Devoir d'entrainement : corrigé

Durée : 2 heures

Exercice 1. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints et calculer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 9 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé. On suit la méthode indiquée en cours pour décomposer en cycle.

$$\sigma_1 = (1,6,3,5,8) \circ (2,4,9) \qquad \sigma_2 = (1,6,3,8) \circ (2,5,7) \circ (4,9).$$

D'où les signatures $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^{4+2} = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^{3+2+1} = 1$.

Exercice 2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 - e_4$. A quelle condition sur les réels a_1, a_2, a_3, a_4 le plan P est-il inclus dans le noyau de la forme linéaire $f = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$?
2. Déterminer une base du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid \forall v \in P, f(v) = 0\}$. Puis, de façon équivalente, donner des équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
3. Considérons maintenant les formes linéaires $\phi_1 = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\phi_2 = e_1^* - e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous espace $E = \{v \in V \mid \phi_1(v) = \phi_2(v) = 0\}$.

Corrigé.

1. Remarquons d'abord que $f|_P = 0$ si et seulement si $f(v_1) = 0$ et $f(v_2) = 0$. Or, $f(v_1) = a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4$ et $f(v_2) = a_2 + a_3 - a_4$. Donc $f|_P = 0$ si et seulement si les a_i vérifient les relations $a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4 = 0$ et $a_2 + a_3 - a_4 = 0$.
2. D'après le cours, $P^\perp$ a pour codimension la dimension de P. Donc sa codimension est 2 et sa dimension est 2 également. Par conséquent, il suffit de trouver deux formes linéaires indépendantes dans $P^\perp$ pour en avoir une base. La question précédente nous indique comment choisir les coefficients dans $\mathcal{B}^*$ de deux telles formes linéaires. On peut prendre par exemple $e_3^* + e_4^*$ et $e_1^* - e_2^* + e_3^*$.
Le plan P est donc l'ensemble des solutions du système :
$$\begin{cases} x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}.$$
3. L'espace E considéré est $\mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2)^\circ$ dans les notations du cours. Les deux formes étant linéairement indépendantes, la dimension de E est la codimension de $\mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2)$, c'est à dire $4 - 2 = 2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants dans E pour en trouver une base. Par exemple, $(1, -1, 0, 1)$ et $(1, 0, 1, 1)$ conviennent.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres de la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles, donner une base de l'espace propre associé, puis de l'espace caractéristique associé. La matrice A est-elle diagonalisable / trigonalisable ? Si oui, donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale / triangulaire supérieure. Enfin, expliquer comment obtenir ensuite la décomposition de Dunford de A.

Corrigé. Le polynôme caractéristique de A est le déterminant suivant, que l'on calcule en développant par rapport à la première puis la dernière ligne :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3-X & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1-X & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)^2 \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-2)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc -1 et 2. Chacune d'entre elle est de multiplicité algébrique 2. Leurs espaces caractéristiques sont donc de dimension 2. Rappelons que l'espace propre associé à une certaine valeur propre est toujours inclus dans l'espace caractéritique correspondant.

Trouver une base de l'espace propre associé à -1 revient à trouver une base du noyau de la matrice $A + I_4$. Cela peut se faire par la méthode du pivot (voir TD ou cours). On trouve un espace propre de dimension 2 engendré par exemple par $x = (1, 1, -1, 0)$ et $y = (0, -1, 1, 1)$. On remarque alors que la dimension de l'espace propre est 2. En particulier, il est égal à l'espace caractéristique de la valeur propre -1.

Passons à l'étude de la valeur propre 2. En calculant le noyau de $A - 2I_2$, on trouve une espace propre de dimension 1, engendré par $z = (0, -1, 1, 0)$. Ce vecteur z appartient aussi à l'espace caractéristique qui est de dimension 2. Pour calculer une base de l'espace caractéristique il faut trouver un autre vecteur t dans $\ker((A - I_2)^2)$, tel que (t, z) forme une famille libre. Par exemple, $t = (0, 1, 0, 0)$ convient.

La somme des dimensions des espaces propres est 3 qui est strictement inférieur à la dimension de l'espace considéré (4 ici), donc la matrice n'est pas diagonalisable. En revanche, elle est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé.

Considérons la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs x, y, z, t. (c'est à dire la matrice de passage de la base canonique à la base (x, y, z, t)) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $Ax = -x$, $Ay = -y$, $Az = 2z$ puisque ce sont des vecteurs propres. Par ailleurs, on peut remarquer que $At = -z$. On peut donc écrire :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la décomposition de Dunford, on écrit :

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La première matrice du membre de droite est diagonalisable, la seconde est nilpotente (son carré est nul). Enfin, elles commutent et c'est donc bien la décomposition de Dunford.

Exercice 4. On se donne un entier n et une matrice $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $J^2 = -I_{2n}$, où I_{2n} est la matrice identité. Le but de cet exercice est de montrer que J est semblable à la matrice diagonale par blocs 2×2 :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

où tous les coefficients non-représentés sont nuls.

1. Donner un polynome de degré 2 qui annule J. En déduire que les valeurs propres de J vue comme une matrice complexe sont les complexes i et $-i$. La matrice J est-elle diagonalisable/trigonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{R})$?
2. Montrer que J est diagonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $w \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre pour i si et seulement si son conjugué $\overline{w} \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre pour $-i$. En déduire que les espaces propres de $J \in M_{2n}(\mathbb{C})$ sont tous de dimension n.
4. Soit $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de l'espace propre associé à i. Pour $j = 1, \ldots, n$, on note $u_j = \mathrm{Re}(w_j)$ la partie réelle de w_j et $v_j = \mathrm{Im}(w_j)$ sa partie imaginaire. Que vaut Ju_j ? Que vaut Jv_j ?
5. Conclure.

Corrigé.

1. Par hypothèse, $J^2 + I_{2n} = 0$ donc le polynome $X^2 + 1$ annule J. Les valeurs propres de J doivent donc être des racines de $X^2 + 1$ et donc sont soit i soit $-i$. La matrice J n'a pas de valeur propre réelle. Elle ne peut donc être ni diagonalisable, ni trigonalisable.
2. Dans $\mathbb{C}$, $X^2 + 1$ est scindé et à racines simples. La matrice J annule donc un polynome scindé à racines simples. Elle est donc diagonalisable.
3. Tous les coefficients de J sont réels donc $\overline{J} = J$. Donc si $Jw = iw$, on peut écrire :

   $$J\overline{w} = \overline{Jw} = \overline{iw} = -i\overline{w},$$

   ce qui montre que $\overline{w}$ est vecteur propre pour $-i$. La réciproque se vérifie de manière similaire.

   Cela montre que l'application linéaire $w \mapsto \overline{w}$ est une bijection (et donc un isomorphisme) entre les espaces propres E_i et E_{-i}, qui ont donc la même dimension. Par ailleurs, comme J est diagonalisable, la somme de leurs dimensions est $2n$. Chacun d'entre eux est donc de dimension n.
4. Le vecteur $w_j = u_j + iv_j$ est propre pour i, donc

   $$Ju_j + iJv_j = i(u_j + iv_j) = -v_j + iu_j.$$

   En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient : $Ju_j = -v_j$ et $Jv_j = u_j$.
5. Remarquons d'abord que si l'on montre que la famille $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^{2n}$, alors la matrice de J (ou plutôt de l'endomorphisme représenté par J dans la base canonique) dans cette base est bien, d'après la question précédente, la matrice J_0 de l'énoncé.

Pour montrer que c'est une base, montrons qu'elle est libre et supposons donc qu'il existe des réels $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ vérifiant

$$a_1 u_1 + b_1 v_1 + \cdots + a_n u_n + b_n v_n = 0.$$

Alors, en utilisant que $w_j = u_j + i v_j$ et $\overline{w_j} = u_j - i v_j$,

$$\tfrac{1}{2}(a_1 - i b_1)\, w_1 + \tfrac{1}{2}(a_1 + i b_1)\, \overline{w_1} + \ldots + \tfrac{1}{2}(a_n - i b_n)\, w_n + \tfrac{1}{2}(a_n + i b_n)\, \overline{w_n}.$$

Par ailleurs, on sait que les w_j forment une base de E_i, que les $\overline{w_j}$ forment une base de E_{-i} et que les espaces propres sont en somme directe. Par conséquent, la famille $(w_1, \overline{w_1}, ..., w_n, \overline{w_n})$ est libre. Cela implique que tous les coefficients $\frac{1}{2}(a_j - i b_j)$ et $\frac{1}{2}(a_j + i b_j)$ s'annulent et donc que tous les réels $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ s'annulent également. La famille $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ est donc bien une base.