcal{R} = (A, (u, v, w))$ forme un repère de $\mathbb{R}^3$.
4. Etant donné un point $M \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère canonique $\mathcal{R}_0$, on note (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer (x, y, z) en fonction de (X, Y, Z), puis (X, Y, Z) en fonction de (x, y, z).

5. Soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à D. On note respectivement (x', y', z') et (X', Y', Z') les coordonnées de $p(M)$ dans $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}$. Exprimer (X', Y', Z') en fonction de (X, Y, Z).
6. En déduire l'expression de (x', y', z') en fonction de (x, y, z).

Corrigé.

1. C'est une simple vérification : $2\cdot 1 - 0 + 1 = 3$.
2. On sait que la direction de $\mathcal{F}$ est le sous-espace vectoriel F d'équation $2x - y + z = 0$. Cet espace est de codimension 1 (une seule équation) donc de dimension 2. Par ailleurs, les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ lui appartiennent. Comme ils sont indépendants, ils en forment une base.
3. Pour justifier que $\mathcal{R}$ est un repère il suffit de justifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de vérifier que la matrice suivante est de rang 3 :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
En retirant la dernière colonne à la deuxième, on obtient une matrice échelonnée (à ordre des colonnes près) sans colonne nulle. Cette matrice est donc bien de rang 3.
4. La formule de changement de repère vue en cours donne :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
et donc
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
Le calcul de l'inverse (que l'on ne détaillera pas ici) donne :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
En particulier, $X = z - 1$ et $Y = -(x - 1) + y - (z - 1) = -x + y - z + 2$.
5. On a $X' = X$, $Y' = Y$ et $Z' = 0$.
6. En utilisant la question 4, on obtient
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
et $X = z - 1$ et $Y = -x + y - z + 2$. D'où,
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z + 3 \\ -2x + 2y - z + 3 \\ z \end{pmatrix}.$$
A titre de vérification, on peut remarquer que $p(A) = A$ et que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ appartient bien $\mathcal{F}$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes u et v de E tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$. On raisonne par l'absurde et l'on suppose donc donnés deux endomorphismes u et v vérifiant $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $u \circ v^2 = v \circ u \circ v + v$ et $v^2 \circ u = v \circ u \circ v - v$. En déduire que $u \circ v^2 - v^2 \circ u = 2v$, où v^2 désigne l'endomorphisme $v \circ v$.
2. Soit $P(X)$ un polynôme de la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec a, b, c des nombres réels quelconques. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que
$$u \circ P(v) - P(v) \circ u = Q(v).$$
Exprimer $Q(X)$ à l'aide de a, b, c. Remarquer que $\deg(Q(X)) = \deg(P(X)) - 1$.
3. Rappeler l'énoncé du théorème de Cayley-Hamilton.
4. Quel est le degré du polynôme caractéristique de v ?
5. A l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe un polynôme de degré 1 qui annule l'endomorphisme v.
6. En déduire que v est un multiple de l'identité, aboutir à une contradiction et conclure.

Corrigé.

1. On part de l'identité $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$, puis l'on compose à droite par v. On obtient $u \circ v^2 - v \circ u \circ v = v$ et donc la première identité $u \circ v^2 = v \circ u \circ v + v$. La seconde identité est obtenue de même mais en composant cette fois à gauche par v. En soustrayant les deux identités, on obtient $u \circ v^2 - v^2 \circ u = 2v$, comme souhaité.
2. On calcule :
$$\begin{aligned} u \circ P(v) - P(v) \circ u &= u \circ (av^2 + bv + c\,\mathrm{Id}_E) - (av^2 + bv + c\,\mathrm{Id}_E) \circ u \\ &= a\,u \circ v^2 - a\,v^2 \circ u + b\,u \circ v - b\,v \circ u + c\,u \circ \mathrm{Id}_E - c\,\mathrm{Id}_E \circ u \\ &= 2av + b\,\mathrm{Id}_E\,. \end{aligned}$$
Pour la dernière égalité, on a utilisé la question précédente et le fait que $\mathrm{Id}_E \circ u = u \circ \mathrm{Id}_E$. En posant $Q(X) = 2aX + b$, on obtient donc bien $u \circ P(v) - P(v) \circ u = Q(v)$. Par ailleurs, on remarque, que si $P(X)$ est de degré 2 (resp. de degré 1, constant), alors $Q(X)$ est de degré 1 (resp. de degré 0, nul).
3. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que tout endomorphisme est annulé par son polynôme caractéristique.
4. Comme E est de dimension 2, le polynôme caractéristique de tout endomorphisme de E est de degré 2.
5. Comme il est de degré 2, on peut appliquer l'identité de la question 2, avec le polynôme caractéristique de v, noté $P_v(X)$ à la place de $P(X)$. Comme d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_v(v) = 0$, on en déduit $Q(v) = u \circ P_v(v) - P_v(v) \circ u = 0$ pour un certain polynôme $Q(X)$ de degré 1 .
6. Comme le coefficient dominant de $P_v(X)$ est 1, celui de $Q(X)$ est 2 et on peut écrire $Q(X) = 2X + b$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$. De $Q(v) = 0$, on tire $v = -\frac{b}{2}\,\mathrm{Id}_E$.
Par conséquent v commute à u, et comme souhaité, l'identité $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$ ne peut donc pas être vérifiée.