Examen première session

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Ce sujet comprend quatre exercices indépendants. Lorsque c'est possible, il est permis de répondre à une question en ayant admis le résultat des questions précédentes.

Exercice 1. On considère la matrice à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que le polynôme caractéristique de A est donné par $P_A(X) = cX(X-1)^2$, où c est un réel que l'on déterminera.
2. Donner les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques.
3. Justifier par un théorème du cours que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. Quel calcul suffit-il de faire pour déterminer si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
5. Trouver une base de chaque espace propre de A.
6. Trouver une base de chaque espace caractéristique de A.
7. Donner une matrice inversible P et un réel α tels que $A = PTP^{-1}$, où T est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Pour un entier $n \geq 0$ quelconque, Calculer T^n en fonction de n. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et T^n (*Il n'est pas demandé de calculer* P^{-1}).

Exercice 2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour tous vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^3$, on note $\ell_{v,w}$ l'application donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ par

$$\ell_{v,w}(x) = \det_{\mathcal{B}}(v, w, x).$$

1. Calculer $\ell_{v,w}(x)$ dans le cas où $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On suppose dans la suite de l'exercice que v et w sont des vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$. Que valent $\ell_{v,w}(v)$ et $\ell_{v,w}(w)$?
3. Justifier que $\ell_{v,w}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que la famille (v, w) est liée si et seulement si $\ell_{v,w}$ est la forme linéaire nulle.
5. On suppose que la famille (v, w) est libre. Donner une base du noyau de $\ell_{v,w}$. Justifier.
6. On suppose que la famille (v, w) est libre. Montrer que $\ell_{v,w}$ engendre le sous-espace du dual $\mathrm{Vect}(v, w)^{\perp}$, dont on rappellera la définition.

Exercice 3. On note D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $2x - y + z = 3$.

1. Justifier que le point $A = (1, 0, 1) \in \mathcal{F}$.
2. On pose $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justifier que (u, v) forme une base de l'espace vectoriel F qui dirige $\mathcal{F}$.
3. Justifier que $\mathcal{R} = (A, (u, v, w))$ forme un repère de $\mathbb{R}^3$.
4. Etant donné un point $M \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère canonique $\mathcal{R}_0$, on note (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$. Exprimer (x, y, z) en fonction de (X, Y, Z), puis (X, Y, Z) en fonction de (x, y, z).
5. Soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à D. On note respectivement (x', y', z') et (X', Y', Z') les coordonnées de $p(M)$ dans $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}$. Exprimer (X', Y', Z') en fonction de (X, Y, Z).
6. En déduire l'expression de (x', y', z') en fonction de (x, y, z).

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes u et v de E tels que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$. On raisonne par l'absurde et l'on suppose donc donnés deux endomorphismes u et v vérifiant $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $u \circ v^2 = v \circ u \circ v + v$ et $v^2 \circ u = v \circ u \circ v - v$. En déduire que $u \circ v^2 - v^2 \circ u = 2v$, où v^2 désigne l'endomorphisme $v \circ v$.
2. Soit $P(X)$ un polynôme de la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec a, b, c des nombres réels quelconques. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que
$$u \circ P(v) - P(v) \circ u = Q(v).$$
Exprimer $Q(X)$ à l'aide de a, b, c. Remarquer que $\deg(Q(X)) = \deg(P(X)) - 1$.
3. Rappeler l'énoncé du théorème de Cayley-Hamilton.
4. Quel est le degré du polynôme caractéristique de v ?
5. A l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe un polynôme de degré 1 qui annule l'endomorphisme v.
6. En déduire que v est un multiple de l'identité, aboutir à une contradiction et conclure.